5/8 (国公ゼミ数学)

- テキスト，演習課題

- 3/23〜4/3　春期講習（プリント）
  直前講習

- 4/20（月）〜5/1（金）　ライブ授業　テキスト

  1，2，3，5講　済
  ただし，A，B問が中心

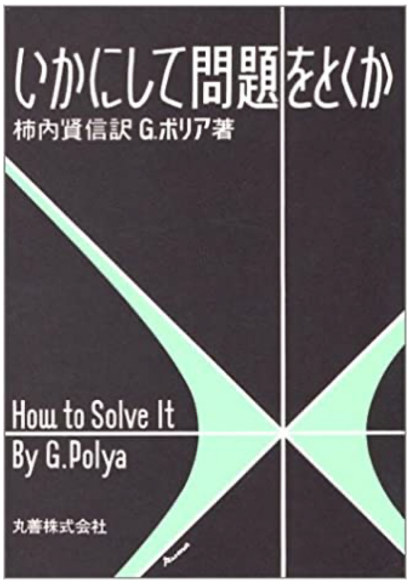
- ライブ授業中に出された課題
  （演習課題とは別）もある。

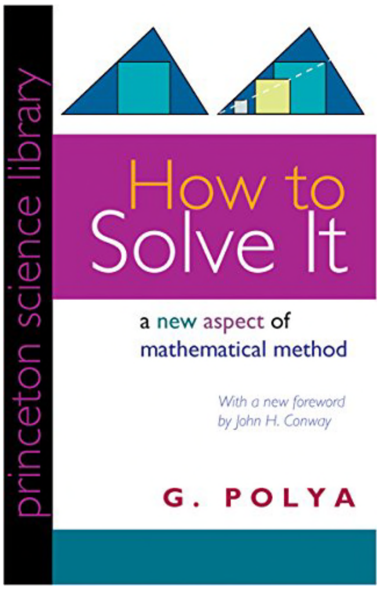
本日は，春期，ライブ授業の

catch up

ZOOMでのコミュニケーションを
練習などをやります。

『How to solve it』





① 題意

⇩

② 方針

⇩

③ 答案・計算

⇩

④ 検証・検算

YAWARAKA!
数学道具箱　【体験版】

【例題 01】

方程式 $2x^2-3x+4=0$ の２解を α,β とするとき，$(\alpha^2+2)(2\beta^2+3\beta+4)$ の値を求めよ。

【例題 02】

k を実数とする。x の 3 次方程式 $x(x^2-4k+4)+k(k-2)^2=0$ の解がすべて実数であるような k の値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \leqq k \leqq \boxed{\text{ツ}}$ である。

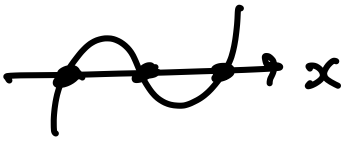
【例題 03】

方程式 $x^3+ax+a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，a は定数とする。

$$\cancel{x=k)}$$

$$\underline{x(x^2-4k+4)}+\underline{k(k-2)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^3-4(k-1)x+k(k-2)^2}_{f(x)}=\underbrace{0}_{y}$$



【$\boxed{\text{微分してグラフ}}$でも解けるー】 ⑤

解の処理

① ② ③

④ ⑤

① 解を求める. というかさがす.

$x=-k$ は1つの解

$\Longrightarrow$ $(x+k)$ を因数にもつ

$$(x+k)(x^2-kx+(k-2)^2)=0$$

$$x=-k,\quad x^2-kx+(k-2)^2=0$$

$D\geqq 0$ より

$$\frac{4}{3}\leqq k\leqq 4$$

T&E

【例題 01】

$x=\frac{3\pm\sqrt{23}i}{4}$ 解く

方程式 $2x^2-3x+4=0$ の2解を α,β とするとき,

~~展開~~

$(\alpha^2+2)(2\beta^2+3\beta+4)$ の値を求めよ。 対称式ではない

(展開 パラっ ちらかす)

$\boxed{KKK}$ $\underbrace{\alpha+\beta=\frac{3}{2}}_{和}$, $\underbrace{\alpha\cdot\beta=2}_{積}$

代入 & 次数下げ

$$\begin{cases} 2\alpha^2-3\alpha+4=0 \\ 2\beta^2-3\beta+4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2=\frac{3}{2}\alpha-2 \\ \beta^2=\frac{3}{2}\beta-2 \end{cases}$$

2次 → 1次

$$(与式)=\frac{3}{2}\alpha\times6\beta=9\alpha\beta\underset{\alpha\beta=2}{=}18$$

【例題 04】$x^2+y^2=2$ のもとで，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。(できるだけ多くの解法で解け)

【例題 05】正の数 a, b が $a^3+b^3=5$ を満たすとき，$a+b$ のとりうる値の範囲を求めよ。(2012 昭和)

【例題 04】$x^2+y^2=2$ のもとで， 円

$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

$k=2x+y$ とおく。 直線

① y消去

連立

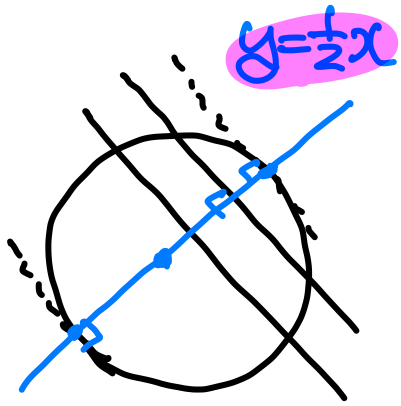
↑

共有点

$$x^2+(k-2x)^2=2$$
$$5x^2-4kx+k^2-2=0$$
$$D/4=(-2k)^2-5(k^2-2)\geqq 0$$
$$k^2\leqq 10$$
$$-\sqrt{10}\leqq k\leqq\sqrt{10}$$

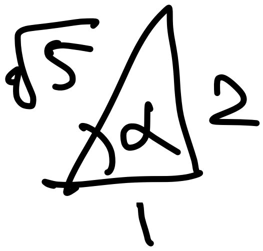
② 図示 $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{点・直}}\leqq(\text{半径})$

など



$$d\leqq r$$
$$\frac{|-k|}{\sqrt{5}}\leqq\sqrt{2}$$

③ 円パラ $x=\sqrt{2}\cos\theta$, $y=\sqrt{2}\sin\theta$ とおく



$$k=\sqrt{2}(\sin\theta+2\cos\theta)$$
$$=\sqrt{10}\sin(\theta+\alpha)$$
$$-\sqrt{10}\leqq k\leqq\sqrt{10}$$

④ $x^2+y^2=2$ のもとで ← 円

$k=2x+y$ とおき、← 直線　kのMax.minを求めよ

$\vec{a}=(x,y)$, $\vec{b}=(2,1)$ とおくと、

$|\vec{a}|^2=x^2+y^2=2$, $|\vec{b}|^2=5$

コーシー・シュワルツの不等式

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2x+y$

なす角 → $\cos^2\theta$

$$\boxed{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \geqq (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

なし　　あり

$|\cos^2\theta| \leqq 1$

$2\times 5 \geqq k^2$

$-\sqrt{10} \leqq k \leqq \sqrt{10}$

等号成立は $\vec{a} /\!/ \vec{b}$ のとき。

$(\cos\theta=\pm 1$
$\theta=0,\pi)$

解の問題の処理

（1）　解を求める。

忘れるな。

（2）　解を元の方程式に代入＆次数下げ

（3）　解と係数の関係　⇒ 対称式

KKK

（4）　解　⇔　因数

α　$(x-\alpha)$

（5）　解　⇔　グラフの共有点の x 座標　（できれば**定数分離**）

（特殊な問題）

〇共通解

〇共役解

〇1 の 3 乗根 ω

〇相反方程式

〇3 次方程式の重解問題に注意

など

最大最小

基礎　グラフを描いて高さ比べ

- ２次関数⇒平方完成
- 三角関数⇒諸公式の利用　合成，半角，….
- 一般には⇒微分

応用　２変数以上 or 整式（n 次式）でないとき　など

（1）一文字消去（ただし変域に注意）

（2）図示して共有点の存在条件に帰着（線形計画法）

（3）文字の置き換え（変域に注意）

（対称式は和と積で，$x=\frac{b}{a}$ など）

（注）和と積の置き換えでは隠れた実解条件に注意

パラメーター表示（円・だ円・双曲線など）

$x^2+y^2=r^2$ のとき，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と表せる。（２変数⇒１変数）

（4）有名不等式の利用　コーシー・シュワルツ

（例）相加相乗，Cauchy-Schwarz の不等式など

相加相乗　$a>0, b>0$ のとき，$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ が成立　（等号成立は $a=b$）

CS-不等式　$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 \geqq \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$　（等号成立は $\vec{a} \,/\!/\, \vec{b}$ のとき）

☆ 三角不等式　$\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right| \geqq \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$　（等号成立は $\vec{a}, \vec{b}$ が同じ向きのとき）

（5）逆手法（主役交代して，解の存在条件に帰着）

（6）（最後の手段）一文字固定

7 C

$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b $(0 \leqq b < 1)$ とするとき，$ab+b^2$ の値を求めよ．

8 C

(1) $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ を因数分解せよ．

(2) $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，$ac+bd=1$ のとき，$ad-bc$，a^2+d^2，b^2+c^2 の値を求めよ．

入試問題にチャレンジ (1)

n を整数とするとき，

$$f(n)=|n-1|+|n-2|+|n-3|+\cdots+|n-99|$$

の最小値を求めよ．

(2010・産業医科大学)

15 C

x の連立不等式 $\begin{cases} 7x-5 \geqq 13-2x \\ x+a > 3x+5 \end{cases}$ を満たす整数 x がちょうど 3 個存在するような定数 a の値の範囲を求めよ．

16 C

A 地点から 26km 離れた B 地点に行くのに，初めはバスに乗り，途中タクシーに乗り換えて 40 分以内に B 地点に着きたい．バス停が A 地点から 2km ごとに設けられているとき，タクシーで走る距離をできるだけ少なくするには，A 地点からいくつ目のバス停で乗り換えればよいか．ただし，バスは時速 30km，タクシーは時速 50km とし，いずれも待ち時間はないものとする．

入試問題にチャレンジ (2)

不等式 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} > \dfrac{1}{100}$ を満たす自然数 n の最大値を求めよ．

(2009・東京医科大学)

23 C

a は定数とする．x の不等式 $(a-2)x^2+(4-a)x-2 \geqq 0$ を解け．

24 C

方程式 $x^2+18=9[x]$ を解け．ただし，$[x]$ は実数 x を越えない最大の整数を表すものとする．

入試問題にチャレンジ (3)

3 つの 2 次方程式 $x^2+2x-a=0$，$2x^2-ax+1=0$，$-ax^2+x+2=0$ が，ただ 1 つの共通の実数解をもつような定数 a の値を求めよ．

(2006・自治医科大学)

第4講　集合と命題

(AB 予告)

1　集合と要素，部分集合，補集合，空集合

はっきりした条件を満たすものの集まりを**集合**といい，集合を構成している１つ１つのものを集合の**要素**という．

a が集合 A の要素であるとき，a は集合 A に**属する**といい，記号で

$$\boldsymbol{a \in A}$$

と表す．

さらに，A のすべての要素が B の要素でもあるとき，すなわち，

$$x \in A \qquad \text{ならば} \qquad x \in B$$

が成り立つとき，A は B の**部分集合**といい，記号で

$$\boldsymbol{A \subset B}$$

と表す．

２つの集合 A，B において，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成り立つとき，A と B の要素はすべて一致している．このとき，A と B は**等しい**といい，$\boldsymbol{A = B}$ と表す．

また，１つの集合 U の要素だけについて考えるとき，U を**全体集合**という．このとき，U の要素であって A の要素でないもの全体の集合を A の**補集合**といい，$\boldsymbol{\overline{A}}$ で表す．

特に，要素が１つもない集合を**空集合**といい，記号 $\boldsymbol{\phi}$ で表す．

2　集合の共通部分と和集合

A と B の**共通部分**とは，A と B の両方に含まれる要素の全体の集合のことであり，$\boldsymbol{A \cap B}$ と表す．

A と B の**和集合**とは，A，B の少なくとも一方に含まれる要素全体の集合のことであり，$\boldsymbol{A \cup B}$ と表す．

一般に，補集合の包含関係については，次のことが成り立つ．

$$\boldsymbol{A \subset B} \qquad \text{ならば} \qquad \boldsymbol{\overline{A} \supset \overline{B}}$$

3　ド・モルガンの法則

$A \cup B$，$A \cap B$ の補集合について，次の**ド・モルガンの法則**が成り立つ．

$$\boldsymbol{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}},\quad \boldsymbol{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$

39 C

実数 x，y が $x^2+2y^2=1$ を満たしながら変化するとき，$\frac{1}{2}x+y^2$ の最大値，最小値を求めよ．さらに，そのときの x，y の値を求めよ．

40 C

放物線 $y=-x^2+6x$ と x 軸で囲まれる部分に内接する長方形 (一辺は x 軸上にある) のうちで，周の長さが最大になる長方形の 2 辺の長さを求めよ．

入試問題にチャレンジ (5)

k は実数の定数とする．関数 $f(x)=x^2-4|x|+k$ の最小値を $m(k)$，最大値を $M(k)$ とする．

(1) $m(k)=2$ のとき，k の値を求めよ．

(2) $-1 \leqq x \leqq 5$ のとき，$m(k)$，$M(k)$ をそれぞれ，k を用いて表せ．

(3) 関数 $y=f(x)$ のグラフを直線 $y=k$ に関して対称移動するとき，その最大値を求めよ．

(2000・滋賀医科大学)

2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】1 講

1 A　(1) $(2x-1)(x-3)$　(2) $(x-1)(x^2+x+y)$　(3) $(x-3)(x+1)(x-1)^2$

2 A　(1) $2\sqrt{3}$　(2) $\sqrt{5}-2$　(3) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$

3 A　順に　t^2-2，t^3-3t

4 B　(1) $(x+2y-3)(x-y+2)$　(2) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
(3) $(a-b)(b-c)(c-a)$　(4) $(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$

5 B　(1) $x+\dfrac{1}{x}=4$，$x^3+\dfrac{1}{x^3}=52$　(2) $x+y=2\sqrt{3}$，$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=4$

6 B　(1) $|a+1|+|a-3|=\begin{cases}-2a+2 & (a<-1)\\ 4 & (-1\leqq a<3)\\ 2a-2 & (a\geqq 3)\end{cases}$

(2) $\sqrt{x+4a}-\sqrt{x-4a}=\begin{cases}-4 & (a<-2)\\ 2a & (-2\leqq a<2)\\ 4 & (a\geqq 2)\end{cases}$

7 C　$ab+b^2=1$

8 C　(1) $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$
(2) $ad-bc=0$，$a^2+d^2=1$，$b^2+c^2=1$

ﾁｬﾚ 1　$n=50$ のとき、最小値　2450

2019年度　FG　数学IAIIB　【解答】2講

$\boxed{9\text{A}}$　$3.5 \leqq x < 4.5$

$\boxed{10\text{A}}$　(1)　$-1 < x + 2 < 3$　　(2)　$15 < 5y < 35$　　(3)　$-23 < 3x - 2y < -3$

$\boxed{11\text{A}}$　(1)　$x = -2, 8$　(2)　$-2 < x < 8$

$\boxed{12\text{B}}$　(1)　$11.5 \leqq 2x + y < 14.5$　　(2)　$-2.5 < x - 2y < 0.5$

$\boxed{13\text{B}}$　(1)　$-2 \leqq x < 3$　　(2)　$-2 < x \leqq 1$

$\boxed{14\text{B}}$　(1)　$x \leqq -4$，$-1 \leqq x$　　(2)　$x < \dfrac{3}{2}$

$\boxed{15\text{C}}$　$13 < a \leqq 15$

$\boxed{16\text{C}}$　5つ目

$\boxed{\text{チャレ}2}$　2499

2019年度　FG　数学IAIIB　【解答】3講

$\boxed{17A}$ (1)　$x=3,\ 4$　(2)　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$　x　(3)　$x=2,\ -3$　$x=2,\ -3.$

$\boxed{18A}$ (1)　$-4<x<6$　(2)　$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 3$　(3)　$x<\dfrac{5-\sqrt{13}}{6},\ \dfrac{5+\sqrt{13}}{6}$

$\boxed{19A}$ $k=5$ のとき$-\dfrac{1}{2}$,　$k=-3$ のとき$\dfrac{1}{2}$

$\boxed{20B}$ (1)　$(x,\ y,\ z)=(-1,\ 3,\ 6)$　(2)　$(x,\ y)=(0,\ 5),\ (-4,\ -3)$

$\boxed{21B}$ $k\leqq 0,\ 3\leqq k$

$\boxed{22B}$ $k=0,\ 2$

$\boxed{23C}$
$$\begin{cases} x\leqq \dfrac{2}{2-a}, 1\leqq x & (a>2)\\ x\geqq 1 & (a=2)\\ 1\leqq x\leqq \dfrac{2}{2-a} & (0<a<2)\\ x=1 & (a=0)\\ \dfrac{2}{2-a}\leqq x\leqq 1 & (a<0)\end{cases}$$

$\boxed{24C}$ $x=3,\ 3\sqrt{2},\ 3\sqrt{3},\ 6$

$\boxed{\text{チャレ（3）}}$ $a=3.$

2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】 4 講

$\boxed{２５A}$ (1)真　(2)偽　(3)偽　(4)偽

$\boxed{２６A}$ $A=\left\{3,\ 6,\ 9\right\},\ B=\left\{3,\ 4,\ 7,\ 10\right\},\ A\cap\overline{B}=\left\{6,\ 9\right\}$

$\boxed{２７A}$ 7 個

$\boxed{２８B}$ 元の命題　偽

逆　「$x=2$ かつ $y=3$ ならば $x+y=5$」　真

裏　「$x+y\neq 5$ ならば $x\neq 2$ または $y\neq 3$」真

対偶　「$x\neq 2$ または $y\neq 3$ ならば $x+y\neq 5$」偽

$\boxed{２９B}$ (1)(b)　(2)(a)　(3)(d)　(4)(c)　(5)(b)

$\boxed{３０B}$ (1)方針＝対偶を証明　$n=7k+$(あまり) とおく。

(2)方針＝背理法

(3)$\left(x,\ y\right)=\left(5,\ 3\right)$

$\boxed{３１C}$ 略

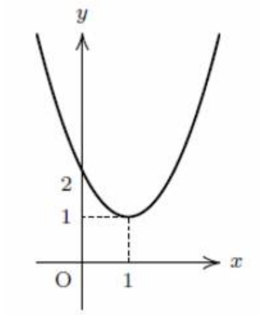
$\boxed{３２C}$ 略

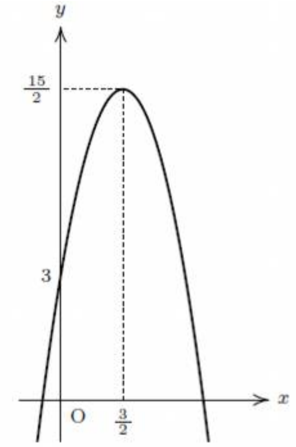
$\boxed{\text{ﾁｬﾚ}4}$ 45 人

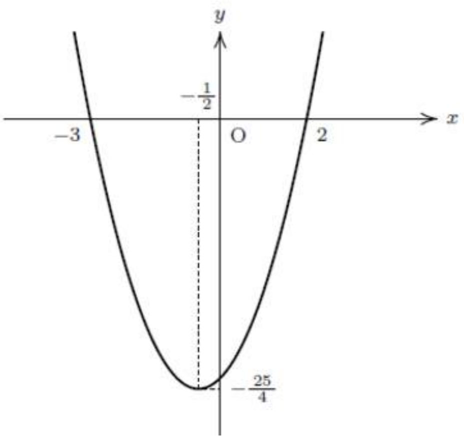
2019年度　FG　数学IAIIB　【解答】5講

33A　(1)軸 $x=1$，頂点 $(1,1)$　(2)軸 $x=\frac{3}{2}$，頂点 $\left(\frac{3}{2},\frac{15}{2}\right)$

(3)軸 $x=-\frac{1}{2}$，頂点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{25}{4}\right)$　　【解法】平方完成







34A　(1) $x=5$ のとき最大値 5，$x=3$ のとき最小値 1

(2) $x=1$ のとき，最大値 $\frac{7}{2}$，$x=-2$ のとき最小値 -10　　【解法】平方完成

35A　(1) $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+5$　　(2) $y=2x^2-5x+2$

【解法】(1) $y=a(x-p)^2+q$ 型　　(2) $y=ax^2+bx+c$ 型

36B　(1) $y=2x^2+1$ または，$y=2(x-1)^2+3$　　(2)　$(a,b)=(7,9)$

【解法】2次関数なので，平行移動・対称移動は「頂点と最高次係数」に着目

37B　$(a,b)=(2,5),(-2,9)$　　【解法】$y=a(x-p)^2+q$ 型

38B　(1)　$m(a)=\begin{cases}1 & (a<0)\\ -4a^2+1 & (0\leqq a\leqq 1)\\ -8a+5 & (a>1)\end{cases}$

(2)　$M(a)=\begin{cases}-8a+5 & \left(a<\frac{1}{2}\right)\\ 1 & \left(a\geqq\frac{1}{2}\right)\end{cases}$

【解法】(1)下に凸の最小値　⇒　軸が変域の内か外かで場合分け（3パターン）

(2)下に凸の最大値　⇒　軸が変域の真ん中より右寄りか左寄りかで場合分け（2パターン）

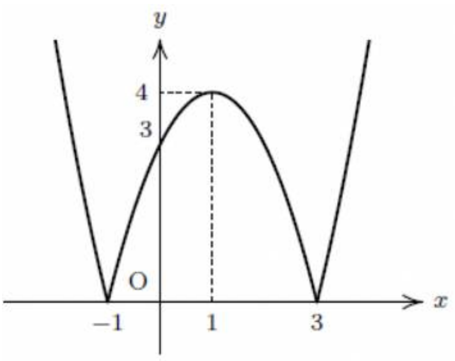
39C　$(x,y)=\left(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ のとき最大値 $\frac{5}{8}$，　$(x,y)=(-1,0)$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}$

40C　2と8

ﾁｬﾚ5　(1) $k=6$　(2) $m(k)=k-4,\ M(k)=k+5$　(3)最大値 $k+4$

2019年度　FG　数学IAIIB　【解答】6講

$\boxed{4\ 1\mathrm{A}}$　(1)右図　(2) $0 < k < 4$



【解法】(1)全体絶対値のグラフ⇒折り返し　(2)定数分離（済）

$\boxed{4\ 2\mathrm{A}}$　$\left(a, b\right) = \left(-1, 1\right)$

【解法】結論からお迎え（解⇔因数）

$\boxed{4\ 3\mathrm{A}}$　$-2\sqrt{6} < k < 2\sqrt{6}$

【解法】不等式＝グラフの上下に帰着

$\boxed{4\ 4\mathrm{A}}$　(1) $-6 < a < \dfrac{10}{3}$　　(2) $a < -1$

【解法】不等式＝グラフの上下に帰着

$\boxed{4\ 5\mathrm{B}}$　$-5 < k < -4$

【解法】方程式の解⇔グラフの共有点の x 座標に対応
（ｉ)定数分離　(ⅱ)絶対値分離　のいずれでも解ける

$\boxed{4\ 6\mathrm{B}}$　$2 \leqq k < \dfrac{5}{2}$

【解法】2次方程式の解の配置問題
「解⇔共有点」の対応を利用して，「軸，端点，判別式」の利用

過去問めぐり・埼玉医大（１）

【１】

$0 \leqq \theta \leqq \pi$とするとき，方程式

$$3\sin^2\theta-(\sqrt{3}-1)\sin\theta\cos\theta+(2-\sqrt{3})\cos^2\theta=2$$

を満たす角θを小さい順に並べよ。

方程式の基本は、$\boxed{\text{因数分解}}$　じゃま、

$A \cdot B=0$

$\Leftrightarrow A=0$ または $B=0$

過去問めぐり・埼玉医大（１）

【１】

0≦θ≦πとするとき，方程式

$2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

2+1

$$3\sin^2\theta-(\sqrt{3}-1)\sin\theta\cos\theta+(2-\sqrt{3})\cos^2\theta=2$$

を満たす角θを小さい順に並べよ。

$$\sin^2\theta-(\sqrt{3}-1)\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\cos^2\theta=0$$

$$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)=0$$

$\sin\theta+\cos\theta=0$ または $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=0$

よって $\theta=\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}$

過去問めぐり・埼玉医大（１）

【１】

$0 \leqq \theta \leqq \pi$とするとき，方程式

$$3\sin^2\theta - (\sqrt{3}-1)\sin\theta\cos\theta + (2-\sqrt{3})\cos^2\theta = 2$$

を満たす角θを小さい順に並べよ。

半角公式

半角

$\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$　$\dfrac{\sin 2\theta}{2}$　$\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

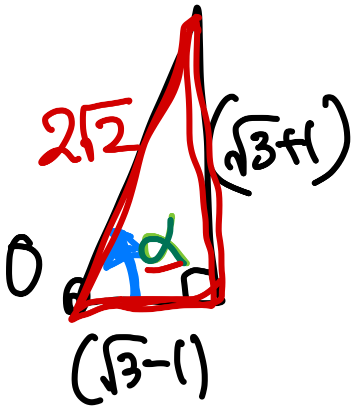
$\times(-2)$

$$\underbrace{(\sqrt{3}-1)\sin 2\theta + (\sqrt{3}+1)\cos\theta}_{\text{合成}} = 1-\sqrt{3}.$$

$(\sqrt{3}-1)\sin 2\theta + (\sqrt{3}+1)\cos\theta = 1-\sqrt{3}.$

合成

$$\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



$$2\sqrt{2}\sin(2\theta+\boxed{\alpha}) = 1-\sqrt{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

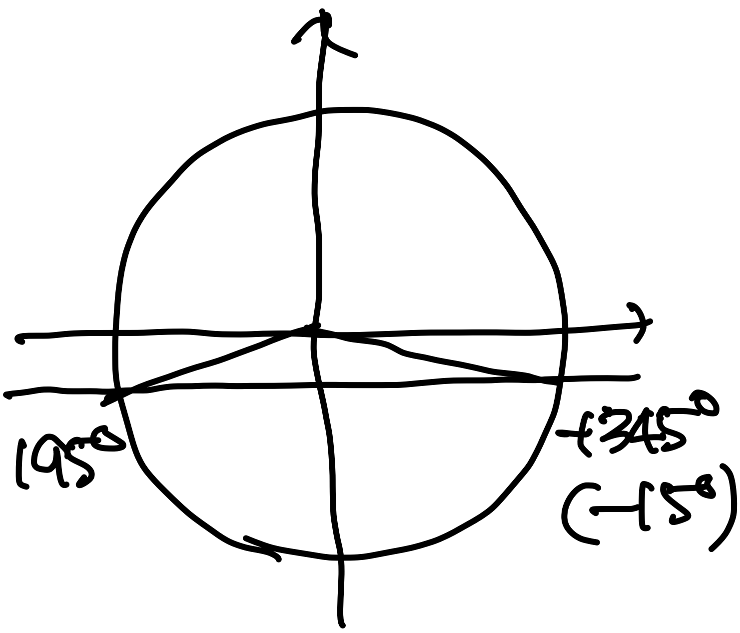
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$45^\circ+30^\circ$

実は $\alpha = 75^\circ$ $\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$\boxed{0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ}$ のもとで解く.

$$\sin(2\theta+75^\circ) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$



$2\theta+75^\circ = 195^\circ,\ 345^\circ$

$2\theta = 120^\circ,\ 270^\circ$

$\theta = 60^\circ,\ 135^\circ$

$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{3\pi}{4}\right)$

$\sin\theta, \cos\theta$ の2次同次式 ⇒ 半角&合成 (は関数など 有効)

【３】

$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{\boxed{(1)}}+\sqrt{\boxed{(2)}}+\sqrt{\boxed{(3)}}$ である。ただし，

$\boxed{(1)} \leqq \boxed{(2)} \leqq \boxed{(3)}$ とする。

$$\boxed{\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b} \quad (a>b)}$$

$$\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}$$

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

【3】

$$\sqrt{\left(\qquad\right)^2}$$

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{\boxed{(1)\ a}}+\sqrt{\boxed{(2)\ b}}+\sqrt{\boxed{(3)\ c}}$$ である。ただし，

$\boxed{(1)} \leqq \boxed{(2)} \leqq \boxed{(3)}$ とする。

2乗 (左辺) $10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$

(右辺)：$a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}$

比較

$a=2,\ b=3,\ c=5$

- 二重根号の公式の証明
- 空欄を文字でおく

三角関数の諸公式

三角関数の定義

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

三角関数の基本公式

①$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

②$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

③$\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

④$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1, -1 \leqq \cos\theta \leqq 1$

加法定理

①$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

②$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

③$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

2倍角公式

①$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

②$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1$

$= 1 - 2\sin^2\theta$

3倍角公式

①$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

②$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

半角公式

①$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$

②$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

③$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

三角関数の合成

$a\sin\theta + b\cos\theta$

$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$

$= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)$

$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

積和変換

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$

和積変換

$\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

変換公式

①$\sin(\theta+2n\pi) = \sin\theta$，$\cos(\theta+2n\pi) = \cos\theta$，$\tan(\theta+2n\pi) = \tan\theta$

②$\sin(-\theta) = -\sin\theta$，$\cos(-\theta) = \cos\theta$，$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

③$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

④$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$，$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$，$\tan(\pi-\theta) = \tan\theta$

⑤$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

⑥$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$，$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$，$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$

三角関数の典型問題

①　$\sin x, \cos x$ の１次式　⇒　合成
②　$\sin x, \cos x$ の２次同次式　⇒　半角＆合成
③　$\sin x, \cos x$ の対称式　⇒　$t = \sin x + \cos x$　でおきかえ

最後の手段

①　$\sin x = Y, \cos x = X$ とおくと，$X^2 + Y^2 = 1$　となり，座標平面に帰着できる

②　$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　となり，分数計算に帰着できる。

準有名角

① $\boxed{15° \text{ family}}$ ～ 加法定理から

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \tan 15° = 2-\sqrt{3}$$

$$\sin 75° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \cos 75° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \tan 75° = 2+\sqrt{3}$$

② $\boxed{22.5° \text{ family}}$ ～ 半角公式から

$$\sin 22.5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad \cos 22.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \tan 22.5° = \sqrt{2}-1$$

③ $\boxed{18° \text{ family}}$ ～ 2倍角＆3倍角，正5角形の対角線利用，相似利用

$$\sin 18° = \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 36° = \sin 54° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

三角関数基本チェック

【例題 06】 $0 \leqq x < \pi$ のとき，方程式 $2\cos 2x + 2(\sqrt{3}-1)\sin x + \sqrt{3} = 2$ を解け

【例題 07】 関数 $f(x) = 3\sin 2x - 4\cos 2x$ の最大値と最小値を求めよ。

【例題 08】 関数 $f(x) = \sin 2x - \sin x - \cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

【例題 09】 関数 $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 4\cos^2 x$ の最大値と最小値を求めよ。

【例題 10】 関数 $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x - 2}$ の最大値と最小値を求めよ。