$\boxed{1}$ $f(x)$ は 0 でない x の整式で，次の等式を満たしているものとする。

$$(x-1)f''(x)+(2x-3)f'(x)-8f(x)=0, \qquad f(2)=8$$

(1) $f(x)$ の次数を求めよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{解答}}$ (1)　4　　(2)　$f(x)=x^4-3x^2+2x$

$\boxed{1}$ (1)　$f(x)$ を定数関数とすると，第 2 式から　　$f(x)=8$

これは第 1 式を満たさないから適さない。

$f(x)$ の次数を n $(n \geqq 1)$ として，$f(x)$ の最高次の項を ax^n $(a \fallingdotseq 0)$ とおく。

$(x-1)f''(x)+(2x-3)f'(x)-8f(x)$ の x^n の項は

$$2x \cdot anx^{n-1}-8ax^n=(2n-8)ax^n$$

$(x-1)f''(x)+(2x-3)f'(x)-8f(x)=0$ は x についての恒等式であるから，x^n の係数において

$$(2n-8)a=0$$

が成り立つ。

$a \fallingdotseq 0$ より　　$2n-8=0$

よって　　$n=4$

したがって，$f(x)$ の次数は　4

(2)　(1) の結果から

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \ (a \fallingdotseq 0)$$

とおける。

よって　　$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

　　　　　$f''(x)=12ax^2+6bx+2c$

これらを $(x-1)f''(x)+(2x-3)f'(x)-8f(x)=0$ に代入して整理すると

$$-2bx^3+(-12a-3b-4c)x^2+(-6b-4c-6d)x+(-2c-3d-8e)=0$$

これが x についての恒等式であるから

$$-2b=0$$

$$-12a-3b-4c=0$$

$$-6b-4c-6d=0$$

$$-2c-3d-8e=0$$

これを解くと

$$b=0,\ c=-3a,\ d=2a,\ e=0$$

よって　　$f(x)=a(x^4-3x^2+2x)$

ここで，$f(2)=8$ より　　$8a=8$

すなわち　　$a=1$　　　これは，$a \fallingdotseq 0$ を満たす。

したがって　　$f(x)=x^4-3x^2+2x$