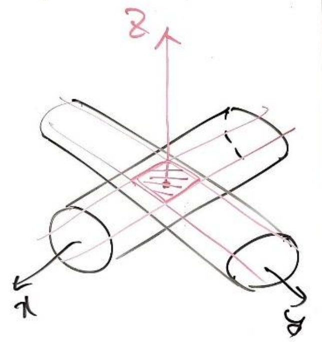
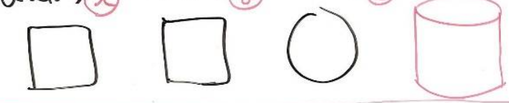
zemis2020-09-07（board）

461 プリントあげる

462



まえから x　ヨコから y　うえから z



まえから x　ヨコから y　うえから

円柱の相貫体

462 $\lim_{n\to\infty} n\cdot r^n = 0 \quad (|r|<1)$

$\infty \times 0$
1次・指数

事実として覚える

463 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1,\quad \lim_{n\to\infty} n\cdot a_n = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(a_n - a_{n+1}) = 1$ を証明．

条件より $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = 1 \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$

このとき $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k\times(a_k - a_{k+1})$ を計算する

$\sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \cdots + (n-1)(a_{n-1} - a_n) + n(a_n - a_{n+1})$

アーベル
Abelの変型

$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n - n\cdot a_{n+1}$ ズレ

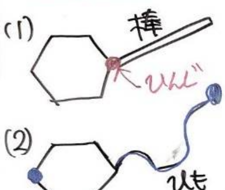
$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} - (n+1)a_{n+1}$

$= \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)\cdot a_{n+1} \to 1 \quad (n\to\infty)$

$\to 1 \qquad \to 0$

464 題意の把握　(1) 棒　(2) ひも

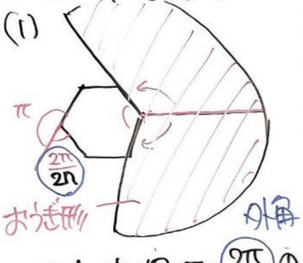
$n=3$ のとき



（周長 $=2$
棒，ひもの長さ 1）

$\frac{r}{\theta}$ $= \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta$

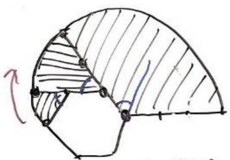
(1)



半径 1，中心角 $\pi + \frac{2\pi}{2n}$ の
おうぎ形 $= \frac{1}{2}\times 1\times\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right)$

$= \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(2)



(1) の答を $T = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ とおく
求めるおうぎ形の半径は

$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots\cdots \frac{n-1}{n}, \quad \frac{n}{n} = 1$

中心角は外角 $\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$　　(1) $\pi + \frac{\pi}{n}$

対称性も考えて

$S_n = 2\cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\times\left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{\pi}{n} + T$

$\frac{1}{2}r^2\theta$

$= \frac{\pi}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$= \frac{\pi}{n^3} \times \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$

《補足》区分求積法

$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

これを用いると

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2\times\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 x^2dx = \frac{\pi}{6}$

0でもOK

$\boxed{チャレ(58)}$ (1) $a_n = n(1-r)\cdot r^{n-1}$ （与式を r^{n-1}でわる）

(2) 第n部分和が『かけずらし』で求める

答 $\frac{2r}{(1-r)^2}$

59講

$\boxed{465}$ (1) $5\times\frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{15}{4}$

(2) (与式) $= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^k - \left(-\frac{2}{5}\right)^k\right\}\right]$

$= \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} - \frac{-\frac{2}{5}}{1-(-\frac{2}{5})}$

$= \frac{3}{2} - \frac{-2}{7} = \frac{25}{14}$

$\boxed{466}$ (1) $\frac{0.123}{1-0.001} = \frac{123}{999} =$

(2) [解1] 無限等比級数とし

[解2]

$S = 1.2\dot{3}\dot{4} = 1.2343434$

$100S = 123.434343$

差をとる $99S = 122.2$

$S = \frac{122.2}{99} = \frac{611}{495}$

$\boxed{467}$ $\sum_{n=1}^{\infty} x(2-x)^{n-1}$ の収束条件.　吸収できる

(i) 初項 $x=0$ のとき 収束し, 和は0

(ii) 初項 $x\neq0$ でも |公比|<1 つまり

$|2-x|<1 \iff 1<x<3$ のとき収束し

$\boxed{\frac{a}{1-r}}$ 和は $\frac{x}{1-(2-x)} = \frac{x}{x-1}$

以上より

$x=0,\ 1<x<3$ のとき, 和は $\frac{x}{x-1}$

$\boxed{468}$ 初項a, 公比rとおくと

$-1<r<1$ が必要 ——①

$\begin{cases} ar=3 \\ 和\ \frac{a}{1-r} = -4\end{cases}$

a消去 $\frac{3}{r(1-r)} = 4$

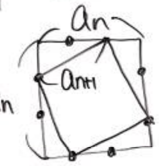
$4r^2-4r-3=0$

$r = -\frac{1}{2}, \cancel{\frac{3}{2}}$ ←①より

$\therefore a=-6,\ r=-\frac{1}{2}$

$\boxed{469}$ 同一操作のくり返し⇒漸化式

T_nの一辺の長さをa_nとおくと $a_1=$



$a_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}a_n\right)^2 + \left(\frac{1}{3}a_n\right)^2}$

$a_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{3}a_n$

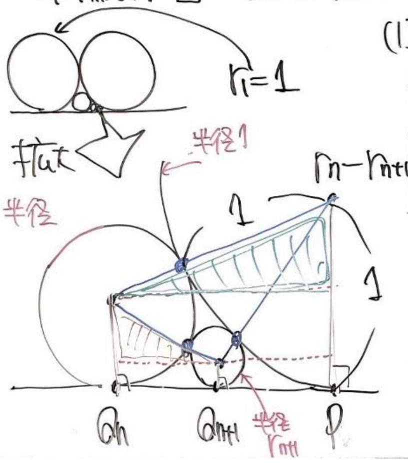
T_nの面積をS_nとおくと $S_n = a_n^2$

$S_{n+1} = \frac{5}{9}S_n$

求めるものは 初項 $S_1 = a_1^2 = 1$, 公比 $\frac{5}{9}$ の無限等比級数

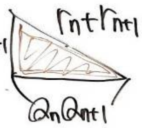
$\left|\frac{5}{9}\right|<1$ より収束 和は $\frac{1}{1-\frac{5}{9}} = \frac{9}{4}$

『車輪の下』　2008 日大



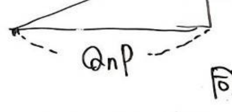
計算なしで解けるように!!

(1) Q_nQ_{n+1}, Q_nP, $Q_{n+1}P$を それぞれ r_n, r_{n+1}で表す



$Q_nQ_{n+1} = \sqrt{(r_n+r_{n+1})^2 - (r_n-r_{n+1})^2}$

$= 2\sqrt{r_n\cdot r_{n+1}}$



$Q_nP = \sqrt{(1+r_n)^2-(1-r_n)^2}$

$= 2\sqrt{r_n}$

同様に $Q_{n+1}P = 2\sqrt{r_{n+1}}$

(2) $\boxed{Q_nQ_{n+1} = Q_nP - Q_{n+1}P}$　別解あ

$2\sqrt{r_n\cdot r_{n+1}} = 2\sqrt{r_n} - 2\sqrt{r_{n+1}}$

$\sqrt{r_{n+1}}\left(\sqrt{r_n}+1\right) = \sqrt{r_n}$

$\sqrt{r_{n+1}} = \frac{\sqrt{r_n}}{\sqrt{r_n}+1}$

逆数 $\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{r_n}} + 1$ ←等差型

$\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + (n-1)\times1 = n$

$\therefore r_n = \frac{1}{n^2}$

470 n：自然数

(1) $n! \geqq 2^{n-1}$ を証明

(i) $n \geqq 2$ のとき

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\times\cdots\times 3\times 2\times 1$$

$$\geqq \underbrace{2\times 2\times 2\times 2\times\cdots 2\times 2}_{(n-1)個}\times 1$$

$$= 2^{n-1}$$ ~~(証明終)~~

(ii) $n=1$ のとき 左$=1$ 右$=1$ より成立 ■

注 帰納法でやってもよい (安全)

(2) $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}} < 3$ を証明 $\begin{cases} 0!=1 \\ 1!=1 \end{cases}$

(1)より $k \geqq 1$ のとき $k! \geqq 2^{k-1}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$= 1 + \frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

< 3 ■

$$< 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

《補足》実は $\lim_{n\to\infty} \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}} = e$