zemis2020-09-09（board）

479 $f(x)$：多項式

$$\begin{cases}\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2-1}=2 & \text{——①} \\ \lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=3 & \text{——②}\end{cases}$$

収束

$\frac{\infty}{\infty}$ $\left(\frac{\boxed{2次}}{2次}\right)$ の はず （最高次の比）

$\leftarrow \frac{0}{0}$ のはず

①：$f(x)=x^3+2x^2+\boxed{ax+b}$ と表せる

グローバル

②：$f(1)=3+a+b=0$ が必要

$\frac{0}{0} \Rightarrow$ 約分

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x^2+ax-(a+3)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+3x+a+3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{7+a}{2}=3$$

〜のはず

〜が必要

$\therefore a=-1,\ b=-2$

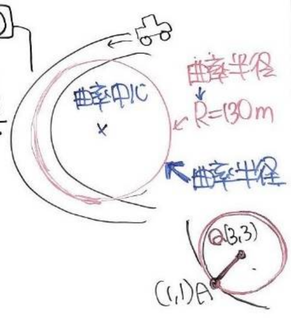
$f(x)=x^3+2x^2-x-2$

板尾創路（いつじ）$=130R$

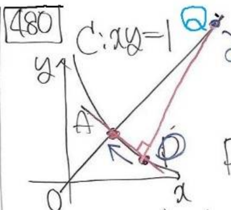
チャレ(60)

(1) 4

(2) $\begin{cases}a=-2\\ b=\frac{9}{4}\end{cases}$



480 $C: xy=1$　$A(1,1)$



曲率中心に近づく

$P\left(p,\frac{1}{p}\right)$ とおく $(p>0)$

PAの傾き $\dfrac{\frac{1}{p}-1}{p-1}=\dfrac{1-p}{p(p-1)}=-\dfrac{1}{p}$

$\begin{cases}PQ: y=p(x-p)+\frac{1}{p}\\ OA: y=x\end{cases}$ と連立　$x=\dfrac{p^2+p+1}{p}$

点PをAに近づける $(p\to1)$ と

$\lim_{p\to1}x=3$　∴点Qは(3,3)に近づく

61講

481 (1) 3,　(2) $\frac{7}{4}$

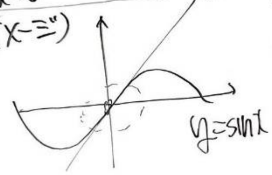
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{\sin 4x} \fallingdotseq \frac{7x}{4x}=\frac{7}{4}$$

482 2

483 (1) $\dfrac{2\sin\theta}{\sin3\theta}$　(2) $\dfrac{2}{3}$

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

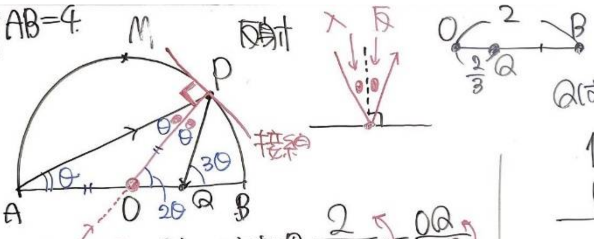
(イメージ)



$x\fallingdotseq0$ で

$\sin x\fallingdotseq x$

483 AB=4

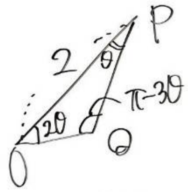


(1) 正弦定理 $\dfrac{2}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{OQ}{\sin\theta}$

$\therefore OQ=\dfrac{2\sin\theta}{\sin3\theta}$

(2) $P\to B$ のとき $\theta\to0$

$\therefore \lim_{P\to B}OQ=\lim_{\theta\to0}\dfrac{2\sin\theta}{\sin3\theta}=\dfrac{2}{3}$



Qは線分OBを

1:2に内分する点に近づく

(与) $=\lim_{x\to0}\dfrac{\sin7x}{7x}\times\dfrac{4x}{\sin4x}\times\dfrac{7}{4}$

$=1\times1\times\dfrac{7}{4}=\dfrac{7}{4}$

484 公式 (1)4　(2)2　(3)-1

(3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$　$\leftarrow \theta=x-\frac{\pi}{2}$ とおく

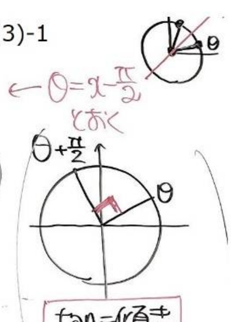
$=\lim_{\theta\to0}\theta\times\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$

$=\lim_{\theta\to0}\left(-\dfrac{\theta}{\tan\theta}\right)$

$=-1$

(注) $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$

$\cancel{=}\ \dfrac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{2}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{2}}$　存在しない



$\boxed{\tan=傾き}$

$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

485 $a=4,\ b=-1,\ -\frac{15}{8}$

$\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9-8x+7\cos2x}-(a+bx)}{x^2}$ が収束

分母ゼロ

(分子) $\to 4-a=0$ が必要　$\therefore a=0$

(与式) $=\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\quad}-(4+bx)}{x^2}\times\dfrac{\sqrt{\quad}+(\quad)}{\sqrt{\quad}+(\quad)}$

$\frac{0}{0}$ $\Rightarrow =\lim_{x\to0}\dfrac{(9-8x+7\cos2x)-(4+bx)^2}{x^2\cdot\left\{\sqrt{9-8x+7\cos2x}+(4+bx)\right\}}$　→8

公式

約分 $=\lim_{x\to0}\dfrac{-b^2x^2-(8+8b)x-7+7\cos2x}{x^2}\times\dfrac{1}{\{\cdots\cdots\}}$　→8

(注)

$\lim_{\theta\to0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\dfrac{1}{2}$

$(8+8b)\neq0$ だと発散

収束するから $8+8b=0$ が必要

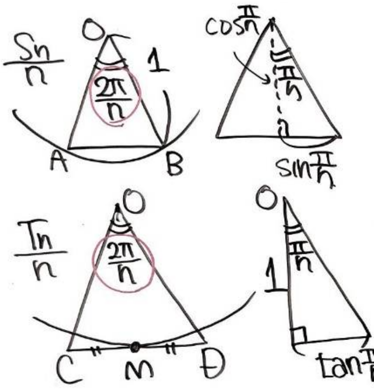
$b=-1$

(与式) $=\dfrac{-x^2-7(1-\cos2x)}{x^2}\times\dfrac{1}{\{\ \}}$　8

$=\left(-1-7\times\frac{1}{2}\times4\right)\times\frac{1}{8}$

$=-\dfrac{15}{8}$

$\boxed{486}$ 内接 → S_n, 外接 → T_n, 半径1



$S_n = n\times\triangle OAB$

$= n\times\frac{1}{2}\times 2\sin\frac{\pi}{n}\times\cos\frac{\pi}{n}$

$= n\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}$

$T_n = n\times\triangle OCD$

$= n\times\frac{1}{2}\times 2\tan\frac{\pi}{n}\times 1$

$= n\cdot\tan\frac{\pi}{n}$

よって $\theta=\frac{\pi}{n}$ とおくと $n=\frac{\pi}{\theta}$

$n\to\infty$ のとき $\theta\to 0$ より

$\lim_{n\to\infty} n^2(T_n - S_n)$ $\quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\pi}{\theta}\right)^3\times(\tan\theta - \sin\theta\cdot\cos\theta)$

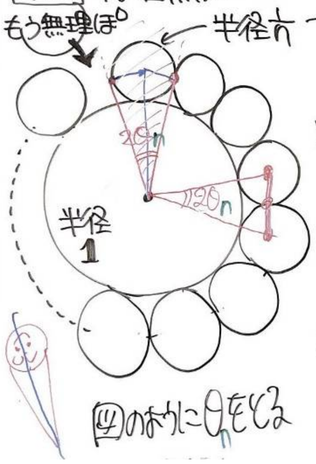
$= \pi^3 \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta^3}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\underbrace{(1-\cos^2\theta)}_{\sin^2\theta}$

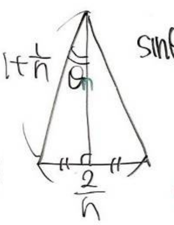
$= \pi^3 \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\times\frac{1}{\cos\theta}$

$= \pi^3$

$\boxed{488}$ n:自然数

もう無理ぽ　半径$\frac{1}{n}$ → 最大個数 a_n 個





$\sin\theta_n = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$

$= \frac{1}{n+1}$

中心角

$a_n \fallingdotseq \frac{2\pi}{2\theta}$ ← 一周分 ← 1個分

図のように θ_n をとる　$a_n = \left[\frac{2\pi}{2\theta}\right] = \left[\frac{\pi}{\theta}\right]$

$\boxed{\left[\frac{\pi}{\theta}\right] \leqq \frac{\pi}{\theta} < \left[\frac{\pi}{\theta}\right]+1}$ より

$\frac{\pi}{\theta}-1 < \left[\frac{\pi}{\theta}\right] = a_n \leqq \frac{\pi}{\theta}$

$\frac{\pi}{n\theta} - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} \leqq \frac{\pi}{n\theta}$　$\to 0$

ここで $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n\theta}$ ← $\left(\begin{array}{l}\sin\theta = \frac{1}{n+1}\\ n\to\infty のとき \theta\to 0\end{array}\right)$

$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\pi}{\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)\cdot\theta}$　　$n+1 = \frac{1}{\sin\theta}$

$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\pi}{\frac{\theta}{\sin\theta}-\theta} = \pi$ より

$\pi \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \leqq \pi$

(はさみうちの原理より)

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \pi$ //

62講, 63講 の予習ガイド

連続, 微分可能について

(日 連続スル
英 連続ダ テアル)

$\boxed{連続}$ 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続である

$\Leftrightarrow$ (定ギ) $\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$
左極限　右極限　アイ入

$f(x) = \begin{cases} ▨ & (x>a) \\ △ & (x=a) \\ ⊘ & (x<a)\end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} ▨ & (x\neq a) \\ △ & (x=a)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ☆

$\boxed{微分可能}$ 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能である

$\Leftrightarrow$ (定ギ) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が収束する

微分係数 $f'(a)$

$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

がともに収束し, 値が一致する

$\boxed{f(x) が x=a で微分可能 \Rightarrow x=a で連続}$
(仮定)　(結論)

仮定より $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が収束
分母だ0

(分子): $\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\} = 0$ が必要

結論 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

過去問めぐり。 2007 聖マリ

(1) $3^n < 2^n + 3^n < 2 \times 3^n$

$3 < (2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} \times 3 \xrightarrow{n\to\infty}$ ② $\boxed{3}$

「はさみうち」より $\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} =$ ③ $\boxed{3}$

(2) $0 \leqq a < b$ のとき（小 大） $\lim (a^n+b^n)^{\frac{1}{n}} =$ ④ $\boxed{b}$

(3) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\left((\cos^2 x)^n + (\sin^2 x)^n\right)^{\frac{1}{n}}$

比較

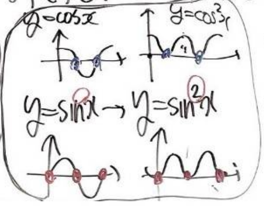
$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} =$ ⑤ $\boxed{\frac{3}{4}}$ $\cos^2 x$

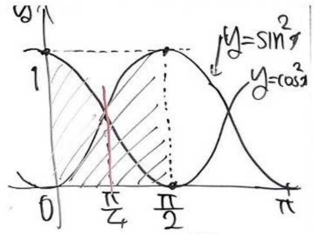
$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} =$ ⑥ $\boxed{\frac{1}{2}}$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} =$ ⑦ $\boxed{\frac{3}{4}}$ $\sin^2 x$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \boxed{?}$ ⇨ まず $f(x)$ を求める

$$f(x)=\begin{cases}\cos^2 x & \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin^2 x & \left(\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$





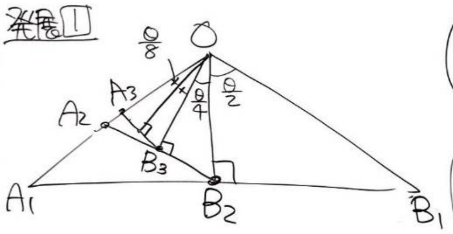
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 2\times\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)\,dx$

$=\frac{\pi}{4}+\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\boxed{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}$

発展 1



$\begin{pmatrix} OA_1=OB_1=1 \\ OA_n=OB_n=a_n \\ a_1=1 \end{pmatrix}$

$a_2=OB_2=OB_1\cdot\cos\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\theta}{2}$

$a_3=OB_3=OB_2\cdot\cos\frac{\theta}{4}=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{4}$

(1) $a_3\cdot\sin\frac{\theta}{4}$

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n=\boxed{?}$

$\therefore a_3 \sin\frac{\theta}{4}$

$=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\times\sin\frac{\theta}{4}$

$=\cos\frac{\theta}{2}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{4}$

(2) まず a_n を求めて極限 そのままでは困難

テーマ. 具体例 ↓ 規則性 & 計算

$a_4=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}$

$a_5=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}\cos\frac{\theta}{16}$

$\vdots$

$a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}$

⇨ $a_n\times\boxed{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}$ の極限をかんがえる