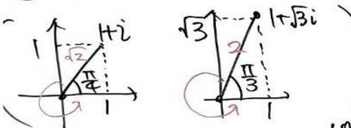
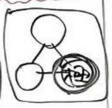
zemis2020-08-07（board）

12 $m,n$：正整数 紋川 済

$(1+i)^m=(1+\sqrt{3}i)^n$ かつ $m+n\leqq 100$





左辺 $=\{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\}^m$

$=\sqrt{2}^m\cdot(\cos\frac{m\pi}{4}+i\sin\frac{m\pi}{4})$

右辺 $=\{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\}^n$

$=2^n\cdot(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3})$

絶 $\frac{m}{2}=n$ （$k$：整数）

偏 $\frac{m\pi}{4}=\frac{n\pi}{3}+2k\pi$ 1周ズレ

$\frac{n\pi}{2}=\frac{n\pi}{3}+2k\pi$

$n=12k$

条件より $k=1,2,\cancel{3,4\cdots}$

$(m,n)=(24,12),(48,24)$ ×2 ×3

373 みなみ

$\alpha$：1の5乗根 （$\alpha\neq1$） 相反方程式

$\alpha^5=1$

$\alpha^5-1=0$

$(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\neq1$より $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ $\div\alpha^2$

(1) $\alpha^2+\alpha+1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}$ を求めよ

$=0$

$5x^4+31x^3+51x^2+31x+5=0$

《補足》 $\alpha^5=1$ 円分

$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく

$(r\geqq0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$

(左辺) $r^5(\cos5\theta+i\sin5\theta)$

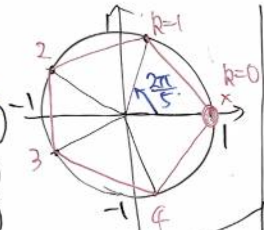
(右辺) $1(\cos0+i\sin0)$

$\therefore r^5=1$　　$r=1$

$5\theta=0+2k\pi$　　$\theta=\frac{2k\pi}{5}$

$(k=0,1,2,3,4)$

$\therefore\alpha=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$





(2) $\alpha^5=1$より

$|\alpha^5|=1$

$|\alpha|^5=1$

$\boxed{|\alpha|=1}$

$|\alpha|^2=\alpha\bar{\alpha}=1$

よって $\bar{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$ 相反

$t=\alpha+\bar{\alpha}=\alpha+\frac{1}{\alpha}$

(1)より $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=(\alpha+\frac{1}{\alpha})^2-2=t^2-2$

あわせて $(t^2-2)+t+1=0$

$\therefore t^2+t=1$

(3) $\cos\frac{2\pi}{5}$を求めよ （$\cos72^\circ$） （$k=1,2,3$）

(2)より $t=\alpha+\bar{\alpha}=2\cdot\mathrm{Re}(\alpha)=2\cdot\cos\frac{2k\pi}{5}$

また $t^2+t-1=0$より

$t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

ここで $\cos\frac{2\pi}{5}>0$より

$t=2\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

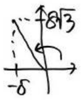
374 慎也 美奈代

$z^n=\alpha$型（円分方程式）

解は0中心，半径$\sqrt[n]{|\alpha|}$の円周を

$n$等分した点に対応

(3) $z^4=-8+8\sqrt{3}i$



$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$とおく

$(r\geqq0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ 偏

(左辺)：$r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)$

(右辺)：$16(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

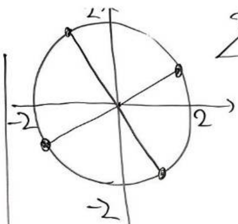
4周 $r^4=16$

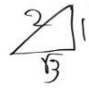
$4\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ （$k$：整数）

$r=2$

$\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$

$k=0,1,2,3$ 4周分





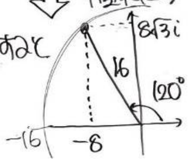
よって

$z=\sqrt{3}+i,\ -1+\sqrt{3}i,$

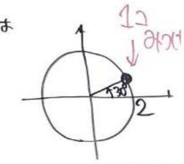
$-\sqrt{3}-i,\ 1-\sqrt{3}i$

⇓ 慣れたら

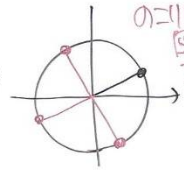
4乗すると



$\frac{\pi}{6}$なは 1つみつけ



のこりは図示できる



(2) $z^2 = -1-\sqrt{3}i$

2乗

元

$z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\sqrt{3}i)$

(3) $z^3 = 8i$

3乗

元

$z = \pm\sqrt{3}+i,\ -2i$

375 本田美奈子

$\begin{cases} z = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ w = \cos\beta + i\sin\beta \end{cases}$

$(0<\beta<\alpha<\pi)$

argument 議論

arg.

(1) $z+w$, $z-w$ の絶対値, 偏角

[解1] 図示.

$\arg(z+w) = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$|z+w| = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

[解2] 計算

$z+w = (\cos\alpha+\cos\beta) + i(\sin\alpha+\sin\beta)$

$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + i\times 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$= \boxed{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$0<\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$

$\therefore \begin{cases} |z+w| = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \arg(z+w) = \frac{\alpha+\beta}{2} \end{cases}$

(後半) $z-w$ に関して.

[解1]

$\arg(z-w) = \frac{\alpha+(\pi+\beta)}{2} = \frac{\pi+\alpha+\beta}{2}$

$|z-w| = 2\times\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right\} = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\frac{(\pi+\beta)-\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

375 本田美奈子

$\begin{cases} z = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ w = \cos\beta + i\sin\beta \end{cases}$

$(0<\beta<\alpha<\pi)$

argument 議論

arg.

(1) $z+w$, $z-w$ の絶対値, 偏角

[解1] 図示.

$\arg(z+w) = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$|z+w| = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

[解2] 計算

$z+w = (\cos\alpha+\cos\beta) + i(\sin\alpha+\sin\beta)$

$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + i\times 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$= \boxed{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$0<\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$

$\therefore \begin{cases} |z+w| = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \arg(z+w) = \frac{\alpha+\beta}{2} \end{cases}$

(2) $z^2 = -1-\sqrt{3}i$

2乗

元

$z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\sqrt{3}i)$

(3) $z^3 = 8i$

3乗

元

$z = \pm\sqrt{3}+i,\ -2i$

375 本田美奈子

$\begin{cases} z = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ w = \cos\beta + i\sin\beta \end{cases}$

$(0<\beta<\alpha<\pi)$

argument 議論

arg.

(1) $z+w$, $z-w$ の絶対値, 偏角

[解1] 図示.

$\arg(z+w) = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$|z+w| = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

[解2] 計算

$z+w = (\cos\alpha+\cos\beta) + i(\sin\alpha+\sin\beta)$

$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + i\times 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

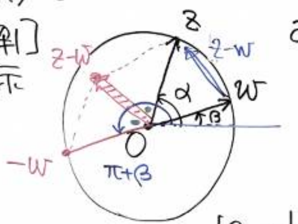
$= \boxed{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$0<\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$

$\therefore \begin{cases} |z+w| = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \arg(z+w) = \frac{\alpha+\beta}{2} \end{cases}$

(後半) $z-w$に関して

[解1] 図示



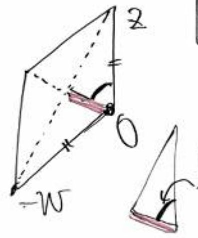

$\arg(z-w)$

$= \dfrac{\alpha+(\pi+\beta)}{2}$

$= \dfrac{\pi+\alpha+\beta}{2}$

$|z-w| = 2\times\cos\left\{\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\right\}$

$= 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ //




$\dfrac{(\pi+\beta)-\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

[解2] 計算 $\alpha = \dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, $\beta = \dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$z-w = (\cos\alpha-\cos\beta)+i(\sin\alpha-\sin\beta)$ 和積変換

$= -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} + i\times 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$= \boxed{+2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}\left(-\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}+i\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ $i^2$ 外

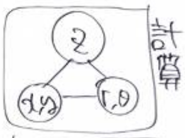
ここで$(\ ) = \boxed{i}\left(\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

$= \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

より、答を得る

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$




計算

十分 (図)

376
実部 cos
虚部 sin

---

LTC 2020-08-07

3文字2式 → 4文字3式

$\boxed{1}$ $a,b,c$ : 互いに異なる

$k = \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{c+a}{b} = \dfrac{a+b}{c}$ とおく

$$\begin{cases} b+c=ka \\ c+a=kb \\ a+b=kc \end{cases}$$

和 $2(a+b+c)=k(a+b+c)$

$\therefore k=2$ ― ~~(答)~~ 法 文字でわるには

$(a+b+c)(k-2)=0$

$a+b+c=0$ または $k=2$

(i) $a+b+c=0$ のとき

$k=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{-a}{a}=-1$

(ii) $k=2$ のとき

$$\begin{cases} b+c=2a \\ c+a=2b \\ a+b=2c \end{cases}$$

差 $b-a=2(a-b)$

$a=b$

これは不適

(i)(ii)より $k=-1$ //

式不足

① 特別なことが起こり うまく解ける

② 不適の解が出ることが多い

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$と同レベル

$\boxed{3}$ ややめんどう

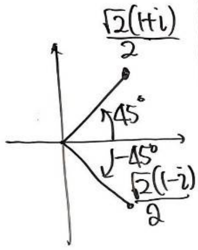
---

分野別 複素平面(1)

$\boxed{1}$ $z^6-\sqrt{2}z^3+1=0$

(1) 解の公式より

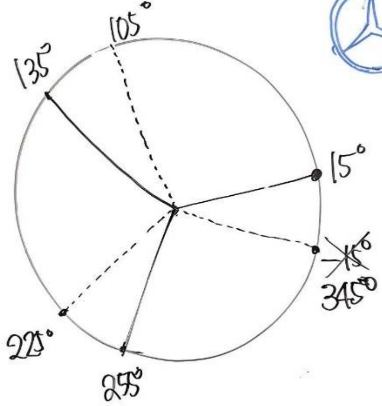
$z^3 = \dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$




(2) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく

$(r\geqq 0,\ 0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ としてよい$)$

$z^3=\cos(\pm 45^\circ)+i\sin(\pm 45^\circ)$ より




$r=1,\ \theta=15^\circ, 105^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 255^\circ, 345^\circ$ //