zemis2020-09-30（board）

559 (1) $t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと.

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\left(\tan x=\frac{2t}{1-t^2}\right)$

証) $s=\sin\frac{x}{2}$, $c=\cos\frac{x}{2}$ とおくと. $\left(c^2+s^2=1,\ t=\frac{s}{c}\right)$

$\sin x=\sin 2\cdot\frac{x}{2}=2sc=\frac{2sc}{c^2+s^2}=\frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x=\cos 2\cdot\frac{x}{2}=c^2-s^2=\frac{c^2-s^2}{c^2+s^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

(注 $\frac{1}{c^2}=1+t^2$ を利用してもできる)

(2) $\int\frac{5}{3\sin x+4\sin x}dx$

$t=\tan\frac{x}{2}$ で置換

$\frac{dt}{dx}=\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1+t^2}{2}$

$(\tan\theta)'=\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$

$=\int\frac{5}{3\times\frac{2t}{1+t^2}+4\times\frac{1-t^2}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}dt$

$=\int\frac{5}{3t+2(1-t^2)}dt$

$=-\int\frac{5}{2t^2-3t-2}dt$

$=\int\left(\frac{2}{2t+1}-\frac{1}{t-2}\right)dt$

$=\log|2t+1|-\log|t-2|+C$

$=\log\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-2}\right|+C$

Cは積分定数.

$\frac{5}{(2t+1)(t-2)}=\frac{a}{2t+1}+\frac{b}{t-2}$ とお

$5=a(t-2)+b(2t+1)$

$t\to2$ $5=5b$

$t\to-\frac{1}{2}$ $5=-\frac{5}{2}a$

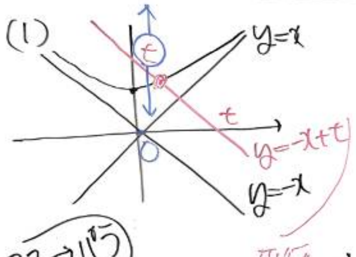
$\left(a=-2,\ b=1\right)$

560 学習テーマ ① $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ の積分 ⇨ $\boxed{\text{双パラ}}$ 利用 (2)

② $y=\sqrt{x^2+1}$: $\boxed{\text{双パラ}}$ の作り方 (1)

∴ (2)単独でも解けるように!!

(1)



アス→パラ

$y=\sqrt{x^2+1}$, $y=-x+t$ を連立

$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\\ y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\end{cases}$

平行 ∴ $\left(\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)$

(2) $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ $y=\sqrt{x^2+1}$ とおく.

⇨ $\boxed{x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ で置換する

$y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ より

(与式)$=\int\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\times\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$

$=\frac{1}{4}\int\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+2\cdot\log|t|-\frac{1}{2t^2}\right)+C$

ここから t消去. $t^2-2xt-1=0$

∴ $\boxed{t=x+\sqrt{1+x^2}}>0$ 代入メンドウ

$y=\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+1}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\left(t^2-2+\frac{1}{t^2}\right)+1}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\left(t^2+2+\frac{1}{t^2}\right)}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$ $y>0$

(与式)$=\frac{1}{4}\cdot\left\{\underbrace{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}_{2y}\underbrace{\left(t-\frac{1}{t}\right)}_{2x}+2\cdot\log|t|\right\}+C$

$2\sqrt{x^2+1}$

$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$

《補足》入試では、次の問われ方が多い

$\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ を $t=x+\sqrt{x^2+1}$ で置換して 計算せよ

y 双曲線

正体は $\boxed{\text{双パラ}}$

(2) $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ $y=\sqrt{x^2+1}$ とおく.

⇨ $\boxed{x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ で置換する

$y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ より

(与式)$=\int\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\times\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$

$=\frac{1}{4}\int\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+2\cdot\log|t|-\frac{1}{2t^2}\right)+C$

ここから t消去. $t^2-2xt-1=0$

∴ $\boxed{t=x+\sqrt{1+x^2}}>0$ 代入メンドウ

$y=\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+1}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\left(t^2-2+\frac{1}{t^2}\right)+1}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\left(t^2+2+\frac{1}{t^2}\right)}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$ $y>0$

$(5式) = \frac{1}{4} \cdot \left\{ \frac{1}{2}\underbrace{\left(t+\frac{1}{t}\right)}_{2y}\underbrace{\left(t-\frac{1}{t}\right)}_{2x} + 2 \cdot \log|t| \right\} + C$

$2\sqrt{x^2+1}$

$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$ //

《補足》入試では、次の問われ方が多い！

$\int \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{y} dx$ を $t = x + \sqrt{x^2+1}$ で置換して 計算せよ

y 双曲線　　正体は $\boxed{\text{双パラ}}$

$\boxed{\text{チャレ(40)}}$ $\int \frac{2x+1}{x(x-1)^2} dx$.

《考察》

① $\cancel{\frac{a}{x} + \frac{b}{(x-1)^2}}$ とおく　$\frac{\text{1次以下}}{\text{2次}}$

② $\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{(x-1)^2}$ とおく、積分しにくい

$bx+c = b(x-1) + (c+b)$

③ $\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

とおく

$\boxed{答}$ $\log\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{3}{x-1} + C$ //

2019 フジタ $\boxed{1}$ 小問集合.

(8) $10\vec{OA} + 5\vec{OB} + 4\vec{OC} = \vec{0}$

$\triangle OBC : \triangle OCA : \triangle OAB$

$= 10 : 5 : 4$

よって $\triangle OAB = \boxed{\frac{4}{19}} \times \triangle ABC$

(6) $\begin{cases} f(x) = x^3 - x^2 + 2x,\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 - k \text{ とおく.} \\ f'(x) = 3x^2 - 2x + 2,\ g'(x) = x. \end{cases}$

交点の x 座標を t とおく

$\begin{cases} f(t) = g(t) \leftarrow y座 \\ f'(t) \times g'(t) = -1 \end{cases}$

傾きの積が −1

が必要

$t = -\frac{1}{3}$

$k = \frac{47}{54}$

71講. 部分積分　　C省略

$\boxed{561}$ $(x-1)e^x$, $-x\cos x + \sin x$

$\frac{1}{2}x^2 \cdot \log x - \frac{1}{4}x^2$

$\boxed{562}$ まず置換

$\log x \cdot \log(\log x) - \log x$

$2(\sqrt{x}-1) \cdot e^{\sqrt{x}}$

$\boxed{563}$ 2回部分積分

(1) $-(x^2+2x+2) \cdot e^{-x}$

(2) $(2-x^2)\cos x + 2x \cdot \sin x$

部分積分公式　g: x, $\log x$

$\boxed{\int f'g = fg - \int fg'}$

$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$

証　$\boxed{\text{積の微分公式}}$ より

$\boxed{564}$ (2) $\int e^x \sin x\, dx$, $\int e^x \cdot \cos x\, dx$

$\boxed{方針}$ ① それぞれ 2回部分セ ⇒ 同型

② $I = \int e^x \sin x\, dx$, $J = \int e^x \cdot \cos x\, dx$ とおき

1回ずつ部分セ ⇒ 連立

③ 積の微分を利用 ⇒ (1)が誘導

(1) $(e^x \sin x)' = e^x \sin x + \boxed{e^x \cos x}$ —— ①

$(e^x \cos x)' = \boxed{e^x \cos x} - \boxed{e^x \sin x}$ —— ②

(2) ①+②より $\{e^x(\sin x + \cos x)\}' = 2\boxed{e^x \cos x}$

$\therefore \int \boxed{e^x \cos x} dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C_1$

①−②より $\{e^x(\sin x - \cos x)\}' = 2\boxed{e^x \sin x}$

$\therefore \int \boxed{e^x \sin x} dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C_2$ //

565 積分における①乗の調節⇒部分を. 例外は $\tan x$

$I_n=\int (\log x)^n dx$ ($n\geq 0$：整数)

(1) $\{I_n\}$の漸化式を立てる

$I_n=\int 1\cdot(\log x)^n dx$
f' g

$=x(\log x)^n-\int x\times n(\log x)^{n-1}\times\frac{1}{x}dx$

$=\boxed{x(\log x)^n-n\cdot I_{n-1}}$ ■

(2) $I_1=x\cdot\log x-x+C_1$

(1)を用いると $I_2=x(\log x)^2-2x\cdot\log x+2x+C_2$

$I_3=x(\log x)^3-3x(\log x)^2+6x\cdot\log x-6x+C_3$

566 微分方程式(範囲外)

関数方程式 (解は関数)

① 積分方程式
- 区間定数 ⇒ 文字でおく.
- 区間変数 ⇒ $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ 利用

Coming Soon

② 整式型 ⇒ 次数を決める

③ $f(x+y)$型 ⇒ 数値代入 微分の定義

④ 微分方程式

Quiz

$f'(x)=f(x)$

$f(x)=\boxed{?}$ De^x.

変数分離法 $y=f(x)$は

$\frac{dy}{dx}=y$

$\int\frac{1}{y}dy=\int dx$

$\log_e|y|=x+c$

$|y|=e^{x+c}$

$y=\pm e^c\times e^x$
$\pm e^c = D$

$\therefore y=De^x$

566 $\boxed{f'(x)-2f(x)}=x+1$ ← 微分方程式

《考察》 $y=f(x)$とおくと.

$\frac{dy}{dx}-2y=x+1$ → ~~変数分離法~~

(1) $g(x)=e^{-2x}\cdot f(x)$より

$g'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)$

$=e^{-2x}\{f'(x)-2f(x)\}$

$=(x+1)e^{-2x}$.

(3) $g(0)=f(0)=0$ より

$g(0)=-\frac{3}{4}+C=0$

$\therefore g(x)=-\frac{1}{4}(2x+3)\cdot e^{-2x}+\frac{3}{4}$

よって $f(x)=e^{2x}\cdot g(x)$

$=\frac{3}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}(2x+3)$ //

568 テーマ：関数方程式 $f(x+y)$型.
⇒ 数値代入&微分の定義へ

(*): $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ (for all $x>0, y>0$)

(1) $x=y=1$代入 $f(1)=2f(1)$ $\therefore f(1)=0$ ■

(2) $y=\frac{1}{x}$代入 $f(x\times\frac{1}{x})=f(x)+f(\frac{1}{x})$
$f(1)=0$
$\therefore f(x)=-f(\frac{1}{x})$ ■

(3) $f'(x)$を$f'(1)$で表す

$\left(f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right)$

$f(x+h)=f\left(x\times\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)$ ← (*)

$=f(x)+f\left(1+\frac{h}{x}\right)$ より

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$ ← (2)より $f(1)=0$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}\times\frac{1}{x}$ 調整/

$\frac{h}{x}\to 0$

$=f'(1)\times\frac{1}{x}$ //

(4) $f'(1)=2$ より $f(1)=0$

$f'(x)=\frac{2}{x}$

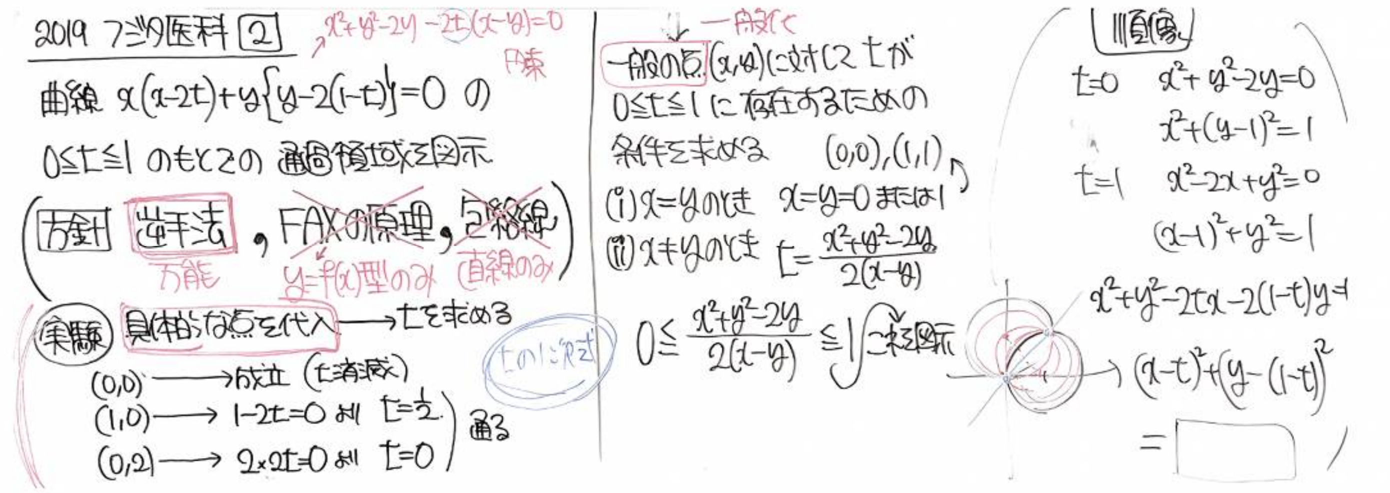
よって $f(x)=\int f'(x)dx$

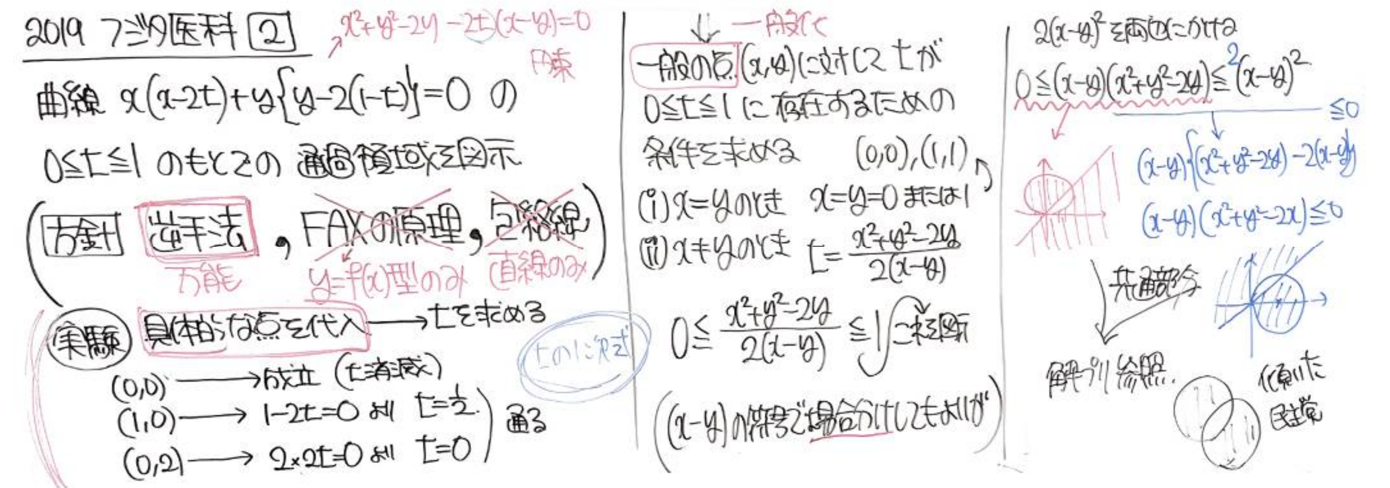
$=2\cdot\log x+C$

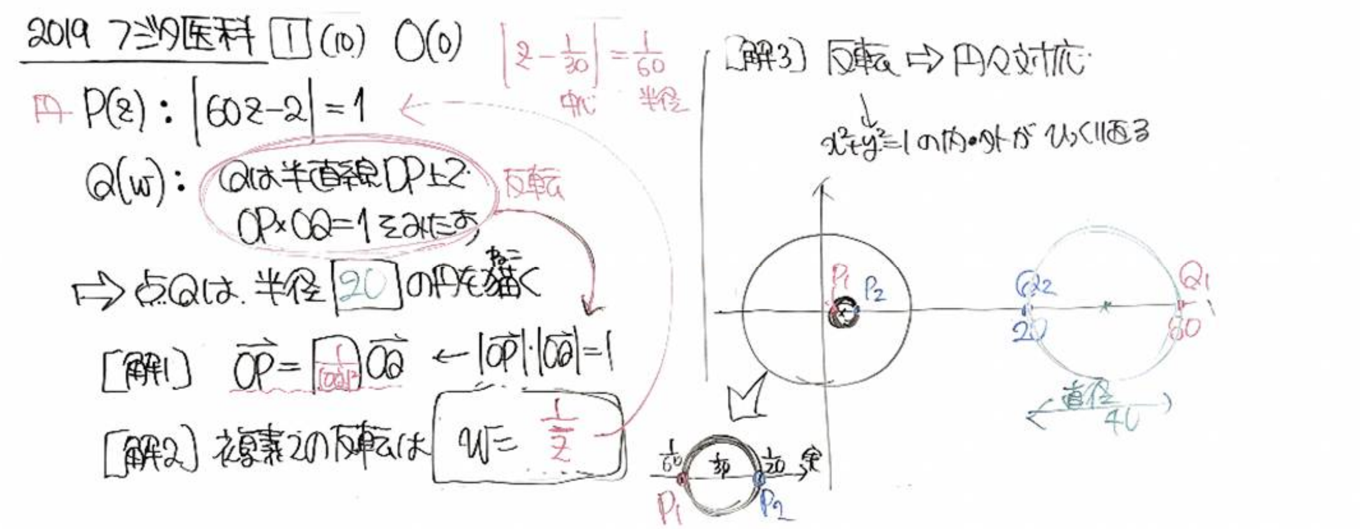
$=2\log x$ //

チャレ(4) → 余力あれば やってく

【演習の時間】


2019 フジタ医科 2
$x^2+y^2-2y-2t(x-y)=0$ 円束
曲線 $x(x-2t)+y\{y-2(1-t)\}=0$ の
$0\leqq t\leqq 1$ のもとでの通過領域を図示
方針 逆手法 万能 , ~~FAXの原理~~ $y=f(x)$型のみ , ~~包絡線~~ 直線のみ
実験 具体的な点を代入 → tを求める
(0,0) → 成立 (t消滅)
(1,0) → $1-2t=0$ より $t=\frac{1}{2}$ 通る
(0,2) → $2\times 2t=0$ より $t=0$
tの1次式
一般化して
一般の点 (x,y) に対して tが
$0\leqq t\leqq 1$ に存在するための
条件を求める (0,0),(1,1)
(i) $x=y$のとき $x=y=0$ または 1
(ii) $x\neq y$のとき $t=\frac{x^2+y^2-2y}{2(x-y)}$
$0\leqq\frac{x^2+y^2-2y}{2(x-y)}\leqq 1$ これを図示
順像
$t=0$ $x^2+y^2-2y=0$
$x^2+(y-1)^2=1$
$t=1$ $x^2-2x+y^2=0$
$(x-1)^2+y^2=1$
$x^2+y^2-2tx-2(1-t)y=$
$(x-t)^2+(y-(1-t))^2$
$=\square$


2019 フジタ医科 2
$x^2+y^2-2y-2t(x-y)=0$ 円束
曲線 $x(x-2t)+y\{y-2(1-t)\}=0$ の
$0\leqq t\leqq 1$ のもとでの通過領域を図示
方針 逆手法 万能 , ~~FAXの原理~~ $y=f(x)$型のみ , ~~包絡線~~ 直線のみ
実験 具体的な点を代入 → tを求める
(0,0) → 成立 (t消滅)
(1,0) → $1-2t=0$ より $t=\frac{1}{2}$ 通る
(0,2) → $2\times 2t=0$ より $t=0$
tの1次式
一般化して
一般の点 (x,y) に対して tが
$0\leqq t\leqq 1$ に存在するための
条件を求める (0,0),(1,1)
(i) $x=y$のとき $x=y=0$ または 1
(ii) $x\neq y$のとき $t=\frac{x^2+y^2-2y}{2(x-y)}$
$0\leqq\frac{x^2+y^2-2y}{2(x-y)}\leqq 1$ これを図示
($(x-y)$の符号で場合分けしてもよいが)
$2(x-y)^2$を両辺にかける
$0\leqq(x-y)(x^2+y^2-2y)\leqq 2(x-y)^2$
$\leqq 0$
$(x-y)\{(x^2+y^2-2y)-2(x-y)\}$
$(x-y)(x^2+y^2-2x)\leqq 0$
共通部分
解答参照
削った円弧


2019 フジタ医科 1 (10) O(0)
$\left|z-\frac{1}{30}\right|=\frac{1}{60}$
中心 半径
円 P(z) : $|60z-2|=1$
Q(w) : Qは半直線OP上で $OP\times OQ=1$をみたす 反転
⇒ 点Qは 半径 20 の円を描く
[解1] $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{|OQ|^2}\overrightarrow{OQ}$ ← $|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|=1$
[解2] 複素数での反転は $w=\frac{1}{\bar{z}}$
[解3] 反転 ⇒ 円⇔対応
$x^2+y^2=1$ の内・外が ひっくり返る
P_1 P_2 Q_2 Q_1
20 60
直径 40