

8/26 私立1組

4920 391, 392

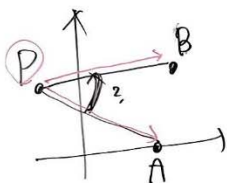
5420 A, B

複素 複素

LTC.

391 $A(6), B(7+7i), P(\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7})$

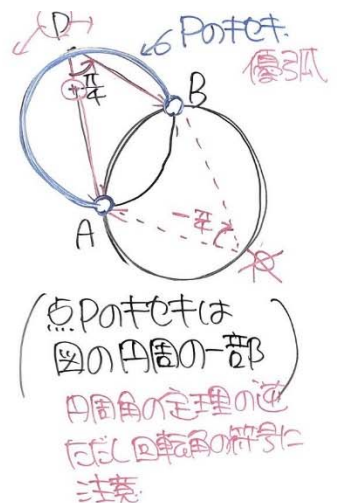
(1) $\angle APB$ の大きさ



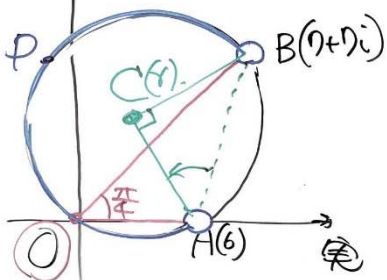
$\begin{pmatrix} \vec{PB} \leftrightarrow \beta - z \\ \vec{PA} \leftrightarrow \alpha - z \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \frac{\beta - z}{\alpha - z} &= \frac{7+7i - \frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}}{6 - \frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}} \\ &= \frac{(7+7i)\{(t-7)-ti\} - 14(t-3)}{6\{(t-7)-ti\} - 14(t-3)} \\ &= \frac{7}{2t} \times \frac{1+7i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{7}{2t} (1+i) \\ &= \frac{7\sqrt{2}}{2t} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &\vec{PB} \text{ は } \vec{PA} \text{ を } \frac{\pi}{4} \text{ 回転し} \\ &\frac{7\sqrt{2}}{2t} \text{ 倍 (拡大縮小)} \\ &\text{したものの} \\ &\angle APB = \frac{\pi}{4} \quad (1) \end{aligned}$$



(2) 図



$\angle ACB = 2 \times \angle AOB$

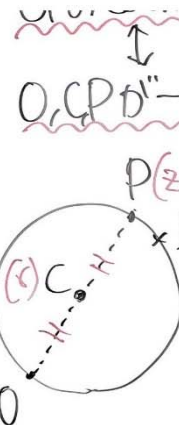


中心を (6) とおく

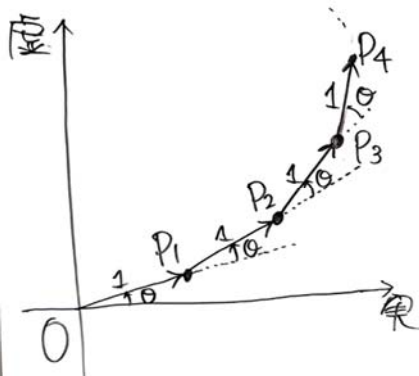
$\vec{AC}$ は $\vec{AB}$ を $\frac{\pi}{4}$ 回転
 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍縮小したものの

$$z - \alpha = (z - \alpha) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} z &= 6 + (1+7i) \times \frac{1}{2} (1+i) \\ &= 3 + 4i \end{aligned}$$



392 (1) $0 < \theta < 2\pi$. n : 自然数 $P_n(z_n)$



$$z_1 = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\vec{P_1 P_2} \text{ は } \vec{OP_1} \text{ を } \theta \text{ 回転したものである}$$

$$z_2 - z_1 = z_1 \times (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\therefore z_2 = z_1 + z_1^2$$

同様 = $P_{n+1}P_{n+2}$ は P_nP_{n+1} を θ 回転したものである

$$\frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{z_2 - z_1} = \frac{z_{n+1} - z_n}{z_2 - z_1} \times (\cos \theta + i \sin \theta) \leftarrow \text{等比}$$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_2 - z_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1} \times \frac{z_1^{n-1}}{z_1} \leftarrow \text{等比の和}$$

$$= z_1^{n+1}$$

よって $z_{n+1} = z_n + z_1^{n+1} \leftarrow \text{階差}$

$$n \geq 2 \quad z_n = z_1 + \sum_{k=1}^{n-1} z_1^{k+1} = \frac{z_1^2(1 - z_1^{n-1})}{1 - z_1}$$

$$z_n = z_1 + \frac{z_1^2 - z_1^{n+1}}{1 - z_1} = \frac{z_1 - z_1^2 + (z_1^2 - z_1^{n+1})}{1 - z_1}$$

$$= \frac{z_1 - z_1^{n+1}}{1 - z_1} = \frac{z_1^{n+1} - z_1}{z_1 - 1}$$

(2) P_6 が O 上にある $z_6 = 0$

(1) $z_6 = \frac{z_1^7 - z_1}{z_1 - 1} = 0$ かつ $z_1^7 = z_1$

$0 < \theta < 2\pi$ かつ $6\theta = 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi$

$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$z_1 \neq 0$ かつ $z_1^6 = 1$

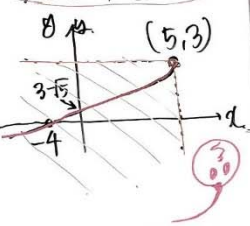
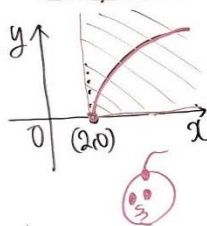
$\cos 6\theta + i \sin 6\theta = 1$

426 ルートを含むグラフ

- ① ルート内 ≥ 0 乙全義域
- ② ルート全体 ≥ 0 乙値域
- ③ 端点と接線が直交

(1) $y = \sqrt{2x-4}$ (2) $y = -\sqrt{5-x}+3$

$x \geq 2, y \geq 0$ $x \leq 5, y \leq 3$



429

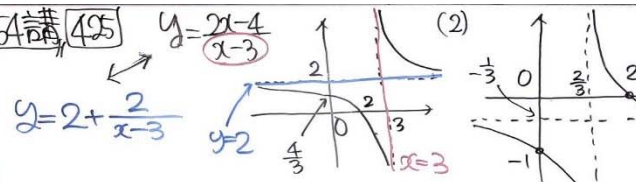
- (1) $x = -1, 3$
- (2) $-1 \leq x \leq 3, 4 < x$
- (3) $x = 6$
- (4) $\frac{3}{2} \leq x < 6$

$$y = \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty$

54講 425

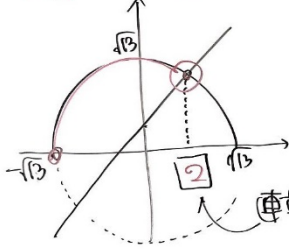


に有理関数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

- ① 分母 $\neq 0$ かつ 分母漸近線
- ② 計算 or $\lim_{x \rightarrow \infty} y$ かつ $\exists$ 漸近
- ③

LTC 8/26

(1) $\sqrt{13-x^2} > x+1$



$y = \sqrt{13-x^2}$
 $x^2+y^2=13$ の $y \geq 0$

15761
 $-\sqrt{13} \leq x < 2$

$13-x^2 = (x+1)^2$ 対し
 $x=2, -3$

[別解] 計算に付ては?

いまだ両辺を2乗

$11-x \geq 0$ 対し $-\sqrt{13} \leq x \leq \sqrt{13}$

(i) $x+1 \geq 0$ 対し $-1 < x \leq \sqrt{13}$ 対し

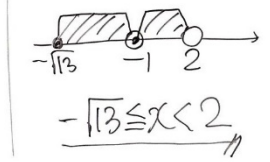
2乗 $13-x^2 > (x+1)^2$
 $2x^2+2x-12 < 0$
 $x^2+x-6 < 0$
 $(x+3)(x-2) < 0$
 $-3 < x < 2$
 $\therefore -1 < x < 2$

(ii) $x+1 < 0$ 対し

$-\sqrt{13} \leq x < -1$ のとき

$\sqrt{13-x^2} > x+1$
 常に成立 $-\sqrt{13} \leq x < -1$

(i) または (ii) 対し



LTC 8/26

(2) $\sqrt{x^2-x} \leq 3-x$

[解1] 15772 利用

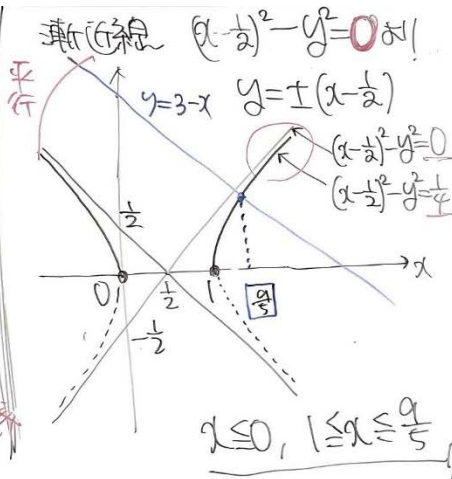
$y = \sqrt{x^2-x}$

$11-x \geq 0$ 対し $x \leq 0, x \geq 1$

2乗 $y^2 = x^2-x$ 双曲線

$(x-\frac{1}{2})^2 - y^2 = \frac{1}{4}$

対し $y \geq 0$



交点
 $\sqrt{x^2-x} = 3-x$ 対し
 $x^2-x = (3-x)^2$
 $5x-9=0$

[解2] 計算に付ては?

分母別

[3] $f_n(x) = x^{n+2} + x^n$ 対し x^2+x+1 を割る?

$f(x) = x^n(x^2+1) = (x^2+x+1) \cdot Q(x) + ax+b$

と表せる (a, b) 求む

$x^2+x+1=0$ の解 ω とおくと $\omega^3=1$
 $\omega^2+\omega+1=0$

$f(\omega) = \omega^n(\omega^2+1) = a\omega+b$

$-\omega^{n+1} = a\omega+b$

二乗して $\omega^{2n+2} = 1$

n を3で割った余りを場合分け

$n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき $-\omega^{n+1} = -\omega^1 = -\omega$

対し $a=-1, b=0$ 対しは $-x$

$n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき $-\omega^{n+1} = -\omega^2 = \omega+1$

対し $a=b=1$ 対しは $x+1$

$n \equiv 2 \pmod{3}$ のとき $-\omega^{n+1} = -1$

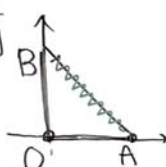
対し $a=0, b=-1$ 対しは -1

$f_{n+3}(x) - f_n(x)$
 $= (x^3-1) \cdot \dots$
 $= (x^2+x+1) \cdot \dots$

分型別 #

複素平面(2)

[2]



$O(0), A(1), B(i)$

$P(z): \triangle OAB$ の边上

$\Rightarrow Q(z)$ の求むべきを求め

x, y の式

(i) P が線分 OA 上のとき $z=t$ ($0 \leq t \leq 1$) と表せる

$z^2=t^2$ かつ Q も線分 OA 上

(ii) P が線分 OB 上のとき $z=ti$ ($0 \leq t \leq 1$) と表せる

$z^2=-t^2$ かつ $C(-1)$ かつ Q は線分 OC 上

$z \mapsto z^2$
極 AB 上

(iii) P が線分 AB 上のとき

$$\vec{OP} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$z = (1-t) + ti$$

$$z^2 = (1-t)^2 - t^2 + 2t(1-t)i$$

$$= (1-2t) + 2t(1-t)i$$

$$z^2 = x + yi \text{ とおく}$$

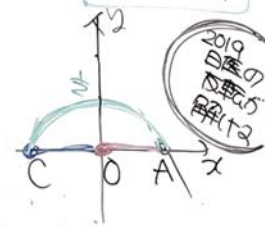
$$Q \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2t(1-t) \end{cases}$$

$\rightarrow t$ を消す

$$y = (1-x) \times \frac{x+1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(x-1)(x+1)$$

$$\text{ただし } -1 \leq x \leq 1$$



分型別

$z_1=1, z_2=1+i$

[4] $P_n(z_n)$ とおく $\vec{OP}_1 = (0), \vec{OP}_2 = (1)$

$$z_3 - z_2 = (1+i) \times (z_2 - z_1) = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

よって $\vec{P_2P_3}$ は $\vec{P_1P_2}$ を $\sqrt{2}$ 倍拡大 $\frac{\pi}{4}$ 回転したものである

$P_3(0,2)$

$$\vec{P_2P_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP_3} = \vec{OP_2} + \vec{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

(別解) $z_3 = z_2 + (1+i)(z_2 - z_1) = \dots = 2i$

(2) $z_{n+2} - z_{n+1} = (1+i)(z_{n+1} - z_n)$

$\vec{P_{n+1}P_{n+2}}$ は $\vec{P_nP_{n+1}}$ を $\sqrt{2}$ 倍拡大 $\frac{\pi}{4}$ 回転したものである

$$1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \dots \text{ 等比数列の和}$$

$$|5(1+\sqrt{2})|$$

