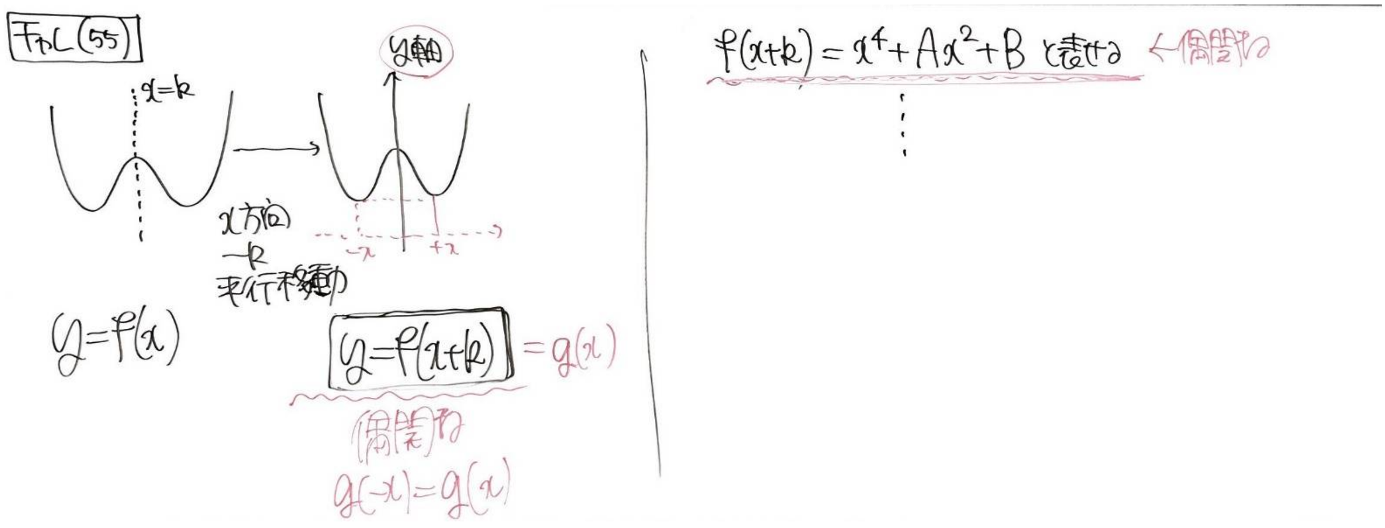
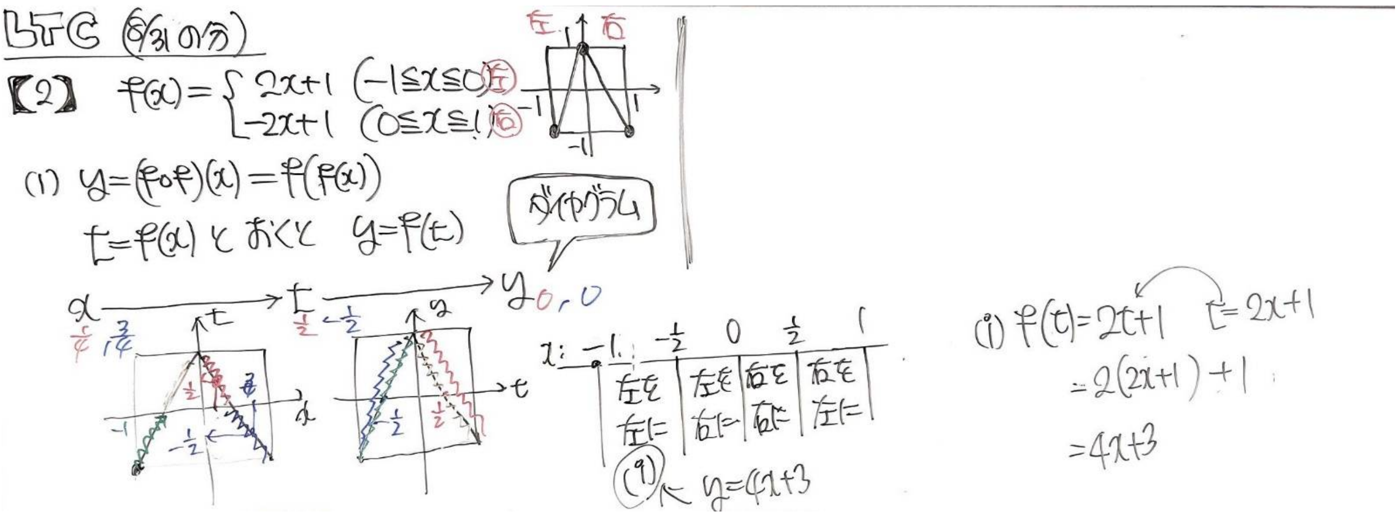
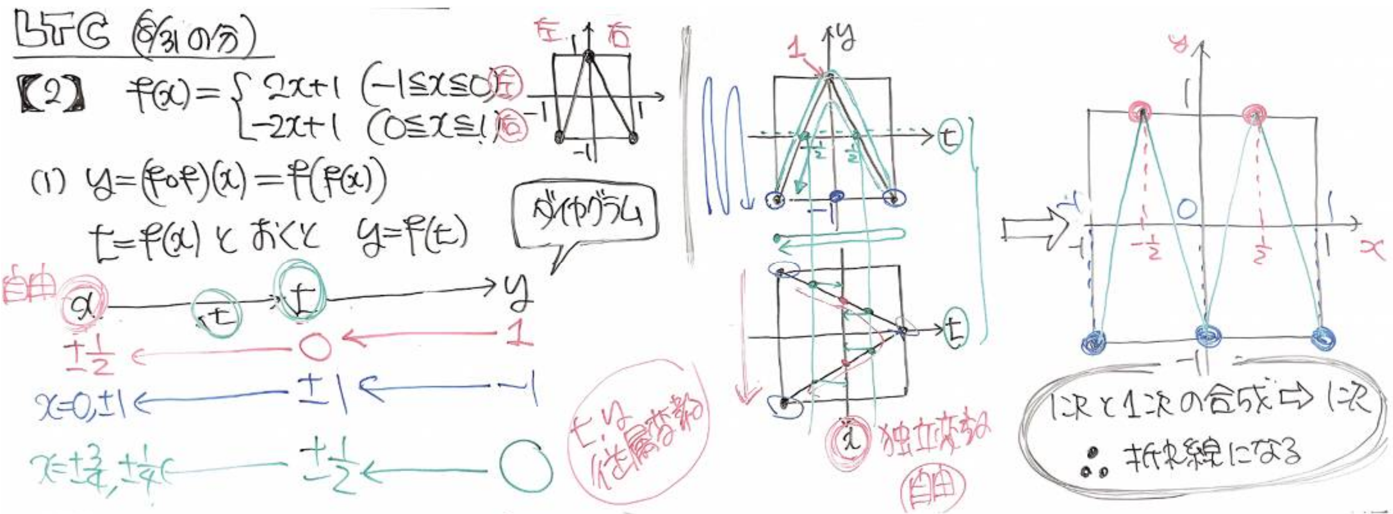
zemis2020-09-01（board）







447 真偽判定, 偽なら反例を.

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n=0$ $\infty\times0$

∞ 無限大　　0 無限小

偽, 反例は $a_n=n^2$, $b_n=\frac{1}{n}$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ 分母

偽, 反例は $a_n=\frac{2}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}$

($\alpha=\beta=0$)

(3) $b_n<a_n<c_n$, $\lim_{n\to\infty}(c_n-b_n)=0 \Longrightarrow \{a_n\}$は収束

小　中　大

偽. 反例は $b_n=n$, $a_n=n+\frac{1}{n}$, $c_n=n+\frac{2}{n}$

小　中　大

(4) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$　真

収束する数列は, 和.差.積.商は自由に計算できる
ただし, 分母≠0に注意

証 $b_n=a_n-(a_n-b_n)$ より

例えば $\infty-\infty$ なら NG

$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha$

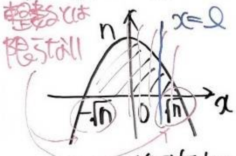
448 n:正整数.

D: $y=n-x^2$ と x軸で囲まれる領域

a(n): Dに含まれる格子点の数

《考察》(2)の答だけなら. $\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}=\boxed{?}$

整数とは限らない!!



格子点1 ↕ 面積1

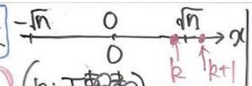
1につ

$a(n)\fallingdotseq$ Dの面積

$=\frac{(\sqrt{n}-(-\sqrt{n}))^3}{6}=\frac{4}{3}n^{\frac{3}{2}}$

$\boxed{?}=\frac{4}{3}$

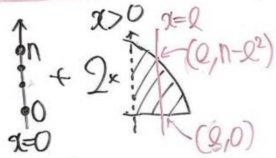
(1) $\boxed{k=[\sqrt{n}]}$ とおく



$k\le\sqrt{n}<k+1$ (k:正整数)

$n\times\sqrt{n}$　$(\sqrt{n})^3$

$a(n)=$



$=n+1+2\cdot\sum_{l=1}^{k}(n-l^2+1)$　lで整理 $(n+1)-l^2$

$=n+1+2\times\{(n+1)k-\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\}$

$=(n+1)(2k+1)-\frac{1}{3}k(k+1)(2k+1)$　nについて1.5次

$k=[\sqrt{n}]$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}$ を求める

$\frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\left(2\cdot\frac{k}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$-\frac{1}{3}\times\frac{k}{\sqrt{n}}\times\left(\frac{k}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\times\left(2\frac{k}{\sqrt{n}}+\right.$

ここで $\sqrt{n}-1<k\le\sqrt{n}$ より

$1-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{k}{\sqrt{n}}\le1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{\sqrt{n}}=1$　$\frac{4}{3}$

よって $\lim\frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}=2-\frac{2}{3}$

57講

449 $|r|<1$のとき $\lim_{n\to\infty}r^n=0$

(1) 0　(2) 2 5^nでわる　(3) $-\infty$ 3^nなどでくくる　$\infty-\infty$ 強

450 $a_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ より

$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$ (特性型!)

451 無限等比数列の収束条件 ar^{n-1}

初項=0 または $-1<$公比≤1

$-1<(\ )$内≤1 より $-9\le x<-1$, $\frac{5}{2}<x$

《補足》無限等比級数の収束条件

$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$

$a=0$ または $-1<r<1$

451 $\left\{\left(\frac{x^2-2x-7}{x^2-x+2}\right)^n\right\}$ の収束条件

$x^2-2x-7=0$ または $-1<\frac{x^2-2x-7}{x^2-x+2}\le1$

吸収できる

x^2-x+2を辺々にかける

$\left(x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0\right)$

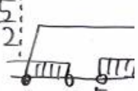
$-(x^2-x+2)<x^2-2x-7\le x^2-x+2$

かつ

$2x^2-3x-5>0$　　$x\ge-9$

$(2x-5)(x+1)>0$

$x<-1$ または $x>\frac{5}{2}$



$-9\le x<-1$, $\frac{5}{2}<x$

454 **解けない漸化式の極限**

《背景》 $0<a_1<3$

$a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$ ⇨ $\lim_{n\to\infty} a_n=\boxed{?}$

特性関数

$f(x)=1+\sqrt{1+x}$ とおくと

$a_{n+1}=f(a_n)$

$\alpha=\lim_{n\to\infty} a_n$ とおくと $\alpha=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}$

特性方程式

記述では NG

$\alpha=f(\alpha)$

$\alpha-1=\sqrt{1+\alpha}$

$(\alpha-1)^2=1+\alpha$ かつ $\alpha\geqq 1$

$\alpha^2-3\alpha=0$

$\therefore \alpha=\boxed{3}$

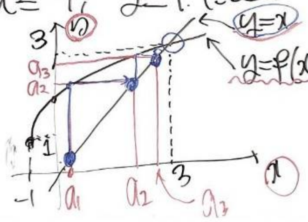
まとめ $a_{n+1}=f(a_n)$

⇨ $\alpha=f(\alpha)$ の解は $\lim_{n\to\infty} a_n$ の 候補

(注 収束を仮定すれば….)

グラフでとらえる $y=1+\sqrt{1+x}$

$x\geqq -1$, $y\geqq 1$ に注意



グラフより $\lim_{n\to\infty} a_n=3$ —(答)

区間縮小法 ← 454 誘導