zemis2020-09-08（board）

$\boxed{471}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}\cdot\cos\frac{2}{3}n\pi=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7^k}\cos\frac{2}{3}k\pi$

$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7^k}\cdot\boxed{\cos\frac{2k\pi}{3}}$ とおく

$-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1$ のくり返し

$\displaystyle S_{3m}=\frac{1}{7^1}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7^2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7^3}\times1$

$\displaystyle +\frac{1}{7^4}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7^5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7^6}\times1$ $\times\frac{1}{7^3}$

$+\cdots$

$\displaystyle +\frac{1}{7^{3m-2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7^{3m-1}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7^{3m}}\times1$

$\displaystyle =\frac{-49-7+2}{7^3\times2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{7^3}\right)^m}{1-\frac{1}{7^3}}$

$\displaystyle =\frac{-54\times\left\{1-\left(\frac{1}{7^3}\right)^m\right\}}{7^3\times2-2}$

$\displaystyle =-\frac{3}{38}\left\{1-\left(\frac{1}{343}\right)^m\right\}$

$\displaystyle\therefore$ (与式) $\displaystyle=\lim_{m\to\infty}S_{3m}=-\frac{3}{38}$ ~~(答)~~

3k おわりとは限らない

$\displaystyle S_{3m-1}=S_{3m}-\frac{1}{7^{3m}}\to0$

$\displaystyle S_{3m-2}=S_{3m-1}-\frac{1}{7^{3m-1}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\to0$

より.

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}S_{3m-1}=\lim_{m\to\infty}S_{3m-2}=\lim_{m\to\infty}S_{3m}$

$\displaystyle\therefore$ (与式) $\displaystyle=\lim_{m\to\infty}S_{3m}=-\frac{3}{38}$

《補足》 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=\boxed{?}$ 収束しない

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k}=S_n$ とおく

$S_{2m}=(-1)+1+(-1)+1+\cdots(-1)+1=0$

$\displaystyle\therefore$ (与式) $\displaystyle=\lim_{m\to\infty}S_{2m}=0$ —— ~~(答)~~

$\Downarrow$

$S_{2m-1}=-1$ $\displaystyle\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=-1$ 一致しない

60講 関数の極限

Rehab 答

$\boxed{\frac{0}{0}\text{(不定形)}\Rightarrow\text{約分, 公式, 微分の定義}}$

Ⅱ ↳5ユ. 後述

$\boxed{e\text{の定義}}$ $\displaystyle e=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=2.718\cdots\cdots$

$(1+0)^{\infty}$

① $\displaystyle\boxed{\lim_{t\to0}\frac{\log_e(1+t)}{t}=\boxed{1}}$ = ② $\displaystyle\boxed{\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\boxed{1}}$

$\log_e(1+t)^{\frac{1}{t}}\to1$

e

$t=e^x-1$ とおくと $x=\log_e(1+t)$

$\displaystyle\frac{e^x-1}{x}=\frac{t}{\log(1+t)}\xrightarrow{①より}1$

②の別証

(i) ロピタルの定理 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

de l'Hospital　$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ のときに限り.

$\frac{0}{0}$: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ ← ($f(x)=e^x$ とおく　$f'(x)=e^x$)

$\displaystyle=\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}$

$=\boxed{f'(0)}=1$.

60講 関数の極限

$\boxed{\frac{0}{0}(\text{不定形})\Rightarrow\text{約分, 公式, 微分の定義}}$　微分

II　↳ 5コ.

$\boxed{e\text{の定義}}$ $\displaystyle e=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=2.718\cdots\cdots$

$(1+0)^\infty$

① $\displaystyle\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{\log_e(1+t)}{t}=\boxed{1}}$ = ② $\displaystyle\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\boxed{1}}$

$\log(1+t)^{\frac{1}{t}}\to 1$　e

$t=e^x-1$ とおくと $x=\log_e(1+t)$

$\displaystyle\frac{e^x-1}{x}=\frac{t}{\log(1+t)}\xrightarrow{①より}1$

⇓

$f(\theta)=\frac{\sin\theta}{\theta}$ とおくと.

$f(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}=\frac{-\sin\theta}{-\theta}=f(\theta)$

より $f(\theta)$ は $\boxed{\text{偶関数}}$

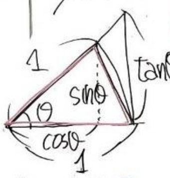
$\displaystyle\therefore\ \lim_{\theta\to -0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to +0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

左極限　右極限

$\displaystyle\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$　$t=\frac{s}{c}$　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\boxed{1}$　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\boxed{\frac{1}{2}}$

半角 or $\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$

$\boxed{\text{面積}}$



小△　おうぎ形　大△

$\frac{1}{2}\times1^2\times\sin\theta<\frac{1}{2}\times1^2\times\theta<\frac{1}{2}\times1\times\tan\theta$　$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\theta\cdot\cos\theta<\sin\theta<\theta$

図より $\theta>0$

$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$

右側極限　右方極限

$\theta\to+0$ として　$\displaystyle 1\leqq\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}\leqq 1$

右極限にすぎない

はさみうちの原理より　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$　~~証明終~~

$\boxed{476}$ (1) ∞　(2) $\infty-\infty$ (2次 1次 くくる) ∞

(3) $\infty-\infty$ (1次 1次) $\xrightarrow{\text{有理化}}$ $\frac{\infty}{\infty}\left(\frac{1次}{1次}\right)$　$-\frac{1}{2}$

(4) $\infty-\infty$ (1次 1次) ($x=-t$ とおきかえが安全)

$\Longrightarrow\frac{\infty}{\infty}\left(\frac{1次}{1次}\right)$　$+1$

$\boxed{477}$ (1) $[A]\leqq A<[A]+1$ より

$A-1<[A]\leqq A$

$5^x\pi-1<[5^x\pi]\leqq 5^x\pi$

$\pi-\frac{1}{5^x}<\frac{[5^x\pi]}{5^x}\leqq\pi$

極限 $\displaystyle\pi\leqq\lim_{x\to\infty}\frac{[5^x\pi]}{5^x}\leqq\pi$

はさみうちの原理より　π //

$\boxed{473}$ (1) -2　(2) $\frac{0}{0}\Rightarrow$ 代入 $-\frac{3}{2}$

(3) 分子有理化 $\Rightarrow\frac{0}{0}$　$\frac{3}{2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{5}{(x-3)^2}=+\infty\leftarrow\frac{5}{+0}$

$\frac{1}{+0}=+\infty$, $\frac{1}{-0}=-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$

$\boxed{474}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to 4+0}\frac{x}{\log_2(x-3)}=+\infty$　$\frac{4}{+0}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 4-0}\frac{x}{\log_2(x-3)}=-\infty$　$\frac{4}{-0}$

$\boxed{475}$ $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}=\begin{cases}1 & (x>1)\\ -1 & (x<1)\end{cases}$ とおく

$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}f(x)=1$

$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}f(x)=-1$

よって 発散

476 (1) ∞ (2) $\infty - \infty$ (2次 1次 ≪) ∞

(3) $\infty - \infty$ (1次 1次) $\xrightarrow{\text{有理化}}$ $\dfrac{\infty}{\infty}\left(\dfrac{1次}{1次}\right)$ $-\dfrac{1}{2}$

(4) $\infty - \infty$ (1次 1次) ($x = -t$ とおきかえが安全)

$\Longrightarrow \dfrac{\infty}{\infty}\left(\dfrac{1次}{1次}\right)$ $+1$

477 (1) $\boxed{[A] \leqq A < [A]+1}$ より

$A-1 < [A] \leqq A$

$5^x\pi - 1 < [5^x\pi] \leqq 5^x\pi$

$\pi - \dfrac{1}{5^x} < \dfrac{[5^x\pi]}{5^x} \leqq \pi$

極限 $\pi \leqq \lim_{x\to\infty} \dfrac{[5^x\pi]}{5^x} \leqq \pi$

はさみうちの原理より $\underline{\pi}$

(2) $\lim_{x\to\infty} (2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}}$ ← ∞^0

《考察》 $\boxed{\infty\text{のオーダー}\ 2^x \ll 3^x}$

$\lim_{x\to\infty} (2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}} \fallingdotseq (3^x)^{\frac{1}{x}} = 3$

ゴミ

$3^x < 2^x + 3^x < 2\cdot 3^x$ より

$\underbrace{(3^x)^{\frac{1}{x}}}_{=3} < (2^x+3^x)^{\frac{1}{x}} < \underbrace{(2\cdot 3^x)^{\frac{1}{x}}}_{=2^{\frac{1}{x}}\cdot 3}$

極限 $3 \leqq \lim_{x\to\infty} (2^x+3^x)^{\frac{1}{x}} \leqq 3$

はさみうちの原理より (与式) $= \underline{3}$

478 (1) $\lim_{x\to 1} \dfrac{a\sqrt{x+5}+b}{x-1} = 3$ 収束 分母0

$\dfrac{0}{0}$ が必要

(分子): $\sqrt{6}a + b = 0$ のもとで有理化

$(a, b) = (6\sqrt{6}, -36)$

(2) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{9x^2+4x+3} + ax + b\right) = \dfrac{1}{3}$

$x = -t$ とおく

$\lim_{t\to\infty} \left\{ \sqrt{9t^2-4t+3} - (at-b) \right\} = \dfrac{1}{3}$ (∞ ∞) 注

$a>0$ が必要 ⇒ 有理化 $\infty - \infty \Rightarrow \dfrac{\infty}{\infty}\left(\dfrac{\underset{=}{1次}\ 2次以下}{1次}\right)$

$a=3, b=1$

[インチキ]

$\sqrt{9t^2-4t+3} = \sqrt{\left(3t-\dfrac{2}{3}\right)^2 + \dfrac{23}{9}} \fallingdotseq 3t - \dfrac{2}{3}$

(左辺) $\fallingdotseq \left(3t - \dfrac{2}{3}\right) - (at-b) = \underbrace{(3-a)}_{=0}t + \underbrace{\left(b-\dfrac{2}{3}\right)}_{=\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$ (右辺)