zemis2020-08-12（board）

[384] $z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$

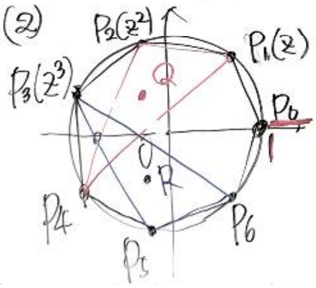
円分方程式 $z^7=1$

$\boxed{z^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1}$

$z^7-1=(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z\neq 1$ より $z+z^2+\cdots+z^6=-1$ (1)の答

(2)



Q(α): △$P_1P_2P_4$の重心

R(β): △$P_3P_5P_6$の重心

⇨ α, βを求める ($\beta=\bar{\alpha}$)

$\alpha=\frac{z+z^2+z^4}{3}$, $\beta=\frac{z^3+z^5+z^6}{3}$ 共役

($z^4=\overline{z^3}$, $z^5=\overline{z^2}$, $z^6=\overline{z}$ より)

より α と β は共役 ($\beta=\bar{\alpha}$)

$\alpha+\beta=\frac{1}{3}(z+z^2+z^4+z^3+z^5+z^6)=-\frac{1}{3}$

$\alpha\cdot\beta=\left(\frac{1}{3}\right)^2(z+z^2+z^4)\times(z^3+z^5+z^6)$ 和と積

$=\frac{1}{9}z\times z^3(1+z+z^3)(1+z^2+z^3)$

$1+z^2+z^3+z+z^3+z^4+z^3+z^5+z^6$

$=\frac{1}{9}z^4\times 2z^3=\frac{2}{9}$

α, β は t の方程式 (KKK)

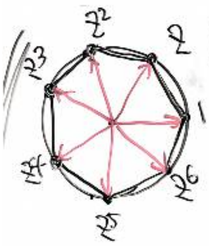
$t^2+\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}=0$ の2解

$9t^2+3t+2=0$

$t=\frac{-3\pm3\sqrt{7}i}{18}$

$=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{6}$

$\alpha=\frac{-1+\sqrt{7}i}{6}$, $\beta=\frac{-1-\sqrt{7}i}{6}$



(1)の補足

$1+z+z^2+\cdots+z^6=0$

↑

△ 重心

ベクトルの和

[384] $z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$

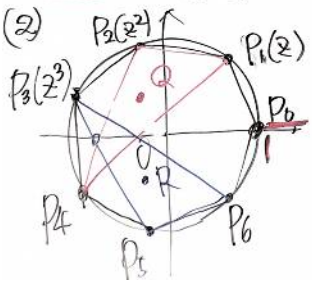
円分方程式 $z^7=1$

$\boxed{z^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1}$

$z^7-1=(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z\neq 1$ より $z+z^2+\cdots+z^6=-1$ (1)の答

(2)



Q(α): △$P_1P_2P_4$の重心

R(β): △$P_3P_5P_6$の重心

⇨ α, βを求める ($\beta=\bar{\alpha}$)

$\alpha=\frac{z+z^2+z^4}{3}$, $\beta=\frac{z^3+z^5+z^6}{3}$ 共役

($z^4=\overline{z^3}$, $z^5=\overline{z^2}$, $z^6=\overline{z}$ より)

より α と β は共役 ($\beta=\bar{\alpha}$)

$\alpha+\beta=\frac{1}{3}(z+z^2+z^4+z^3+z^5+z^6)=-\frac{1}{3}$

$\alpha\cdot\beta=\left(\frac{1}{3}\right)^2(z+z^2+z^4)\times(z^3+z^5+z^6)$ 和と積

$=\frac{1}{9}z\times z^3(1+z+z^3)(1+z^2+z^3)$

$1+z^2+z^3+z+z^3+z^4+z^3+z^5+z^6$

$=\frac{1}{9}z^4\times 2z^3=\frac{2}{9}$

α, β は t の方程式 (KKK)

$t^2+\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}=0$ の2解

$9t^2+3t+2=0$

$t=\frac{-3\pm3\sqrt{7}i}{18}$

$=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{6}$

$\alpha=\frac{-1+\sqrt{7}i}{6}$, $\beta=\frac{-1-\sqrt{7}i}{6}$

$\boxed{387}$ z：原点中心，半径2の円周上

$\therefore |z|=2$

$w=(1-i)z-2i$ のキセキ ⇨ z消去

wだけの式

$z=\dfrac{w+2i}{1-i}$

$\left|\dfrac{w+2i}{1-i}\right|=2$

$\dfrac{|w+2i|}{|1-i|}=2$

中心・半径

$|w-(-2i)|=2\sqrt{2}$

中心 $-2i$，半径 $2\sqrt{2}$ の円 //

49信講

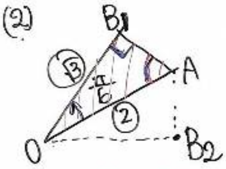
$\boxed{385}$ $3\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2=0$

α^2でわって $\frac{\beta}{\alpha}$ に関する2次方程式 ⇒ 解の公式

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

$\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ を $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍縮小，$\pm\frac{\pi}{6}$ 回転したもの

(2)



$\angle AOB=\dfrac{\pi}{6}$

$\angle OAB=\dfrac{\pi}{3}$

有名△出現

$\boxed{386}$ $A(z_1=1+i)$，$B(z_2=a-i)$，$C(z_3=(b+2)+bi)$

△ABCが正三角形 //

$\overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{AB}$ を $\pm\frac{\pi}{3}$ 回転

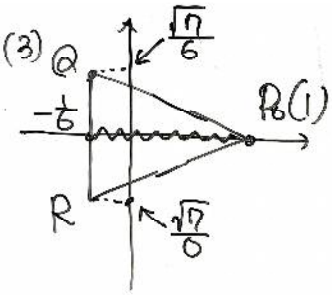
$z_3-z_1=(z_2-z_1)\times\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

$\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

実部虚部比較

$(a,b)=(3,\sqrt{3}),(3,-\sqrt{3})$ //

(3)



$\triangle P_0QR$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{6}\right)\times\dfrac{\sqrt{17}}{6}\times2$

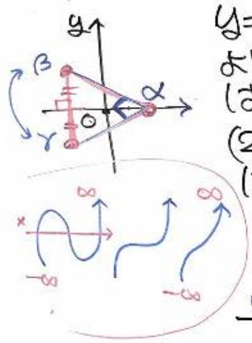
$=\dfrac{7\sqrt{17}}{36}$ //

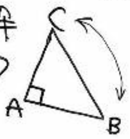
(3) k：$\boxed{実数}$ ← i なし

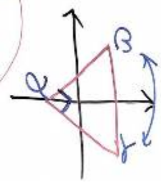
α,β,γ が $\underbrace{x^3+kx+20}_{f(x)}=0$ の3解

$y=x^3+kx+20$ のグラフより，少なくとも1つは実数解

(2)より，他の2つは共役複素数







計算　z　$x+yi$　r,θ

図形 //　方程式 → グラフ

$\boxed{388}$

$\begin{cases} \triangle OAB \Rightarrow \dfrac{\beta-0}{\alpha-0} \text{ など　中心O} \\ \triangle ABC \Rightarrow \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} \text{ など　回転の中心 } \alpha \end{cases}$

α,β,γ：異なる複素数

$2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma=0$

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\boxed{?}$

$\gamma^2-2\alpha\cdot\gamma+2\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=0$

$(\gamma-\alpha)^2+(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)=0$

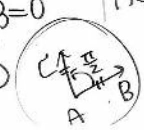
$(\gamma-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2=0$

$\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2+1=0$

$\therefore \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm i$ //

(2) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1\times\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$

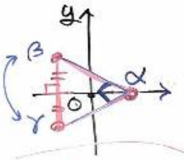
$\overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{AB}$ を $\pm\frac{\pi}{2}$ 回転



∠A 直角の直角二等辺三角形 //

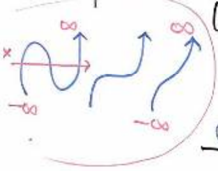
(3) k：実数 ← i なし $f(x)$

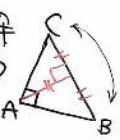
α, β, γ が $x^3+kx+20=0$ の3解

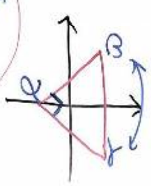


$y=x^3+kx+20$ のグラフより少なくとも1つは実数解

(2)より他の2つは共役複素数







計算　z　$x+yi$　r, θ

図形　方程式

グラフ

$$\begin{cases} \alpha = p \\ \beta = (p+q)+qi \\ \gamma = (p+q)-qi \end{cases}$$

と表せる (p, q：実数)

KKKより

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 3p+2q = 0 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma \\ \quad = 2p(p+q)+(p+q)^2+q^2 = k \\ \alpha\beta\gamma = p\{(p+q)^2+q^2\} = -20 \end{cases}$$

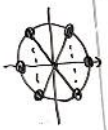
$p=-2,\ q=\pm 3$

$\alpha=-2,\ \beta=1\pm 3i,\ \gamma=1\mp 3i$

$k=6$

389　$z_1 = 1+\frac{\sqrt{3}}{3}i,\quad z_{n+1}=(1+\sqrt{3}i)z_n+1$　等比からズレ

(1)
$$z_{n+1} = (1+\sqrt{3}i)z_n + 1$$
$$-)\ \ \alpha = (1+\sqrt{3}i)\alpha + 1$$
特性方程式
$$\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}i} = +\frac{i}{\sqrt{3}}$$
$$z_{n+1}-\alpha = (1+\sqrt{3}i)(z_n-\alpha)$$
$$z_{n+1}-\frac{i}{\sqrt{3}} = (1+\sqrt{3}i)\left(z_n-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$
$$z_n-\frac{i}{\sqrt{3}} = \left(z_1-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\times(1+\sqrt{3}i)^{n-1}$$
$$\therefore\ z_n = (1+\sqrt{3}i)^{n-1}+\frac{\sqrt{3}i}{3}$$



(2) (1)より
$$z_n = \left\{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n-1}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$$
$$= 2^{n-1}\left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{3}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right\}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$$
$$\mathrm{Re}(z_n) = 2^{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{3}$$

ここで $\left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{3}\right\}$：①②　⑤⑥⑦　⑪⑫⑬ $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \cdots -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$

は周期6をもつことに着目

$\{2^{n-1}\}$：$2^{10} \geqq 1000$ より $n \geqq 11$ が必要

$\mathrm{Re}(z_{11}) = 2^{10}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -512$

$\mathrm{Re}(z_{12}) = 2^{11}\times\frac{1}{2} = 1024$

より求める n は 12

390　$w=\frac{z+i}{z-i}$

(1) w が実数となる z の条件

$\overline{w}=w$ より
$$\overline{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)} = \frac{z+i}{z-i}$$
$$\frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} = \frac{z+i}{z-i}$$
$$(z-i)(\bar{z}-i) = (z+i)(\bar{z}+i)$$
$$z+\bar{z}=0 \quad \text{——(答1)}$$

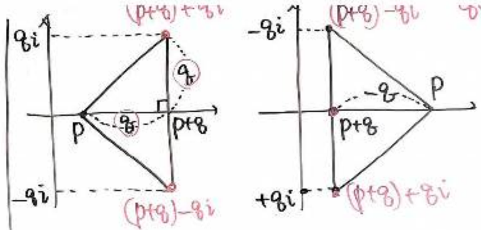
z は $\boxed{\text{純虚数またはゼロ}}$ ——(答2)

$\overline{z+i} = \bar{z}-i$　$\overline{z+2}=\bar{z}+2$

$\overline{z+\alpha} = \bar{z}+\bar{\alpha}$

$\bar{z}=z \Leftrightarrow z$ は実数

$\bar{z}=-z \Leftrightarrow z$ は純虚数または0



(2) 条件より $|z-(-i)|=1$　中心　半径

$w=\frac{z+i}{z-i}$ の条件 ⇒ z 消去

$(z-i)w = z+i$

$(w-1)z = i(w+1)$

$z = \frac{i(w+1)}{w-1}$

$$\left|\frac{i(w+1)}{w-1}+i\right|=1$$

$|\alpha+\beta| = \times$

$|\alpha\cdot\beta|=|\alpha||\beta|$

$$\left|\frac{\overbrace{i(w+1)+i(w-1)}^{2iw}}{w-1}\right|=1$$

アポロニウス

$$\frac{|2i|\,|w|}{|w-1|}=1$$

$$2|w|=|w-1|$$

$w=x+yi$

2乗

$$4w\overline{w}=(w-1)(\overline{w}-1)$$

$$3w\overline{w}-(w+\overline{w})-1=0$$

$$w\overline{w}-\frac{1}{3}(w+\overline{w})-\frac{1}{3}=0$$

$$\left(w-\frac{1}{3}\right)\left(\overline{w}-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$$

$$\left|w-\frac{1}{3}\right|^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\left|w-\frac{1}{3}\right|=\frac{2}{3}$$

中心 $\frac{1}{3}$, 半径 $\frac{2}{3}$ の円 //