zemis2020-09-29（board）

補例1 C-31-5

$x\ge1$ のとき. $x\log x \ge (x-1)\log(x+1)$ を示せ

$x=1$ のとき 両辺0で成立

$x>1$ のとき $\left(\frac{\log x}{x-1} \ge \frac{\log(x+1)}{x}\right)$ を示せばよい

$f(x)=\frac{\log x}{x-1}$ とおき　$\left(f(x)\ge f(x+1)\text{ を示す}\right)$

$f(x)$ が単調減少であることを示せばよい

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x-1)-\log x\times 1}{(x-1)^2}$　$f'(x)$ を考る

$=\frac{(1-\frac{1}{x})-\log x}{(x-1)^2}$

分子 $g(x)=(1-\frac{1}{x})-\log x$ とおく

$g'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}<0$

より $g(x)$ は単調減少

$g(1)=0$ より

$x>1$ で $g(x)<0$

∴ $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}<0$ ■

別証　とおき

$f(x)=x\log x-(x-1)\log(x+1)$

微分してもできる

⋮

550

548 → マクローリン

550　$x^{\sqrt{a}}\le a^{\sqrt{x}}$ (for $x>0$) をみたす a の値を求める $(a>0)$?　範囲では?

バラ^2 → まとめたい!!

logをとる(底はe).

$\sqrt{a}\cdot\log x\le\sqrt{x}\cdot\log a$

$\underbrace{\frac{\log x}{\sqrt{x}}}_{y}\le\underbrace{\frac{\log a}{\sqrt{a}}}_{y}$

曲線　ヨコ棒

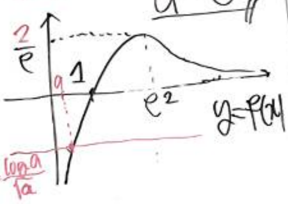
値非捨て猫

値を飼い猫

$a=e^2$

$f(x)=\frac{\log x}{\sqrt{x}}$ とおく.

$f'(x)=\cdots=\frac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$



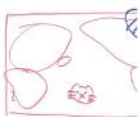
548 略.

マクローリン展開の復習

注 $x=1$ 代入, $\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$

メルカトル級数

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$



メルカトル図法

④ $f(x)=\log(1+x)$ ではどうか?　547(3)

$\{f^{(n)}(x)\}$: $\log(1+x),\ \frac{1}{1+x},\ -\frac{1}{(1+x)^2},\ +\frac{2}{(1+x)^3},\ -\frac{6}{(1+x)^4},\ \cdots$

$\{f^{(n)}(0)\}$: $0,\ +1,\ -1,\ +2,\ -\underset{3!}{6},\ +4!,\ -5!,\ \cdots$

$\log(1+x)=0+1\times x+\frac{-1}{2}x^2+\frac{2}{3!}x^3-\frac{3!}{4!}x^4+\frac{4!}{5!}x^5-\cdots$

∴ $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\cdots$

550　$x^{\sqrt{a}}\le a^{\sqrt{x}}$ (for $x>0$) をみたす a の値を求める $(a>0)$?　範囲では?

バラ^2 → まとめたい!!

logをとる(底はe).

$\sqrt{a}\cdot\log x\le\sqrt{x}\cdot\log a$

$\underbrace{\frac{\log x}{\sqrt{x}}}_{y}\le\underbrace{\frac{\log a}{\sqrt{a}}}_{y}$

曲線　ヨコ棒

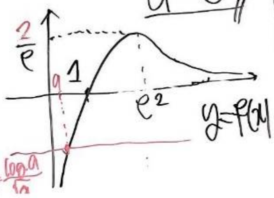
値非捨て猫

値を飼い猫

$a=e^2$

$f(x)=\frac{\log x}{\sqrt{x}}$ とおく.

$f'(x)=\cdots=\frac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$



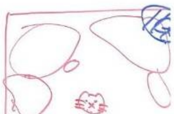
548 略.

マクローリン展開の復習

注 $x=1$ 代入, $\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$

メルカトル級数

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$



メルカトル図法

④ $f(x)=\log(1+x)$ ではどうか?　547(3)

$\{f^{(n)}(x)\}$: $\log(1+x),\ \frac{1}{1+x},\ -\frac{1}{(1+x)^2},\ +\frac{2}{(1+x)^3},\ -\frac{6}{(1+x)^4},\ \cdots$

$\{f^{(n)}(0)\}$: $0,\ +1,\ -1,\ +2,\ -\underset{3!}{6},\ +4!,\ -5!,\ \cdots$

$\log(1+x)=0+1\times x+\frac{-1}{2}x^2+\frac{2}{3!}x^3-\frac{3!}{4!}x^4+\frac{4!}{5!}x^5-\cdots$

∴ $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\cdots$

551 蓬来のぶたまん

$x>0$, n:自然数

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}>\left(1-\frac{x^n}{n!}\right)e^x$$ を証明

《考察》 e^x のマクローリン展開が背景

$$F_n(x)=\underbrace{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}}_{F_{n-1}(x)}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$ とおく（n項）

$$\begin{cases} F_n(x)=F_{n-1}(x)+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots ① \\ F_n'(x)=F_{n-1}(x) & \cdots ② \end{cases}$$

帰納法が使えそう

$$f_n(x)=F_n(x)-\left(1-\frac{x^n}{n!}\right)e^x$$ とおく

$$\left(f_{n-1}(x)=F_{n-1}(x)-\left(1-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^x\right)$$

$$f_n'(x)=F_n'(x)-\left\{-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^x+\left(1-\frac{x^n}{n!}\right)e^x\right\}$$

$$=F_{n-1}(x)+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^x-\left(1-\frac{x^n}{n!}\right)e^x$$

$$=f_{n-1}(x)+\left(1-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^x+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^x-\left(1-\frac{x^n}{n!}\right)e^x$$

$$=f_{n-1}(x)+\frac{x^n}{n!}e^x$$

あとは $\begin{cases} f_{n-1}(x)>0 \\ \downarrow \\ f_n(x)\text{は単調増加} \\ f_n(0)=F_n(0)-1=0 \end{cases}$

551 $x>0$, n:自然数

$$e^{-x}\left\{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\}>\left(1-\frac{x^n}{n!}\right)e^x$$ を証明

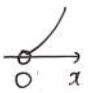
$$f(x)=e^{-x}\left\{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\}-\left(1-\frac{x^n}{n!}\right)$$ とおく

$$f'(x)=-e^{-x}\{\,//\,\}+e^{-x}\times\left\{1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right\}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$=-e^{-x}\times\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=(1-e^{-x})\times\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}>0$$

$f'(x)>0$より $f(x)$は単調増加 $f(0)=0$より

$x>0$で $f(x)>0$ ■



552 (1) $x>0$で $x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$ を証明

《考察》 背景は$\log(1+x)$のマクローリン展開

$f(x)=x-\log(1+x)$ とおく	$g(x)=\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$ とおく
$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$	$g'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}>0$
より $f(x)$は単調増加	より $g(x)$は単調増加
$f(0)=0$より	$g(0)=0$より
$x>0$で $f(x)>0$	$x>0$で $g(x)>0$

$\therefore$ $x>0$で $x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$ ■

(2) $n\geq 2$:自然数 $a_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\boxed{?}$ (1)を誘導として使う。 $x>0$

$$\log a_n=\log(\ )(\ )(\ )\times\cdots\times(\ )=\log(\ )+\log(\ )+\cdots\log(\ )$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

(1)より $$\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{k}{n^2}\right)^2<\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\frac{k}{n^2}$$

$k=1,2,\cdots,n-1$で たす

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right\}<\log a_n<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2}$$

3乗　$\to\frac{1}{2}n(n-1)$　$\to\frac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{1}{6}(n-1)\cdot n(2n-1)\quad (3\text{次})$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{2}n(n-1)$$ より $$\frac{\sum_{k=1}^{n-1}k}{n^2}\to\frac{1}{2}\ (n\to\infty)$$

極限をとって $\frac{1}{2}\leq\lim_{n\to\infty}\log a_n\leq\frac{1}{2}$

はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty}\log a_n=\frac{1}{2}$

(logは連続だから) $\log\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)=\frac{1}{2}=\log_e\sqrt{e}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{e}$

X講 積分(1) (積分定数Cは省略)

$\boxed{553}$ $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$, $\frac{1}{3}x^3-3\log|x|-\frac{2}{x}$

$-4\cos x-3\sin x$, $2e^x+\frac{3^x}{\log 3}$

$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}$

$\boxed{554}$ $\frac{1}{10}(2x-1)^5$, $-\frac{1}{4}\cos 4x$

$3e^{\frac{x}{3}+1}$, $\frac{2}{5}(\sqrt{x+1})^5-\frac{4}{3}(\sqrt{x+1})^3+2\sqrt{x+1}$

$\boxed{555}$ $(a,b)=(2,-1)$, $2\log|x-1|-\log|x+2|$

$\boxed{556}$ $\boxed{f^n \times f'}$ $\frac{1}{2}(x^3+2)^2$, $-\frac{1}{5}\cos^5 x$

チカン e^{x^2}, $\frac{1}{2}(\log x)^2$

BBB
部分分数分解

$\boxed{557}$ $\boxed{\frac{f'}{f}}$ $\log|x^3+1|$, $\log(e^x+e^{-x})$

$-\log|\cos x|$

$\boxed{558}$ (1) $\boxed{半角}$ $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$

(2) $\boxed{\cos 1コセパレート}$ $f^n \times f'$ $t=\sin x$

$\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x$

(3) $\boxed{\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}}$ BBB $t=\sin x$

$\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$

(4) $\boxed{積和}$ $\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{10}\cos 5x$

$\boxed{554}$ (4) $\int\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$ $t=\sqrt{x+1}$ でもよい

[$t=x+1$ でチカンしてもよい]

分母単項式化

⑤ $=\int\{(x+1)-1\}^2\times(x+1)^{-\frac{1}{2}}dx$

$=\int\{(x+1)^{\frac{3}{2}}-2\times(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{-\frac{1}{2}}\}dx$

$=\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+2(x+1)^{\frac{1}{2}}+C$

$=\frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$

$+2\sqrt{x+1}+C$