zemis2020-08-05（board）

366 $|z|=1$ より $|z|^2 = z\cdot\bar{z} = 1$

(1) $z+\frac{1}{z}$ が実数であることを示す

[解1] $\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$ ← $\left(\bar{z} = \frac{1}{z}\right)$

$= \frac{1}{z} + z$ より成立

(x, y : 実数)

[解2] $z = x+yi$ とおくと $|z|^2 = x^2+y^2 = 1$

$z+\frac{1}{z} = x+yi + \frac{1}{x+yi} \times \frac{x-yi}{x-yi}$

$= x+yi + \frac{x-yi}{\underbrace{x^2+y^2}_{=1}} = 2x$ ■

[解3] $z = 1\times(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと

$z+\frac{1}{z} = \cos\theta + i\sin\theta + \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} \times \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$

$= \cos\theta + i\sin\theta + \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1}}$

$= 2\cos\theta$ ■

[解1'] $\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \frac{\left(z+\frac{1}{z}\right) - \overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}}{2i}$

$= \cdots\cdots = 0$ ■

(2) $z+\frac{1}{z}$ の値の範囲

[解2] $x^2+y^2=1$ より $-1 \le x \le 1$

$\therefore -2 \le z+\frac{1}{z} \le 2$

[解3] $-1 \le \cos\theta \le 1$ より

$-2 \le z+\frac{1}{z} \le 2$

(3) $t = z+\frac{1}{z}$ とおくと $-2 \le t \le 2$

これをもとに

$(与式) = (t^3-3t) + 2(t^2-2)$　$+3t$

の Max, min を求める

(3次関数 ⇒ ビブン)

答 Max 12 $(t=2)$

min -4 $(t=-2, 0)$

367 $f(x) = (x^2+x+2)^{99}$

$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{198}x^{198}$

$x^2+x+1=0$ の虚数解の1つを ω とする

$\omega = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

文字設定
↓
条件式

$\begin{cases} \omega^2+\omega+1=0 \\ \boxed{\omega^3=1} \end{cases}$ ← $\omega^3 = \omega^2\cdot\omega$ ← $\omega^2 = -\omega-1$

$= -\omega^2-\omega = 1$　または

$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

(または) $\omega = \cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)$ より $\omega^3=1$

(1) $f(\omega) = (\omega^2+\omega+2)^{99}$ ← $\omega^2+\omega+1=0$

$= 1^{99} = 1$

(2) $S = \sum_{k=0}^{66} a_{3k} = a_0+a_3+a_6+\cdots+a_{195}+a_{198}$ を求める

係数を3(2)つおきに拾ってたしたもの

$\begin{cases} T = a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{196} \\ U = a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{197} \end{cases}$ とおく

$x=1$ を $f(x)$ に代入　係数全て

$f(1) = 4^{99} = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{198} = S+T+U$　　$S+T\omega+U\omega^2$

《考察》

$f(\omega) = 1 = a_0 + a_1\boxed{\omega} + a_2\boxed{\omega^2} + a_3 + a_4\boxed{\omega} + a_5\boxed{\omega^2} + a_6 + \cdots + a_{196}\boxed{\omega} + a_{197}\boxed{\omega^2} + a_{198}$

$= \underbrace{(a_0+a_3+\cdots+a_{198})}_{S} + \underbrace{(a_1+a_4+\cdots+a_{196})}_{T}\boxed{\omega} + \underbrace{(a_2+a_5+\cdots+a_{197})}_{U}\boxed{\omega^2}$

整理する

$f(1) = 4^{99} = S+T+U$ ――― ①

$f(\omega) = 1 = S+T\omega+U(-\omega-1)$

$1+0\omega$　$= (S-U)+(T-U)\omega$

S, T, U は実数だから

$\begin{cases} S-U=1 & ――― ② \\ T-U=0 & ――― ③ \end{cases}$

①,②,③より $T=U$, $S+2U=4^{99}$

$S+2(S-1) = 4^{99}$　$\therefore S = \frac{1}{3}(4^{99}+2)$

(1) $f(\omega) = (\omega^2+\omega+2)^{99}$ ← $\omega^2+\omega+1=0$

$= 1^{99} = 1$

(2) $S = \sum_{k=0}^{66} a_{3k} = a_0+a_3+a_6+\cdots+a_{195}+a_{198}$ を求める

係数を3(2)つおきに拾ってたしたもの

$\begin{cases} T = a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{196} \\ U = a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{197} \end{cases}$ とおく

$x=1$ を $f(x)$ に代入　係数全て

$f(1) = 4^{99} = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{198} = S+T+U$　　$S+T\omega+U\omega^2$

《考察》

$f(\omega) = 1 = a_0 + a_1\boxed{\omega} + a_2\boxed{\omega^2} + a_3 + a_4\boxed{\omega} + a_5\boxed{\omega^2} + a_6 + \cdots + a_{196}\boxed{\omega} + a_{197}\boxed{\omega^2} + a_{198}$

$= \underbrace{(a_0+a_3+\cdots+a_{198})}_{S} + \underbrace{(a_1+a_4+\cdots+a_{196})}_{T}\boxed{\omega} + \underbrace{(a_2+a_5+\cdots+a_{197})}_{U}\boxed{\omega^2}$

$-\omega-1$

$1-\alpha+\alpha=\alpha(1-\alpha)$

$\alpha^2-\alpha+1=0$

$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\beta=\frac{1}{1-\overline{\alpha}}=\overline{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}=\overline{\left(\frac{1}{-\alpha^2}\right)}$

$=\overline{\alpha}=\frac{1\mp\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha^3-\alpha^2+\alpha=0$

$\alpha^3=\alpha^2-\alpha=-1$

$\boxed{\alpha^3=-1}$

直接代入してもよい

$(\alpha,\beta)=\left(\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1\mp\sqrt{3}i}{2}\right)$ 複号同順

$\boxed{368}$ $\begin{cases}\alpha+\beta=\alpha\beta & ①\\ |\alpha|=|\beta|=1 & ②\end{cases}$ (α,β:複素数)

(α,β)の組を全て求める

《考察》複素数は実数2つ分

$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di$ とおき

代入してもよいが…

4文字 3式 ⇒ 式不足

複素数のまま計算(共役,絶対値の活用)

$\alpha, \overline{\alpha}, \beta, \overline{\beta}$ 4文字の式とみなす

消去

②より $\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=1$

①×$\overline{\alpha}$ $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}\beta$

$1+\overline{\alpha}\beta=\beta$ —③

①×$\overline{\beta}$ $\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\alpha\beta\overline{\beta}$

$1+\alpha\overline{\beta}=\alpha$ —④

③より $\beta=\frac{1}{1-\overline{\alpha}}$ これを④に代入

$1+\alpha\times\frac{1}{1-\overline{\alpha}}=\alpha$

$\overline{\beta}$消去 ↓ $\overline{\alpha}$も消去

$\boxed{チャレ(46)}$ z:複素数

$\begin{cases}(a)\ 2z,\ \frac{2}{z}\ の実部が整数\\ (b)\ |z|\geq 1\end{cases}$

$z=x+yi$ (x,y:実数) とおく

$\begin{cases}2z=2x+2yi\\ \frac{2}{z}=\frac{2}{x+yi}\times\frac{x-yi}{x-yi}=\frac{2(x-yi)}{x^2+y^2}\end{cases}$

∴(a)より $2x,\ \frac{2x}{x^2+y^2}$ は整数 —①

(b)より $x^2+y^2\geq 1$ —②

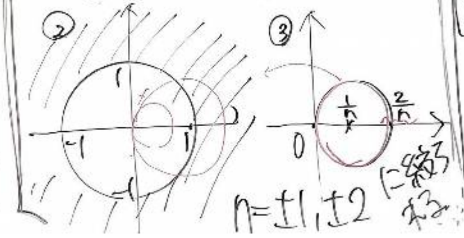
《考察》 (n:整数)

$\frac{2x}{x^2+y^2}=n$ とおく

$n\neq 0$ に限る

$x^2+y^2-\frac{2}{n}x=0$

$\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{n}\right)^2$ —③



$n=\pm1,\pm2$ に絞れる

$\frac{2x}{x^2+y^2}=n$ (n:整数) とおく.

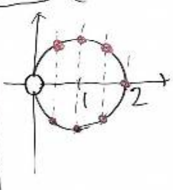
(i) $n=0$のとき $x=0$ $y^2\geq1$より $y\leq-1,\ y\geq1$

(ii) $n\neq0$のとき $\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{n}\right)^2$ —③

②,③が共有点をもつから $n=\pm1,\pm2$ が

$\boxed{n=1}$ $(x-1)^2+y^2=1$, $2x$が整数

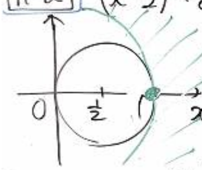
$2x=1,2,3,4$



$(x,y)=\left(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right),(1,\pm$

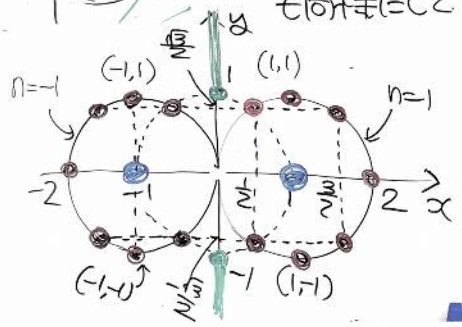
$=\left(\frac{3}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right),(2,0)$

$\boxed{n=2}$ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$



②より $(1,0)$のみ

$\boxed{n=-1}$, $\boxed{-2}$ のときも同様にして



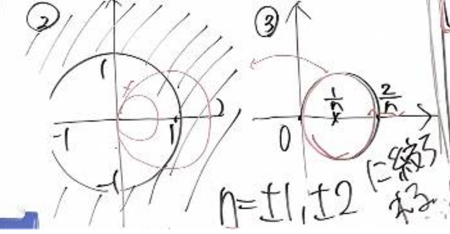
《考察》 (n:整数)

$\frac{2x}{x^2+y^2}=n$ とおく

$n\neq 0$ に限る

$x^2+y^2-\frac{2}{n}x=0$

$\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{n}\right)^2$ —③



$n=\pm1,\pm2$ に絞れる

$\frac{2x}{x^2+y^2}=n$ (n:整数) とおく.

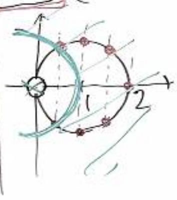
(i) $n=0$のとき $x=0$ $y^2\geq1$より $y\leq-1,\ y\geq1$

(ii) $n\neq0$のとき $\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{n}\right)^2$ —③

②,③が共有点をもつから $n=\pm1,\pm2$ が

$\boxed{n=1}$ $(x-1)^2+y^2=1$, $2x$が整数

$2x=1,2,3,4$



$(x,y)=\left(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right),(1,\pm$

$=\left(\frac{3}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right),(2,0)$

47講 極形式. ド・モアブルの定理

$\boxed{369}$ (1) 略 (加法定理による) 積

(2) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (3) 256

$\boxed{370}$ (1) $z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ より

$z^4=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1+\sqrt{3}i}{8}$

(2) z^n が正の実数となる最小の n は

$n=24$. このとき $z^{24}=\frac{1}{4096}$

気づかなければ

$\boxed{371}$ $z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i \Rightarrow \sum_{n=1}^{23} z^n=\boxed{?}$

[解1] $\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ より 2019 昭和

$z=\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ$ より $\boxed{z^{24}=1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{23} z^n=\frac{z\times(1-z^{23})}{1-z}=\frac{z-z^{24}}{1-z}=-1$

等比の和

[解2] 具体化 $z^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\left((\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i\right)^2$

$=\frac{1}{8}(4\sqrt{3}+4i)=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

$=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$

$z^{24}=1$

Rehab 積分一問一答①

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x+3}dx=\left[\log|\cos x+\sin x+3|\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ ビ $\boxed{\int f'/f=\log|f|}$

$=\log 4-\log 2=\log 2$

(2) ⑤ $=\int \log(1+x)\times\frac{1}{1+x}dx=\boxed{\frac{\{\log(1+x)\}^2}{2}+C}$ ビ

(3) $\boxed{\frac{2次}{2次}}\Rightarrow$ わりざん $\frac{x^2}{x^2-x-2}=1+\frac{x+2}{(x-2)(x+1)}=1+\frac{\frac{4}{3}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}$

あとは部分分数分解 答 $1-\frac{5}{3}\log 2$

(4) $\int_0^{\pi}\sin x\cdot\cos 2x\,dx$ 別解あり

$=\int_0^{\pi}\sin x\times(2\cos^2 x-1)dx \leftarrow t=\cos x$

$=\int_{-1}^{1}(2t^2-1)dt=-\frac{2}{3}$ $\boxed{\int f^n\times f'=\frac{f^{n+1}}{n+1}}$

(5) $\int\frac{\sin 2x}{3\cos^2 x}dx$ 別解あり

$=\frac{2}{3}\int\tan x\,dx=\boxed{-\frac{2}{3}\log|\cos x|+C}$

(6) 半角公式 $\frac{\pi}{2}$

(7) $\int_1^2\log x\times\frac{1}{x}dx=\left[\frac{(\log x)^2}{2}\right]_1^2=\boxed{\frac{(\log 2)^2}{2}}$

(8) $\frac{1}{x^2(2x+1)}=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$ とおく $\frac{bx+c}{x^2}$

恒等式 $1=ax^2+bx(2x+1)+c(2x+1)$

$c=1,\ a=4,\ b=\boxed{-2}$

⑤ $=4\times\frac{\log|2x+1|}{2}-2\times\log|x|-\frac{1}{x}+C=2\cdot\log\left|\frac{2x+1}{x}\right|-\frac{1}{x}+C$

$\frac{x+2}{(x-2)(x+1)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+1}$ とおく

恒等式 $x+2=a(x+1)+b(x-2)$ $\begin{cases}a=\frac{4}{3}\\ b=-\frac{1}{3}\end{cases}$

係数比較 or 数値代入

$\therefore$ (与式) $=\int_0^1\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)\right\}dx$

$=\left[x+\frac{4}{3}\log|x-2|-\frac{1}{3}\log|x+1|\right]_0^1$

$=1-\frac{4}{3}\log 2-\frac{1}{3}\log 2=1-\frac{5}{3}\log 2$

Rehab 積分一問一答①

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cdot\cos x\,dx=\left[\frac{(\sin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$

$t=\sin x$ と置かんしてもよい $\int f^{\frac{1}{2}}\times f'=\frac{f^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$

(10) $(\sin x-\cos x)^4=\{(\sin x-\cos x)^2\}^2$ $\frac{1-\cos 2x}{2}$

$=(1-2\sin x\cdot\cos x)^2=1-2\sin 2x+\sin^2 2x$

$=\frac{3}{2}-2\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$ 次数下げ

(5)も実は f'/f $s^2+c^2=1$

(11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{6\sin x\cdot\cos x}{7\sin^2 x+5\cos^2 x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{6\sin x\cdot\cos x}{2\sin^2 x+5}dx$

$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin x\cdot\cos x}{2\sin^2 x+5}dx$

$=\frac{3}{2}\left[\log|2\sin^2 x+5|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{3}{2}\log\frac{7}{5}$ $\boxed{\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin 2x}{6-\cos 2x}dx$

$=-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-2\sin 2x}{6-\cos 2x}dx$

(12) $\int\tan\frac{1-x}{2}dx$ $\int\frac{f'}{f}=\log|f|$

注 $\boxed{\int\tan x\,dx=-\log|\cos x|+C}$

$\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{-\sin x}{\cos x}$ ビ