5/15　国立ぐみ

- 呼び名を決めよう
- 6コウ　計算はOK？
- 21コウへ
- 1回 えんしゅう
- 1回 しゅくだい

47 C

関数 $f(x) = -x^2 + kx + k - 2$，$g(x) = x^2 - (k-2)x + 3$ について，次の条件を満たすような定数 k の値の範囲をそれぞれ求めよ．

(1) どのような実数 x に対しても $f(x) < g(x)$ が成り立つ．

(2) どのような実数 x_1，x_2 に対しても $f(x_1) < g(x_2)$ が成り立つ．

48 C

x についての 2 次方程式 $x^2 - 2kx + 2k^2 - 2 = 0$ が $x > 0$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ．

$-1 < k \leqq \sqrt{2}$

入試問題にチャレンジ (6)

任意の実数 x，y に対して，不等式 $a(x^2 + y^2) - (a+3)xy \geqq 0$ が成り立つような定数 a の最小値を求めよ．

(1999・自治医科大学)

第21講　式と証明(1)

1　整式の除法

2つの整式 $f(x)$, $g(x)$（ただし，$g(x) \neq 0$）に対して，

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$$
$$(R(x)\text{ の次数}) < (g(x)\text{ の次数})\text{ または } R(x) = 0$$

を満たす整式 $Q(x)$, $R(x)$ がただ1組存在する．

$Q(x)$ を，$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの**商**，$R(x)$ を**余り**という．

特に，$R(x) = 0$ のとき，$f(x)$ は $g(x)$ で**割り切れる**という．

2　分数式

A が整式で，B が定数でない整式のとき，$\dfrac{A}{B}$ の形の式を**分数式**という．

3　分数式の四則計算

加法　$\dfrac{A}{C} + \dfrac{B}{C} = \dfrac{A+B}{C}$　減法　$\dfrac{A}{C} - \dfrac{B}{C} = \dfrac{A-B}{C}$

乗法　$\dfrac{A}{B} \times \dfrac{C}{D} = \dfrac{AC}{BD}$　除法　$\dfrac{A}{B} \div \dfrac{C}{D} = \dfrac{A}{B} \times \dfrac{D}{C} = \dfrac{AD}{BC}$

4　恒等式

x がどのような値をとっても，その両辺の式の値が存在する限り，両辺の値が等しいとき，その等式を x についての**恒等式**という．

5　等式 $A = B$ の証明

等式 $A = B$ を証明するとき，次のような方法がよく用いられる．

(i)　A または B の一方を変形して，他方を導く．

(ii)　A, B のそれぞれ変形して，同じ式を導く．

(iii)　$A - B = 0$ を示す．

6　不等式 $A \geqq B$ の証明

$A - B$ が0以上の数の和や積で書けることを利用する方法や，$A - B$ をある文字の関数とみなして値域を調べたりする方法がある．

7　有名な不等式

(1)　**相加平均と相乗平均の大小関係**

$a \geqq 0$, $b \geqq 0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つ．

（等号が成り立つのは $a = b$ のとき）

(2)　**コーシー・シュワルツの不等式**

a, b, x, y が実数のとき，$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geqq (ax + by)^2$ が成り立つ．

（等号が成り立つのは $a : b = x : y$ のとき）

161 A

次の問に答えよ.

(1) x^2-3x-4 を $x+2$ で割った商と余りを求めよ.

(2) x^2+x+1 で割ると，商が $x-1$，余りが $2x+3$ である多項式を求めよ.

(3) x^3-x^2+3x+1 を多項式 $f(x)$ で割ると，商が $x+1$，余りが $3x-1$ であるとき，$f(x)$ を求めよ.

(1) 商は $x-5$, 余りは 6.

(2) x^3+2x+2.

(3) $f(x)=x^2-2x+2$.

162 A

次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{3x-4}{x^2-3x+2}-\dfrac{3x+2}{x^2-4}$

(2) $\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{x-5}{x-4}$

(3) $\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{1+x}}}$

(1) $\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$.

(2) $\dfrac{-8x+12}{x(x+1)(x-3)(x-4)}$.

(3) -1.

$\boxed{係数比較}$, 数値代入

楽

163 A

次の等式が x についての恒等式となるような定数 a, b, c の値を求めよ.

(1) $x^3+x^2-8x+5=(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c$

(2) $\dfrac{3}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

$t=x-2$

(1) $a=7$, $b=8$, $c=1$.

(2) $a=1$, $b=-1$, $c=2$.

164 B 次数下げ

$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x^2 + x - 1$

(2) $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$

165 B

(1) $a+b+c=0$，$abc \neq 0$ のとき，等式

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$$

が成り立つことを示せ．

(2) a，b，c が実数のとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$$

が成り立つことを示せ．

(3) a，b，x，y が実数のとき，不等式

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$$

が成り立つことを示せ．

166 B

$x>0$ のとき，$\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$ の最小値を求めよ．

ムーアヘッドの不等式

(2)　a, b, c が実数のとき，不等式

≧0を作る
平方完成

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$$

が成り立つことを示せ．

$$(\text{左辺})-(\text{右辺}) = a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$$

奇数係数
⇓
分数

$$= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

$$= \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$$

$$\therefore\ (\text{左辺}) \geqq (\text{右辺})$$

$$\boxed{\text{2乗マイナス総あたり} \geqq 0 \text{ 立てくくる}}$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc \leftarrow \text{3乗3積}$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

和でくくり．　　2乗マイナス総あたり．

$\boxed{\text{別証}}$

三宅

(左辺)−(右辺)

$= a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

1文字整理

イチモンジ セイリ

$= a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc$

$= \left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2-\frac{(b+c)^2}{4}+b^2+c^2-bc$

$= \left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(3b^2+3c^2-6bc)$

$= \left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2 \geqq 0$

まず 対称性を利用 → ダメなら くずす

(3) a, b, x, y が実数のとき，不等式

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$$

が成り立つことを示せ．

[解] 左 − 右

$= (\quad)(\quad) - (\quad)^2$

$= (\cancel{a^2x^2} + a^2y^2 + b^2x^2 + \cancel{b^2y^2})$

$\quad - (\cancel{a^2x^2} + 2abxy + \cancel{b^2y^2})$

$= (ay - bx)^2 \geqq 0$ ■.

等号 $ay = bx$

[解2] $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (x, y)$ とおく

$\boxed{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \geqq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$ CS不等式

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

等号は $\vec{u} /\!/ \vec{v} \Leftrightarrow a : b = x : y$.

① 等号がわかりやすい

② 3次元以上に拡張しやすい

C.S不等式 → 実は積分に拡張される.

(1) $\boxed{a+b+c=0}$, $abc \neq 0$ のとき，等式

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{\text{対称性 利用}}$ $\Longrightarrow$ ダメなら一文字消去.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &: a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\
&= \frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b} \\
&= \frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \\
&= \frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c} \\
&= -3 : (\text{右辺}) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x^2 + x - 1$ $= 0$

(2) $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$

(1) $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$2x+1 = \sqrt{5}$

2乗 $4x^2+4x-4=0$

$\therefore \boxed{x^2+x-1} = 0$

(2) $f(x) = 4x^4+3x^3+2x^2+x$ を

$\boxed{x^2+x-1}$ である

ゼロとなる式である

筆算

$f(x) = \underline{(x^2+\cancel{x}-1)(\overset{\text{商}}{4x^2-x+7})} + \overset{\text{あまり}}{\underline{(-7x+7)}}$

$f\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = -7 \times \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 7$

$= \dfrac{21-7\sqrt{5}}{2}$ ——(答)

$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x^2 + x - 1$

(2) $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$

$$f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 0$$

$$= (x^2+x-1)(4x^2 - x + 7) + (-7x-7)$$

$$-5$$

$$(1+7)x$$

(2) (1)より $x^2+x-1=0$

$\therefore \boxed{x^2 = -x+1}$　2次→1次

4次→3次→2次→1

$\cancel{f(x)} = 4x^4+3x^3+2x^2+x$

$= x^2 \times (4x^2+3x+2) + x$　$-4x+4$　$+3x+2$

$= (-x+1)(-x+6) + x$

$= \boxed{x^2} - 7x + 6 + x$　$= -7x+7$　…

$-x+1$

166 B

$x>0$ のとき，$\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$ の最小値を求めよ．

$y=\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$ とおく．

$$=x^2+\frac{36}{x^2}+13$$

$$\geqq 2\sqrt{x^2\times\frac{36}{x^2}}+13$$

$$=25$$

$y\geqq 25$

よって最小値 25

等号は $x^2=\dfrac{36}{x^2}$ つまり $x>0$ より $x=\sqrt{6}$．

よって最小値 25

$\boxed{\text{補足}}$ $y=\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\times\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$

$$\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}\times 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}$$

$$=24$$

$\therefore y\geqq 24$

不等式としては成立するが
等号は成立しない．

167 C

a，bは正の整数とする．$\sqrt{3}$は$\dfrac{a}{b}$と$\dfrac{a+3b}{a+b}$の間にあることを示せ．

168 C

$|x|<1$，$|y|<1$，$|z|<1$のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $xy+1>x+y$

(2) $xyz+2>x+y+z$

入試問題にチャレンジ (21)

実数x，y，zについて$(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$を示し，等号がいつ成り立つかを答えよ．これを用いて，命題

「$x^2+y^2+z^2 \leqq a$ならば$x+y+z \leqq a$である」

が真となる最小の正の実数aを求めよ．

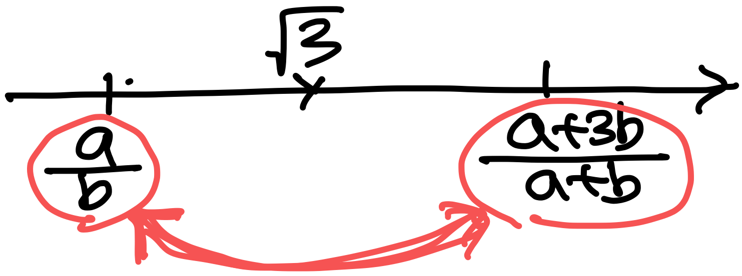
(2005・岡山大学)

167 C

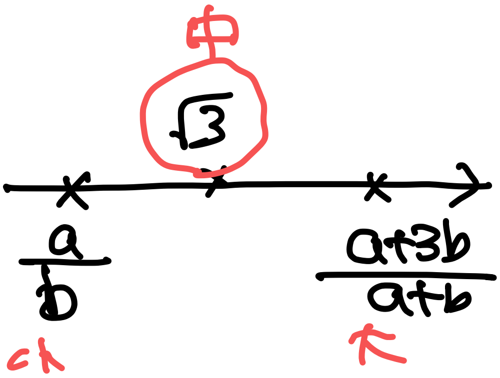
どんなa, bだったとしても　自由

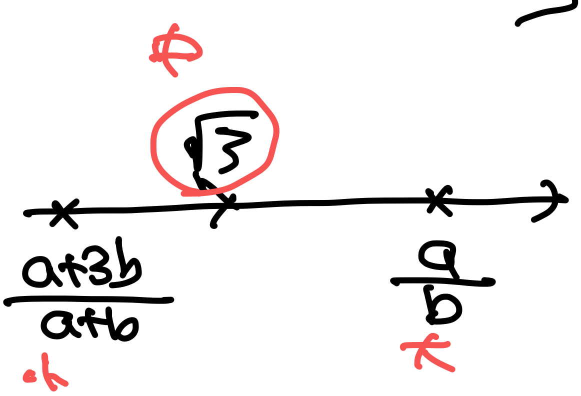
a, b は正の整数とする. $\sqrt{3}$ は $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{a+3b}{a+b}$ の間にあることを示せ.

下書き用紙.



・$\frac{a}{b}$ と $\frac{a+3b}{a+b}$ の大小で場合分けして証明





$$\begin{cases} \dfrac{a+3b}{a+b} - \sqrt{3} > 0 \\ \sqrt{3} - \dfrac{a}{b} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{a+3b}{a+b} - \sqrt{3} < 0 \\ \sqrt{3} - \dfrac{a}{b} < 0 \end{cases}$$

両方正　同符号　$\boxed{\text{束ねる}}$　両方負

$$\left(\frac{a+3b}{a+b} - \sqrt{3}\right) \times \left(\sqrt{3} - \frac{a}{b}\right) > 0$$

積が +

$$\left[\left(\frac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{3}-\frac{a}{b}\right)>0\right]$$

積が ＋

$$\left(\frac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\frac{a}{b}\right) \rightarrow \cancel{\text{展開}}$$

$$=\frac{a+3b-\sqrt{3}(a+b)}{a+b}\times\frac{\sqrt{3}b-a}{b}$$

通分

$$a(1-\sqrt{3})+b(3-\sqrt{3})$$

$$-a(\sqrt{3}-1) \qquad \sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$$

$$=(\sqrt{3}b-a)(\sqrt{3}-1)$$

$$=\frac{\overbrace{(\sqrt{3}b-a)^2}^{0\leqq}\times\overbrace{(\sqrt{3}-1)}^{+}}{\underbrace{(a+b)b}_{+}} \;\cancel{\geqq}\; 0$$

（ただし、等号は成立しない。

$\sqrt{3}b-a=0$ とおくと $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$

となり（無理数）＝（有理数）より矛盾するから）

168 $|x|<1$, $|y|<1$, $|z|<1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $xy+1>x+y$

(2) $xyz+2>x+y+z$

同じx, yとは限らない

$a-b=\triangle(b-a)$

(1) $(xy+1)-(x+y)$

$=x(y-1)+(1-y)$ $\quad -(y-1)$

$=(x-1)(y-1)>0$ より ← $-1<x<1$, $-1<y<1$ より $x-1<0$, $y-1<0$

$xy+1>x+y$ ■

(2) $(xyz+2)-(x+y+z)$

$=x(yz-1)+2-y-z$ …… ひきざんだけでは うまくいかない

(1)が誘導 2つ → 3つ.

(1)より $|a|<1$, $|b|<1$ のとき $ab+1>a+b$

$-1<xy<1$ だから ← 前提条件

ここに. $a=x \cdot y$ $b=z$ を代入.

$xy \times z+1>xy+z$

+1 $xyz+2>xy+1+z$ ——①

また (1)より $xy+1>x+y$

$\therefore$ $xy+1+z>x+y+z$ ——②

①,②より $xyz+2>xy+1+z>x+y+z$

$\therefore$ $xyz+2>x+y+z$ ■

チャレ(21)

~~(前半) 実は CS不等式~~

(後半) 前半の利用　　　$\boxed{答}$ $a=3$.

相加・相乗

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$ とする

$\boxed{2文字}$ $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ (等号 $a=b$)

$\boxed{3文字}$ $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ (等号 $a=b=c$)

$\boxed{4文字}$ $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$ (等号 $a=b=c=d$)

~~$\sqrt{\ } \Rightarrow 2乗$　$\sqrt[3]{\ } \Rightarrow 3乗$~~ あわてるな

地道に

$\boxed{2}$ $a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$

$\boxed{a=(\sqrt[3]{a})^3 など}$

$\boxed{3}$ $a+b+c-3\cdot\sqrt[3]{abc}$

$x=\sqrt[3]{a},\ y=\sqrt[3]{b},\ z=\sqrt[3]{c}$ とおく

$= x^3+y^3+z^3-3xyz$ 3乗 3積

$= \underbrace{(x+y+z)}_{\oplus}(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$= \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geqq 0$

$\boxed{4}$ $a+b+c+d-4\cdot\sqrt[4]{abcd}$

$a=(\sqrt[4]{a})^4$ など

$x=\sqrt[4]{a}$ など

$= x^4+y^4+z^4+w^4-4xyzw$

$=$ 公式なし.

$$a+b+c+d = (a+b)+(c+d)$$
$$\geqq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd}$$
$$= 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)$$
$$\geqq 2\times 2\sqrt{\sqrt{ab}\times\sqrt{cd}}$$
$$= 4\left((ab)^{\frac{1}{2}}\times(cd)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 4(abcd)^{\frac{1}{4}}$$
$$= 4\cdot\sqrt[4]{abcd} \quad \blacksquare$$

$\sqrt{\ } = (\ )^{\frac{1}{2}}$

等号成立は、

$a=b$ かつ $c=d$ かつ $\sqrt{ab}=\sqrt{cd}$

つまり、 $a=b=c=d$ のとき

以上の考え方は、5文字以上に応用しにくい

$$\boxed{2} \longrightarrow \boxed{4} \longrightarrow \boxed{8} \longrightarrow$$

$$3 \leftarrow \qquad 5 \leftarrow 6 \leftarrow 7 \leftarrow$$

$\boxed{二段}$ $\quad \boxed{4} \longrightarrow \boxed{3}$

$$\boxed{\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}}$$

$$d = \boxed{?}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}}$$

連分数.

2次方程式

$$y=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$ とすると y は $\boxed{ay^2+by+c=0}$ を満たす。

ただし $a>0$，a，b，c の最大公約数は 1 とする。

このとき $a=$ $\boxed{\text{ア}}$ ，$b=$ $\boxed{\text{イ}}$ ，$c=$ $\boxed{\text{ウエ}}$ であり，

1　　2　　-1

マトリョーシカ

$$y=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}=y$$

$$y=\frac{1}{2+y}$$

$$y^2+2y-1=0$$

$$y=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

【１】　2010 年｜東京医科歯科大学

a，b，c を相異なる正の実数とするとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　次の 2 数の大小を比較せよ。

a^3+b^3 ,　　a^2b+b^2a

(2)　次の 4 数の大小を比較し，小さい方から順に並べよ。

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$,　　$(a+b+c)(ab+bc+ca)$,

$3(a^3+b^3+c^3)$,　　$9abc$

【解答】

(1)　$a^3+b^3>a^2b+b^2a$，(過程省略)

(2)　$9abc<(a+b+c)(ab+bc+ca)<(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)<3(a^3+b^3+c^3)$，(過程省略)

(3)　$\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}\geqq 6$，(過程省略)