zemis2020-09-15（board）

$\boxed{504}$ 「条件」＝必要十分条件

多項式 $f(x)$ において

$f(x)$ が $(x-a)^2$ で割り切れる $\Leftrightarrow f(a)=f'(a)=0$

$(\Rightarrow)$ $f(x)=(x-a)^2\cdot Q(x)$ と表せるとき

$f'(x)=2(x-a)\cdot Q(x)+(x-a)^2\cdot Q'(x)$ より

$f(a)=f'(a)=0$

$(\Leftarrow)$ $f(x)=(x-a)^2\cdot Q(x)+px+q$ とおくと

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2\cdot Q'(x)+p$

$\begin{cases} f(a)=pa+q=0 \\ f'(a)=p=0 \end{cases}$ より $p=q=0$

$f(x)$ は $(x-a)^2$ で割り切れる

$\boxed{チャレ(63)}$ 答 (1) -3 (2) 4

$f(x)$：可ビブン

$f(-x)=f(x)+2x$ ―― ※

$f'(1)=1,\ f(1)=0$

(1) $f'(-1)=\boxed{?}$

※を微分（注 合ビ）

$f'(-x)\times(-1)=f'(x)+2$

$\therefore -f'(-x)=f'(x)+2$

$x=1$ イれ

$-f'(-1)=f'(1)+2=3$

$\therefore f'(-1)=-3$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)+f(-x)-2}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{f(x)+\{f(x)+2x\}-2}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{2f(x)+2(x-1)}{x-1}$ 　$f(1)=1$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\left\{2\times\boxed{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}+2\right\}=$

64講 (1) (2) (3)

$\boxed{505}$ $-3\sin(3x+1)$, $\dfrac{1}{1-\sin x}$, $2\tan x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$

$=2\tan x(1+\tan^2 x)$

$\boxed{(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x}$

$\boxed{506}$ $(1+2x)e^{2x}$, $-e^{-x}(\sin x+\cos x)$

$\dfrac{1}{\tan x}$, ※ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

注 $\boxed{\left\{\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right\}'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}}$

$\boxed{507}$ 対数微分法

$2^x\cdot\log 2$

$x^x(\log x+1)$

$(\sin x)^x\left\{\log(\sin x)+\dfrac{x\cdot\cos x}{\sin x}\right\}$

DIY.

(左辺) $\dfrac{d}{dx}\log y$

$=\dfrac{d}{dy}(\log y)\times\dfrac{dy}{dx}$

$=\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

(2) $y=x^x$ $(x>0)$

$\log_e y=\log_e x^x$

$\log y=x\cdot\log x$

両辺を x で微分

$\dfrac{y'}{y}=1\times\log x+x\times\dfrac{1}{x}$

$y'=y(\log x+1)$

$=x^x(\log x+1)$

$\boxed{508}$ $\begin{cases} x=\cos\theta(1+\cos\theta) \\ y=\sin\theta(1+\cos\theta) \end{cases}$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$

$=\dfrac{\cos\theta+\cos2\theta}{-\sin\theta-\sin2\theta}$

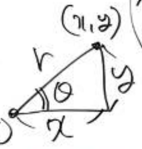
$=-\dfrac{\cos\theta+\cos2\theta}{\sin\theta+\sin2\theta}$

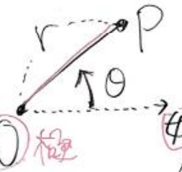
《補足》 $r=1+\cos\theta$ とおくと

$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

$x^2+y^2=r^2$

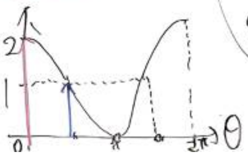
極座標 (r,θ) $\leftrightarrow$ 直交座標 (x,y)





OP：動径

$r=1+\cos\theta$



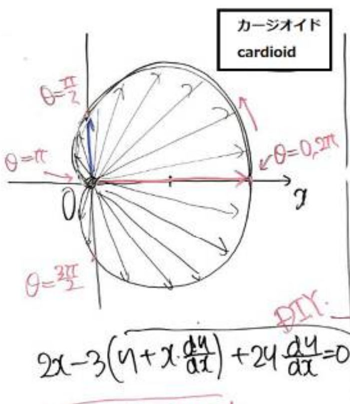
418 (2)

$r=2\sin\theta$

$r^2=2r\cdot\sin\theta$

$x^2+y^2=2y$

$x^2+(y-1)^2=1$



DIY.

$2x-3\left(y+x\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

陰関数の微分

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{1+\tan^2 y}=\dfrac{1}{1+x^2}$

逆関数の微分公式

(2) $x^2-3xy+y^2=1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(x^2)=2x$ 　 $\dfrac{d}{dx}(y^2)=2y$

$\dfrac{d}{dx}(y^2)=\dfrac{d}{dy}(y^2)\times\dfrac{dy}{dx}=2y\dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(x\times y)=1\times y+x\times\dfrac{dy}{dx}$ 積のビ

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-3y}{3x-2y}$

510 $f(x)=x^2\cdot e^x$ の第n次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ という問として解く。

具体化 $f^{(1)}(x)=2x\cdot e^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$

$f^{(2)}(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x)e^x=(x^2+4x+2)e^x$

$f^{(3)}(x)=(2x+4)e^x+(x^2+4x+2)e^x=(x^2+6x+6)e^{x}$

$\vdots$

$f^{(4)}(x)=(x^2+8x+12)\cdot e^x$

推測 $f^{(n)}(x)=\left(x^2+\boxed{2n}x+\underbrace{n^2-n}_{n(n-1)}\right)e^x$

↓

帰納法へ

推測が難しい時のためにも……

$f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$ と表せることを数学的帰納法で示す。(一般化した式)

型を推測

(i) $n=1$ のとき

$a_1=2,\ b_1=0$ とおくと成立

(ii) $n=k$ のとき成り立つとする つまり

$f^{(k)}(x)=(x^2+a_kx+b_k)\cdot e^x$ とおく

$f^{(k+1)}(x)=(2x+a_k)e^x+(x^2+a_kx+b_k)e^x$

$=\{x^2+(a_k+2)x+(a_k+b_k)\}e^x$

$\begin{cases} a_{k+1}=a_k+2 & \leftarrow 等差型 \\ b_{k+1}=b_k+a_k & \leftarrow 階差型 \end{cases}$

とおくと $n=k+1$ のときも成立

つまり $f^{(k+1)}(x)=(x^2+a_{k+1}x+b_{k+1})e^x$

(i)(ii)より、全ての自然数 n で成

$\begin{cases} a_n=2n \\ b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k \quad (n\geq 2) \end{cases}$

$=n(n-1)$

($n=1$ のときも成り立つ)

---

511 (1) $\begin{cases} x=1-\cos\theta \\ y=\theta-\sin\theta \end{cases}$ これサイクロイド ← cycloid

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{d}{dx}\right)^2y=\cancel{\dfrac{\frac{d^2y}{d\theta^2}}{\frac{d^2x}{d\theta^2}}}$

d□は2回ビブンでは分数扱いできない

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ ← θの関数をxでビ

$=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\times\dfrac{d\theta}{dx}$

θの関数はθでビ　調節

ここで $\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{1}{\sin\theta}$

$\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$=\dfrac{\sin\theta\times\sin\theta-(1-\cos\theta)\times\cos\theta}{(\sin\theta)^2}$　$s^2+c^2=1$

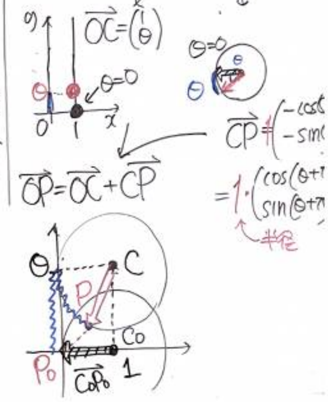
$\left(\dfrac{③}{㋺}\right)'=\dfrac{③'㋺-③㋺'}{㋺^2}$ 商のビ

$=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}$

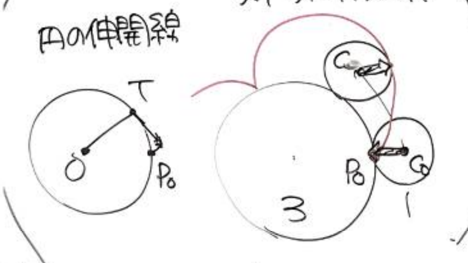
$=\dfrac{1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta}$ //

《補足》 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \triangle\cos\circledcirc \\ \triangle\sin\circledcirc \end{pmatrix}$



円の伸開線　3:1 外サイクロイド



2) $\left(\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9x}{4y}\ より\right)$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{81}{4y^3}$ //

$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}=\boxed{?}$ yの式

D.I.Y.

xで微分

$\dfrac{2x}{4}-\dfrac{1}{9}\times\boxed{2y\times\dfrac{dy}{dx}}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9x}{4y}$

よって $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{9x}{4y}\right)$ 商ビ

$=\dfrac{9}{4}\times\left(\dfrac{1\times y-x\times\frac{dy}{dx}}{y^2}\right)$

$=\dfrac{9}{4}\times\dfrac{y-x\times\frac{9x}{4y}}{y^2}$

$=\dfrac{9}{4^2}\times\dfrac{4y^2-9\boxed{x^2}}{y^3}$

$9x^2-4y^2=36$ 元の曲線

$=\dfrac{9}{16}\times\dfrac{-36}{y^3}$

$=-\dfrac{81}{4y^3}$ //

$\boxed{512}$ $y=f(x)$: 2回微分可能

$\boxed{f''(x)} = -2f'(x) - 2f(x)$ —㊀

(1) $F(x)=e^{x}\cdot f(x)$ とおくとき

$F''(x) = -F(x)$ を示す。 単振動型!

ビ $F'(x)=e^{x}\cdot f(x) + e^{x}\cdot f'(x)$

ビ $F''(x)=e^{x} f(x)+e^{x}\cdot f'(x)$

$+ e^{x}\cdot f'(x) + e^{x} f''(x)$

$= e^{x} \{f(x)+2f'(x)+\boxed{f''(x)}\}$

$= e^{x} \{-f(x)\} = -F(x)$ ∎

(2) $\boxed{F''(x)=-F(x)}$ をみたす $F(x)$

つまり (1)の $F(x)=e^{x}\cdot f(x)$ に対して

$\{F'(x)\}^2+\{F(x)\}^2$ が定数である

ことを示す ⇨ ビブンしてゼロ

$G(x)=\{F'(x)\}^2+\{F(x)\}^2$ とおくと

$G'(x)=2F'(x)F''(x)$

$+2F(x)\cdot F'(x)$

$=2F'(x)\times\{\underbrace{F''(x)+F(x)}_{0}\}$

$=0$ より $G(x)$ は定数

↓

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \boxed{?}$