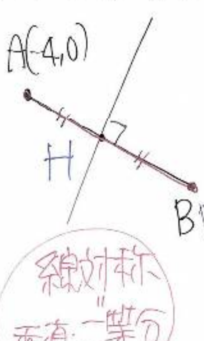
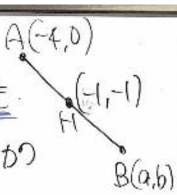
186 $A(-4,0)$ $\ell: y=3x+2$



線対称 垂直・二等分

[解1] $B(a,b)$ とおき

$\begin{cases} \text{ABの中点が } \ell \text{ 上 かつ} \\ AB \perp \ell \end{cases}$



[解2] 垂線の足Hをまず求める

直線AB: $y-0=-\frac{1}{3}(x+4)$

と ℓ を連立 $H(-1,-1)$

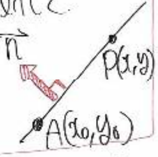
よって $B(2,-2)$

187 方針 傾き or 法線ベクトル

直線 $ax+by+c=0$ に対して

法線ベクトルを

$\vec{n}=(a,b)$ としてよい



説明 通る点 $A(x_0,y_0)$, 法線v. $\vec{n}=(a,b)$

とおくと $\boxed{\vec{n}\cdot\vec{AP}=0}$ より

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

$ax+by\underbrace{-(ax_0+by_0)}_{c}=0$

・直線 $y=mx+n$

・直線 $y-y_0=m(x-x_0)$

・$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{\text{通る点}}+t\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}}_{\text{方向v.}}$

・$\boxed{\vec{n}\cdot\vec{AP}=0}$

法線v. 通る点

$\begin{cases} \ell: (a+1)x+(a+2)y-4=0 \\ m: 6x+(2a-3)y-5=0 \end{cases}$

傾き $-\frac{a+1}{a+2}$ $a+2=0$ かも

法線ベクトルをそれぞれ

$\vec{\ell}=(a+1,a+2)$, $\vec{m}=(6,2a-3)$ としてよい

(1) $\vec{\ell}\parallel\vec{m}$ より

$(a+1):(a+2)=6:(2a-3)$

$(a+1)(2a-3)=(a+2)\times 6$

$2a^2-7a+15=0$

$a=-\frac{3}{2}, 5$

(2) $\vec{\ell}\perp\vec{m}$ より $\vec{\ell}\cdot\vec{m}=0$

$(a+1)\times 6+(a+2)(2a-3)=0$

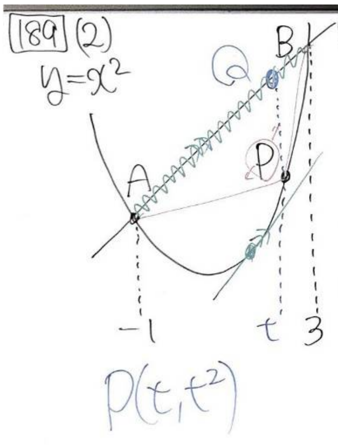
$2a^2+7a=0$

$\therefore a=0, -\frac{7}{2}$

---

189 (2)

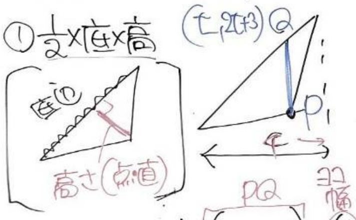
$y=x^2$ $y=2x+3$ $A(-1,1)$ $B(3,9)$



$P(t,t^2)$

△PABの面積のMax

① $\frac{1}{2}\times$底$\times$高



$\triangle PAB=\frac{1}{2}\times\underbrace{(2t+3-t^2)}_{PQ}\times \underbrace{4}_{\text{ヨコ幅}}$

$(3-t)+(t-(-1))$

② $\vec{AB}=(4,8)$

$\vec{AP}=(t+1,t^2-1)$

$\triangle PAB=\frac{1}{2}\left|4(t^2-1)-8(t+1)\right|$

$=2\left|(t-1)^2+4\right|$

$t=1$ のとき 最大値8

③ △PABがMax

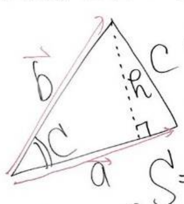
$\Leftrightarrow$ (Pでの接線) // AB

$y'=2x$ より

$2t=\frac{9-1}{3-(-1)}$

$t=1$

《補足》三角形の面積公式



① $S=\frac{1}{2}ah$

② $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 正弦

$S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2 C}$ より

③ $\boxed{S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}$

$\vec{a}=(a,b)$
$\vec{b}=(c,d)$ とおくと

ルート内: $(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2$

$=a^2d^2+b^2c^2-2abcd$

$=(ad-bc)^2$

④ $\boxed{S=\frac{1}{2}\|ad-bc\|}$ 平面外積

⑤ $S=\frac{abc}{4R}$ R外接円半径

⑥ Heronの公式 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

⑦ $S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$ 内接円半径

⑧ $S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ 外積

Heronの公式 の証明

② $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

⋮

因数分解しながら計算

190 点(1,-1)と 直線ℓ $(3+2k)x+(4-k)y+5-3k=0$ の 距離をdとする

$$d=\frac{|(3+2k)\times(1)+(4-k)\times(-1)+5-3k|}{\sqrt{(3+2k)^2+(4-k)^2}}$$

点・直

$$=\frac{4}{\sqrt{5k^2+4k+25}}=\frac{4}{\sqrt{5\left(k+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{121}{5}}}$$

$$\leqq\frac{4}{\frac{11}{\sqrt{5}}}=\frac{4\sqrt{5}}{11}\quad\left(k=-\frac{2}{5}\right)$$

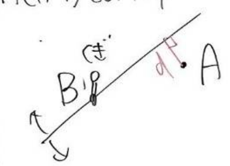
Max のとき

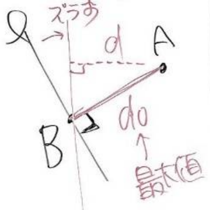
[別解] 図形的に解く…（記述がhard）

$(3x+4y+5)+k(2x-y-3)=0$

$\begin{cases}3x+4y+5=0\\2x-y-3=0\end{cases}$ より 定点 $B\left(\frac{7}{11},-\frac{19}{11}\right)$

A(1,-1)との距離

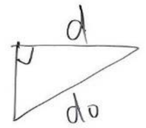




$\ell\perp AB$ のとき最大値

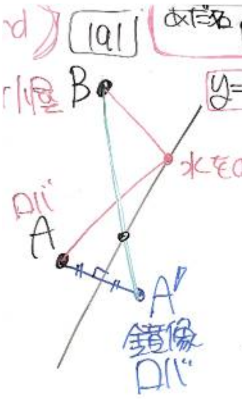
$$d_0=AB=\sqrt{\cdots}=\frac{4\sqrt{5}}{11}$$

なぜなら…
ズラすと



$d_0>d$

191 あいだる ロバの定理



$A'(3,1)$

$A'B:\ y=7x-20$

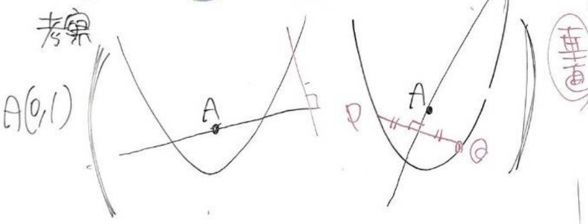
$P(4,8)$

最小値 $10\sqrt{2}$

192 存在条件の問題 → 未知数

存在を仮定して文字でおき
方程式を立てる
⟹ 解の存在条件に帰着

考察



$P(\alpha,\alpha^2),\ Q(\beta,\beta^2)$ とおく

線対称 ⟹ 垂直 & 二等分

二等分：PQの中点が $\ell: y=ax+1$ 上

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=a\times\frac{\alpha+\beta}{2}+1 \quad\text{——①}$$

垂直：PQ⊥ℓ より $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}\times a=-1$ —②

②より $(\alpha+\beta)a=-1$

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{a}$$

①つまり $\alpha^2+\beta^2=a(\alpha+\beta)+2$ に

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$　　　-1

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)$$

α,βはtの方程式 KKK

$$t^2+\frac{1}{a}t+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)=0$$

の異なる2実数解

判別式 $D=\frac{1}{a^2}-2\left(\frac{1}{a^2}-1\right)>0$

$a^2>\frac{1}{2}$ より $a>\frac{1}{\sqrt{2}},\ a<-\frac{1}{\sqrt{2}}$

チャレ(24)

$\begin{cases}\ell:\ ax+y-a=0\\m:\ x-ay+a(a+1)=0\\n:\ (a+1)x+y-a-1=0\end{cases}$

ムキ出しの定点

3交点を求め △の面積公式

$S=\frac{1}{2}|AD-BC|$ など

直線を見たとき定点が出るか

$\ell:\ a(x-1)+y=0$　A(1,0)

$m:\ x-a(y-(a+1))=0$　B(0,a+1)　定点じゃない

$n:\ a(x-1)+(x+y-1)=0$ より A(1,0)

ℓ,mの法線ベクトル $(a,1)$ と $(1,-a)$ は直交

$\therefore\ \ell\perp m$