5/19　数学ゼミ　国井組

Slackの案内

- 実験期間なので、メールアドレスは『捨てアド』を使用して下さい
- 不安な人は、実験に参加しないで下さい。不利益のないよう努めます

キャし(22)

23コウ

↓

ワコウ A.

第23講　式と証明(3)

1 **剰余の定理**

整式 $P(x)$ について,

$$(P(x) \text{ を } x-\alpha \text{ で割ったときの余り}) = P(\alpha)$$

2 **因数定理**

整式 $P(x)$ について,

$$「P(x) \text{ が } x-\alpha \text{ で割り切れる}」 \iff P(\alpha)=0$$

3 **3 次方程式の解と係数の関係**

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の **3 つの解を** α, β, γ とすると,

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\qquad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

4 **1 の 3 乗根 ω**

3 次方程式 $x^3=1$ の解を **1 の 3 乗根**という.

さらに, $x^3=1$ の虚数解 $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ の一方を ω と表すことが多い. このとき, 次が成り立つ.

(i) $\omega^3=1$　(ii) $\omega^2+\omega+1=0$　(iii) $\omega^2=\overline{\omega}$

5 **特殊な 4 次方程式**

(1) **複 2 次方程式**

$x^4+ax^2+b=0$ の形の方程式を**複 2 次方程式**という.

(2) **相反方程式**

$a\neq 0$ とするとき, $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ の形の方程式を**相反方程式**という.

177 A $f(x)$

多項式 x^3+3x^2+ax+5 を $x+1$ で割ったときの余りが 3 となるような定数 a の値を求めよ.

剰余の定理より. $f(-1)=3$ 　 $\therefore a=3.$

除法の原理より

$f(x)=(x+1)\cdot Q(x)+3$ 　 $x=-1$ 代入

178 A

次の方程式を解け.

$x=\pm1, \pm2$ 代入 でダメ.

$x=\pm\frac{1}{2}$ 代入

(1) $x^3+3x^2-4=0$

(2) $2x^3-7x^2+2=0$

(3) $(x-1)(x-2)(x-3)=8\cdot7\cdot6$

8 7 6

$\boxed{178\text{A}}$ (1) $x=1,-2$ (2) $x=-\frac{1}{2}, 2\pm\sqrt{2}$ (3) $x=9, \frac{-3\pm\sqrt{143}\,i}{2}$

【解法】因数定理（&解の公式）

179 A

3 次方程式 $2x^3-2x^2+3x+1=0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めよ.

(1) $\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，$\alpha\beta\gamma$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

179 A

$\iff x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$

3 次方程式 $2x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha + \beta + \gamma$，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$，$\alpha\beta\gamma$

(2) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

(3) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

KKKの証明は
解 α ⟷ 因数 $(x-\alpha)$

(与式) $\iff (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0$

$\iff x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$

(1) $\alpha+\beta+\gamma = 1$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{3}{2}$．$\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{2}$．

(2) $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

より．$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = -2$

(3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

より．$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = -5$

$\boxed{\text{別解}}$ α, β, γ は $x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ の解

代入＆次数下げ

$\alpha^3 = \alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}$

$\beta^3 = \beta^2 - \frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2}$

$+)\ \gamma^3 = \gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma - \frac{1}{2}$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - \frac{3}{2}(\alpha+\beta+\gamma) - \frac{3}{2}$

$= -2 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}$

$= \underline{-5}$

$$2x^3 - 7x^2 + 2 = 0$$

$$(x - \boxed{})(2x^2 + \cdots) = 0$$

$$\boxed{} = \pm 1, \pm 2$$

$$(\triangle x - \square)(x^2 + \cdots)$$

$$x = \frac{\square}{\triangle} \qquad \pm\frac{1}{2}$$

整数係数n次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

の有理数解は、存在すれば

$$x = \pm\frac{(a_0 の約数)}{(a_n の約数)} \quad \begin{matrix} \leftarrow \square \\ \leftarrow \triangle \end{matrix}$$

証明 いずれ扱う.

$\boxed{１７７A}$　$a=4$

【解法】剰余の定理　←　「除法の原理」

$\boxed{１７８A}$　(1)　$x=1,-2$　(2)　$x=-\dfrac{1}{2}, 2\pm\sqrt{2}$　(3)　$x=9, \dfrac{-3\pm\sqrt{143}\,i}{2}$

【解法】因数定理（＆解の公式）

$\boxed{１７９A}$　(1)　順に$1, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}$　(2)　-2　(3)　-5

【解法】解と係数の関係＆対称式の変形　(3)は「三乗三積」の公式 or 次数下げ

180 B

多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 2，$x-2$ で割ると余りが 3 である．このとき，$f(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りを求めよ．

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)\cdot Q_1(x)+2 \\ f(x)=(x-2)Q_2(x)+3 \\ f(x)=\underbrace{(x-1)(x-2)}_{\text{2次でわる}}Q_3(x)+\underbrace{ax+b}_{\text{あまりは1次以下.}} \end{cases}$$

とおくと

2次でわる → あまりは1次以下.

$f(1)=2=a+b$

$f(2)=3=2a+b$

$\therefore a=b=1$

求める あまりは

$x+1$

181 B

実数を係数とする 3 次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $3+2i$ を解にもつとする．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 係数 a，b の値を求めよ．さらに，他の 2 つの解を求めよ．

(2) 3 つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ の値を求めよ．

182 B

方程式

$$2x^4-9x^3-x^2-9x+2=0 \qquad \cdots (*)$$

について，次の問に答えよ．

(1) $t=x+\dfrac{1}{x}$ とおいて，$(*)$ を t の方程式で表せ．

(2) $(*)$ を解け．

181

実数を係数とする3次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $3+2i$ を解にもつとする．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 係数 a，b の値を求めよ．さらに，他の2つの解を求めよ．

(2) 3つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ の値を求めよ．

[解1] $x=3+2i$ を代入 & 実部・虚部の比較

[解2] 共役解　a, b：実数

$a+bi$ が解 $\longrightarrow$ $a-bi$ も解.

これが成り立つのは、方程式が $\boxed{\text{実数係数 n次方程式}}$ のときである.

誤

実数係数 だから $3-2i$ も解.

3つ目の解を γ とおくと

$\alpha=3+2i$
$\beta=3-2i$
γ

①

KKK

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)+\gamma=5 \\ \alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)=a \\ \alpha\beta\times\gamma=-b \end{cases}$$

⋮

②

解 ↔ 因数

⇓

係数比較

③

②　与式は、次のように表せる

$$\left(x-(3+2i)\right)\left(x-(3-2i)\right)\left(x-\quad\right)=0$$

α　β　γ

$$1\times(x^2-6x+11)(x-\gamma)=0 \quad\text{——}※$$

これが $1\times x^3-5x^2+ax+b=0$ と同値.

x^2の係数に着目して　$\gamma=-1$

よって．$a=7$，$b=13$

他の2つの解は．$3-2i$，-1　答

③　x^3-5x^2+ax+b が

$(3\pm2i$から作られる式$)$ $x^2-6x+11$

で割り切れることを利用.

実数を係数とする3次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $3+2i$ を解にもつとする．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 係数 a，b の値を求めよ．さらに，他の2つの解を求めよ．

(2) 3つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ の値を求めよ．

(1)より．α, β, γ は．$x^3-5x^2+7x+13=0$ の3解

$\boxed{\text{Step I.}}$

$$\begin{cases} \alpha^3 = 5\alpha^2-7\alpha-13 \\ \beta^3 = 5\beta^2-7\beta-13 \\ \gamma^3 = 5\gamma^2-7\gamma-13 \end{cases}$$

KKK

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 5(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-7(\alpha+\beta+\gamma)-39$$

$\boxed{\text{Step II}}$

$$\begin{cases} \alpha^4 = 5\alpha^3-7\alpha^2-13\alpha \\ \beta^4 = 5\beta^3-7\beta^2-13\beta \\ \gamma^4 = 5\gamma^3-7\gamma^2-13\gamma \end{cases}$$

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 = 5(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-7(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-13(\alpha+\beta+\gamma)$$

$\boxed{\text{Step III}}$ $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$

181

実数を係数とする3次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $3+2i$ を解にもつとする．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 係数 a，b の値を求めよ．さらに，他の2つの解を求めよ．

(2) 3つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ の値を求めよ．

(1)より．α, β, γ は．$x^3-5x^2+7x+13=0$ の3解

γ を -1 とみなせる

$$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5 = \alpha^5+\beta^5-1$$

(1)より $\gamma=-1$，α と β は $x^2-6x+11=0$ の2解 としてよい

$$\begin{cases}\alpha+\beta=6\\ \alpha\beta=11\end{cases}$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=10$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=-18$$
$$\alpha^5+\beta^5=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$$
$$=-1194$$
$$\therefore\ \alpha^5+\beta^5+\gamma^5=-1195$$

別解

漸化式を利用．

漸化式の利用

α, β : $x^2-6x+13=0$ の2解

$x_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく

同型

$x_1=\alpha+\beta=6$

$x_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=10$

$\vdots$

解代入

$\alpha^2=6\alpha-13$, $\beta^2=6\beta-13$ より

$(解)^n$をかける.

$\alpha^{n+2}=6\alpha^{n+1}-13\alpha^n$, $\beta^{n+2}=6\beta^{n+1}-13\beta^n$

和をとると

$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=6(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-13(\alpha^n+\beta^n)$

$\therefore\ x_{n+2}=6x_{n+1}-13x_n$

$x_3=6x_2-13x_1=\cdots=-18$

$x_4=6x_3-13x_2=\cdots=-238$

$x_5=6x_4-13x_3=\cdots=-1194$

$$2x^4 - 9x^3 - x^2 - 9x + 2 = 0 \qquad \cdots (*)$$

相反方程式
・降べきで整理すると係数が左右対称に並ぶ式
4次だとまん中 x^2 でわって $t = x + \frac{1}{x}$ でおきかえ

$$2x^2 - 9x - 1 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

($x \neq 0$ より)

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$t = x + \frac{1}{x}$ とおくと $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ より

$$2(t^2 - 2) - 9t - 1 = 0$$

$$2t^2 - 9t - 5 = 0$$

$$(2t + 1)(t - 5) = 0$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2},\ 5$$

$t = -\frac{1}{2}$ のとき $x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$ より

$$2x^2 + x + 2 = 0 \qquad \therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}$$

$t = 5$ のとき $x + \frac{1}{x} = 5$ より

$$x^2 - 5x + 1 = 0 \qquad \therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4},\ \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$\boxed{練習}$

$$2x^5-7x^4-10x^3-10x^2-7x+2=0$$

を解け

相反方程式だが、まん中がない。

$$2(\underbrace{x^5+1}_{(x+1)(\quad)})-7x(\underbrace{x^3+1}_{(x+1)(\quad)})-10x^2(x+1)=0$$

$\Rightarrow$ $x=-1$ を解にもつ $\Leftrightarrow$ $(x+1)$ でくくれる

$$(x+1)(2x^4-9x^3-x^2-9x+2)=0$$

$\therefore x=-1$, $\underline{2x^4-9x^3-x^2-9x+2=0}$

まん中のある相反方程式

$\boxed{1\&2\text{ と同一}}$

183 C

多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 5，$(x+2)^2$ で割ると余りが $-23x-35$ である．このとき，$f(x)$ を $(x-1)(x+2)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

184 C

1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，

$$\omega^{2n}+\omega^n+1$$

の値を求めよ．ただし，n は自然数とする．

入試問題にチャレンジ (23)

多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか．

(2003・京都大学)

183 C

多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 5，$(x+2)^2$ で割ると余りが $-23x-35$ である．このとき，$f(x)$ を $(x-1)(x+2)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

$$f(x)=(x-1)Q_1(x)+5$$
$$f(x)=(x+2)^2\cdot Q_2(x)+(-23x-35)$$
$$f(x)=(x-1)(x+2)^2\cdot Q_3(x)+\boxed{}$$

あまりを ax^2+bx+c とおく

$$\begin{cases} f(1)=5=a+b+c \\ f(-2)=11=4a-2b+c \end{cases}$$

一式たりない

$$f(x)=(x-1)Q_1(x)+5$$
$$f(x)=(x+2)^2\cdot Q_2(x)+(-23x-35)$$
$$f(x)=(x-1)(x+2)^2\cdot Q_3(x)+\boxed{a(x+2)^2+(-23x-35)}$$

$(x-1)(x+2)^2$ で割ったあまり（2次） $=$ （$(x+2)^2$ で割り切れる a 部分）$+$（$(x+2)^2$ で割り切れない部分）

$f(1)=9a-58=5 \quad \therefore a=7$

求めるあまりは．

$$9(x+2)^2-23x-35=\underline{7x^2+5x-7}$$

2019年度　FG　数学IAIIB　【解答】２３講

$\boxed{１７７A}$　$a=4$

【解法】剰余の定理　←　「除法の原理」

$\boxed{１７８A}$　(1)　$x=1,-2$　(2)　$x=-\dfrac{1}{2}, 2\pm\sqrt{2}$　(3)　$x=9, \dfrac{-3\pm\sqrt{143}\,i}{2}$

【解法】因数定理（＆解の公式）

$\boxed{１７９A}$　(1)　順に$1, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}$　(2)　-2　(3)　-5

【解法】解と係数の関係＆対称式の変形　(3)は「三乗三積」の公式 or 次数下げ

$\boxed{１８０B}$　$x+1$

【解法】　剰余の定理，2次で割った余りは1次以下を$ax+b$とおき除法の原理

$\boxed{１８１B}$　(1)　$a=7, b=13$　他の解は$3-2i, -1$　(2)　-1195

【解法】(1)共役解からの，①KKK，②文字設定して係数比較，　$3+2i$を代入してもよい。

(2)1解簡単　⇒　2文字の対称式変形　（一般化して漸化式を立式してもよい）

$\boxed{１８２B}$　(1)　$2t^2-9t-5=0$　(2)　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}, \dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

【解法】相反方程式

(1) x^2で割って置き換え（対称式の変形），(2)2段階に2次方程式を解く。

談話室マロニエ♪　過去問めぐり・整式の割り算

【１】2011 岩手医科大学

x の整式 $\mathrm{P}(x)$ を x^2+1，x^2+2 で割ったときの余りをそれぞれ $4x+4$，$4x+8$ とするとき，以下の設問に答えよ。

(1)　$\mathrm{P}(x)$ を $(x^2+1)(x^2+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

(2)　$\mathrm{P}(x)$ を 5 次の多項式として，$\mathrm{P}(0)=-2$，$\mathrm{P}(1)=6$ とするとき，$\mathrm{P}(x)$ を求めよ。

【２】2011 慶應義塾大学 2/21, 1次 医

以下の文章の空欄に適切な**数または式**を入れて文章を完成させなさい。

(1)　n は 3 以上の奇数として，多項式 $P(x)=x^n-ax^2-bx+2$ を考える。$P(x)$ が x^2-4 で割り切れるときは $a=\boxed{\text{(あ)}}$，$b=\boxed{\text{(い)}}$ であり，$(x+1)^2$ で割り切れるときは $a=\boxed{\text{(う)}}$，$b=\boxed{\text{(え)}}$ である。

【解答１】

2 **解答** (1) $P(x)$ を x^2+1, x^2+2 で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ とすると，与えられた条件から

$$P(x)=(x^2+1)Q_1(x)+4x+4 \quad \cdots\cdots①$$
$$P(x)=(x^2+2)Q_2(x)+4x+8 \quad \cdots\cdots②$$

と表せる。

さらに，$P(x)$ を 4 次式 $(x^2+1)(x^2+2)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$ とし，余りを ax^3+bx^2+cx+d とすると

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+ax^3+bx^2+cx+d \quad \cdots\cdots③$$

と表せる。

ここで，ax^3+bx^2+cx+d を x^2+1 で割ることにより③を変形すると

$$\begin{aligned} P(x)&=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+(ax+b)(x^2+1)+(c-a)x+(d-b) \\ &=(x^2+1)\{(x^2+2)Q_3(x)+(ax+b)\}+(c-a)x+(d-b) \end{aligned}$$

よって，①より $(c-a)x+(d-b)$ と $4x+4$ は一致するから

$$c-a=4 \quad \cdots\cdots④$$
$$d-b=4 \quad \cdots\cdots⑤$$

また，ax^3+bx^2+cx+d を x^2+2 で割ることにより③を変形すると

$$\begin{aligned} P(x)&=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+(ax+b)(x^2+2) \\ &\qquad +(c-2a)x+(d-2b) \\ &=(x^2+2)\{(x^2+1)Q_3(x)+(ax+b)\}+(c-2a)x+(d-2b) \end{aligned}$$

よって，②より $(c-2a)x+(d-2b)$ と $4x+8$ は一致するから

$$c-2a=4 \quad \cdots\cdots⑥$$
$$d-2b=8 \quad \cdots\cdots⑦$$

④，⑥より　　$a=0$, $c=4$

⑤，⑦より　　$b=-4$, $d=0$

したがって，求める余りは

$$-4x^2+4x \quad \cdots\cdots(答)$$

参考　①，②，③に $x=i$, $\sqrt{2}\,i$ を代入することにより求めることもできる。

そのために③を次のようにしておく。

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+ax^3+bx^2+cx+d \quad \cdots\cdots ③$$

（ただし，a，b，c，d は実数の定数とする）

①，③に $x=i$ をそれぞれ代入すると

$$(P(i)=)4i+4=ai^3+bi^2+ci+d$$

$$(d-b)+(c-a)i=4+4i$$

a，b，c，d は実数より

$$d-b=4 \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$c-a=4 \quad \cdots\cdots ④$$

また，②，③に $x=\sqrt{2}\,i$ をそれぞれ代入すると

$$(P(\sqrt{2}\,i)=)4\sqrt{2}\,i+8=a(\sqrt{2}\,i)^3+b(\sqrt{2}\,i)^2+c(\sqrt{2}\,i)+d$$

$$(d-2b)+\sqrt{2}\,(c-2a)i=8+4\sqrt{2}\,i$$

a，b，c，d は実数より

$$d-2b=8 \quad \cdots\cdots ⑦$$

$$c-2a=4 \quad \cdots\cdots ⑥$$

となり，以下，〔解答〕と同様。

(2)　(1)の結果より

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)-4x^2+4x$$

$P(x)$ が5次の多項式であるとき，$Q_3(x)$ は $px+q$（$p\neq 0$）と表せるから，$P(x)$ は次のようになる。

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)(px+q)-4x^2+4x \quad \cdots\cdots ⑧$$

$P(0)=-2$ より

$$2q=-2 \qquad \therefore \quad q=-1 \quad \cdots\cdots ⑨$$

$P(1)=6$ より

$$6(p+q)=6 \qquad \therefore \quad p+q=1 \quad \cdots\cdots ⑩$$

⑨，⑩より　　$p=2$，$q=-1$

したがって，求める $P(x)$ は，これらを⑧に代入すると

$$\begin{aligned} P(x)&=(x^2+1)(x^2+2)(2x-1)-4x^2+4x \\ &=2x^5-x^4+6x^3-7x^2+8x-2 \quad \cdots\cdots (答) \end{aligned}$$

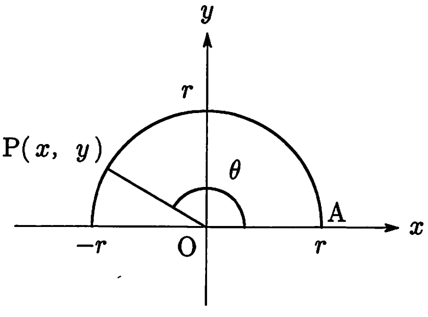
【解答２】2011 慶應義塾大学

(1)　(あ) $\frac{1}{2}$　(い) 2^{n-1}　(う) $-n-1$　(え) $-n-2$

第7講　三角比(1)

1 三角比の定義

O を原点とする座標平面上で A$(r,\ 0)$ $(r>0)$ とし，半円周 $x^2+y^2=r^2$ $(y \geqq 0)$ 上にある点 P$(x,\ y)$ を考える。



$\angle \mathrm{POA}=\theta$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とするとき，

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

と定義する．$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ をそれぞれ θ の**正弦**，**余弦**，**正接**という．

2 三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

3 $90^\circ-\theta$ の三角比

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$$

4 $180^\circ-\theta$ の三角比

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$$

49 A

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする.

(1) $\cos\theta = \dfrac{2}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ.

(2) $\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ.

50 A

次の式を簡単にせよ.

(1) $\sin(90° - \theta) + \sin(180° - \theta) - \cos(90° - \theta) + \cos(180° - \theta)$

(2) $\sin 10° \cos 80° - \sin 100° \cos 170°$

51 A

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の方程式を解け.

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

52 B

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする.

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ.

(2) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{23}{17}$ のとき，$\sin\theta$ の値を求めよ.

(3) $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ.

53 B

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の方程式を解け.

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

(2) $2\cos^2\theta = 1$

(3) $\tan^2\theta - (\sqrt{3} - 1)\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

54 B

三角形 ABC の ∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とするとき，

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

が成り立つことを示せ.

55 C

$0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ とする．$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 9$ のとき，$\sin\theta - \cos\theta$ の値を求めよ．

56 C

正五角形 ABCDE において，対角線 AC と BE の交点を F，対角線 AD と BE の交点を G とする．

(1) 三角形 ABG と三角形 GAF は相似であることを証明せよ．

(2) $\mathrm{BF} = 1$ のとき，辺 AB の長さを求めよ．

(3) $\cos 36^\circ$ の値を求めよ．

入試問題にチャレンジ (7)

$0^\circ < \theta < 45^\circ$ のとき，縦と横の長さがそれぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$ の長方形がある．この長方形を半分に折ってできる長方形がもとの長方形と相似であるとき，もとの長方形の面積はいくらか．また，もとの長方形の縦と横の長さの比はいくらか．

(2000・藤田保健衛生大学)

2019年度　FG　数学IAIIB　【解答】7講

49A　(1)　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$，　$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$　(2)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，　$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

【解法】三角関数の相互関係 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

50A　(1)　0　(2)　1

【解法】三角関数の変換公式　$90°-\theta, 180°-\theta$

51A　(1)　$\theta=45°$，　$135°$　(2)　$\theta=150°$　(3)　$\theta=120°$

【解法】三角関数の方程式

52B　(1)　$\cos\theta=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，　$\tan\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(2)　$\sin\theta=\dfrac{8}{17}$，　$\dfrac{5}{17}$

(3)　$\tan\theta=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

【解法】三角関数の相互関係

53B　(1)　$\theta=30°$，　$150°$　(2)　$\theta=45°$，　$135°$　(3)　$\theta=60°$，　$135°$

【解法】三角関数の方程式

54B　方針：$A+B+C=180°$ を利用，変換公式へ。

入試問題にチャレンジ (22) 　$\boxed{答}\ -\sqrt[4]{8} \leqq x \leqq \sqrt[4]{8}$

0 以上の実数 s，t が $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$

の解のとる値の範囲を求めよ．

x

逆手流かな？

4次方程式　（4次，2次，定数項のみ）　4次 → 2次

$X=x^2$ とおくと

$X^2-2(s+t)X+(s-t)^2=0$ ㊉ 2次

$\boxed{方針}$ ・Xの2次方程式 ㊉ の解の範囲

（$X \Longrightarrow x$　2乗を外す）

・だが，定数が2文字（条件式1つ）

実質1文字

$k=s+t$ とおくと　$s^2+t^2=1$ より

対称式

◎ $(s-t)^2=(s+t)^2-4st=k^2-4\boxed{st}$

● $(s+t)^2=s^2+t^2+2\boxed{st}$ より

$2\boxed{st}=k^2-1$

$\therefore (s-t)^2=k^2-2(k^2-1)=2-k^2$

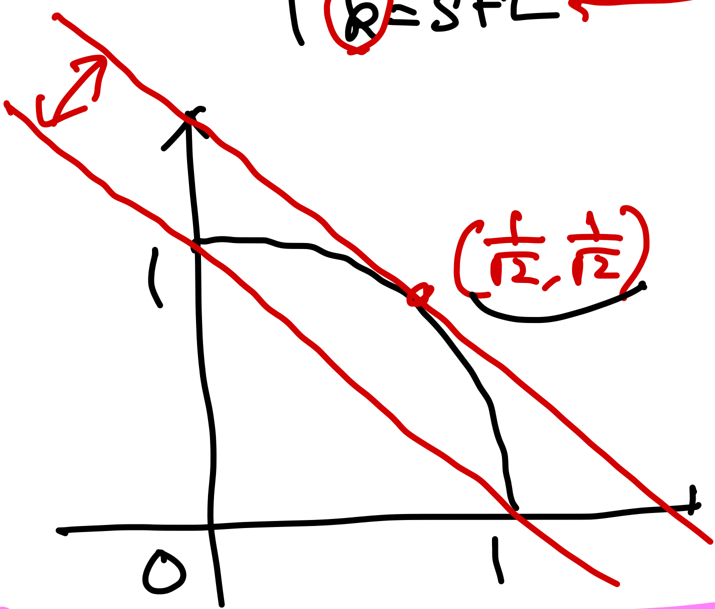
$\therefore X^2-2kX+2-k^2=0$

（ただし k には条件があるはず）

の解のとる範囲を求めよ

ここで $\begin{cases} s \geqq 0,\ t \geqq 0,\ s^2+t^2=1. \\ k = s+t \end{cases}$ ← 円の一部

← より 直線



$1 \leqq k \leqq \sqrt{2}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 - 2kx + 2 - k^2 = 0 \quad (1 \leqq k \leqq \sqrt{2}) \\ \text{の解のとりうる値の範囲を求める.} \end{array}}$$

あとは 逆手流 D, 軸, 端点

↓ 法

$$0 \leqq X \leqq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$0 \leqq x^2 \leqq \sqrt{8}$$

$$-\sqrt[4]{8} \leqq x \leqq \sqrt[4]{8}$$

別): $s = \cos\theta,\ t = \sin\theta$ でおきかえ

入試問題にチャレンジ (22)

0 以上の実数 s，t が $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$

の解のとる値の範囲を求めよ．

【解答】 (2005・東京大学)

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0 \quad \cdots ①$$

において，$x^2=X$ とすると，①は，

$$X^2-2(s+t)X+(s-t)^2=0. \quad \cdots ②$$

ここで，②の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(s+t)^2-(s-t)^2$$
$$=4st,$$
$$(\text{②の解の和})=2(s+t),$$
$$(\text{②の解の積})=(s-t)^2$$

であるから，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ より，

$$\begin{cases} D\geqq 0, \\ (\text{②の解の和})\geqq 0, \\ (\text{②の解の積})\geqq 0. \end{cases}$$

したがって，②の 2 つの解はともに 0 以上であるから，①の解はすべて実数である．

ここで，

$$s+t=k$$

とすると，

$$\begin{cases} s^2+t^2=1, \\ (s-t)^2=2(s^2+t^2)-(s+t)^2 \end{cases}$$

より，

$$(s-t)^2=2-k^2$$

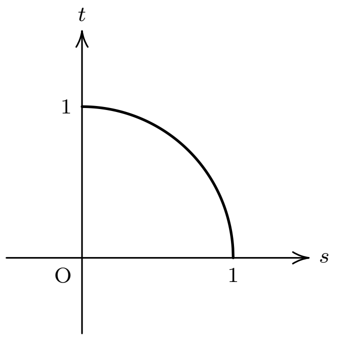
であるから，①は，

$$x^4-2kx^2+2-k^2=0. \quad \cdots ③$$

さらに，st 平面において，条件

$$s\geqq 0,\quad t\geqq 0,\quad s^2+t^2=1$$

を満たす点 (s，t) の存在範囲は次の図の太線部分である．



これと直線 $s+t=k$ との共有点を考えることより，k のとり得る値の範囲は，

$$1\leqq k\leqq \sqrt{2}. \quad \cdots ④$$

以上より，①の解 x のとる値の範囲は，k の方程式③が④の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような x の値の範囲と一致する．

③を k について整理すると，

$$k^2+2x^2k-2-x^4=0$$

であるから，

$$f(k)=k^2+2x^2k-2-x^4$$

とすると，

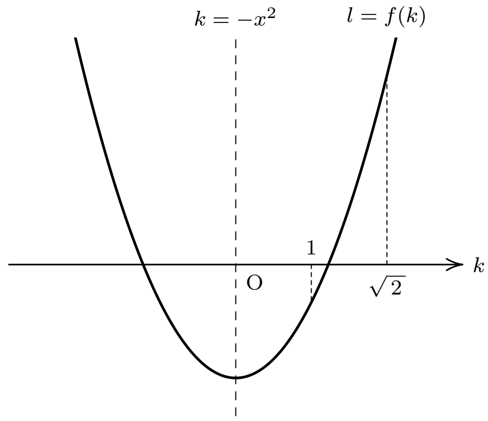
$$f(k)=(k+x^2)^2-2-2x^4.$$

したがって，放物線 $l=f(k)$ の軸について，

$$k=-x^2\leqq 0$$

が成り立つので，③が④の範囲に少なくとも 1 つの解をもつ条件は，

$$\begin{cases} f(1)\leqq 0, & \cdots ⑤ \\ f(\sqrt{2})\geqq 0. & \cdots ⑥ \end{cases}$$



ここで，

$$f(1)=1^2+2x^2-2-x^4$$
$$=-(x^2-1)^2\leqq 0$$

であるから，⑤はつねに成り立つ．

また，⑥より，

$$(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}x^2-2-x^4\geqq 0$$
$$x^4-2\sqrt{2}x^2\leqq 0$$

であるから，

$$x^2\leqq\sqrt{8}.$$

以上より，①の解 x のとる値の範囲は，

$$-\sqrt[4]{8}\leqq x\leqq\sqrt[4]{8}.$$

【１】　2010 年｜東京医科歯科大学

a，b，c を相異なる正の実数とするとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　次の 2 数の大小を比較せよ。

a^3+b^3 ,　　a^2b+b^2a

(2)　次の 4 数の大小を比較し，小さい方から順に並べよ。

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$,　　$(a+b+c)(ab+bc+ca)$,

$3(a^3+b^3+c^3)$,　　$9abc$

a, b, c を相異なる正の実数とするとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　次の 2 数の大小を比較せよ。

$a^3+b^3, \qquad a^2b+b^2a$

(a=1, b=2 だと 9 v.s 6)

$a^3+b^3-(a^2b+b^2a)$

$=a^2(a-b)+b^2(b-a)$

$=(a-b)(a^2-b^2)$

$=(a-b)^2(a+b)>0$ より

$a^3+b^3>a^2b+b^2a$

(2)　次の 4 数の大小を比較し，小さい方から順に並べよ。

$A=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$, $B=(a+b+c)(ab+bc+ca)$,

$C=3(a^3+b^3+c^3)$, $D=9abc$

展開すれば…??

$(a,b,c)=(1,2,3)$ とすると‥‥

$(A,B,C,D)=(84, 66, 108, 27)$

③ ② ④ ①

$D<B<A<C$ と予測

easy?

easy?

${}_4C_2=6$

(2) 次の 4 数の大小を比較し，小さい方から順に並べよ。

A $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$, B $(a+b+c)(ab+bc+ca)$,

C $3(a^3+b^3+c^3)$, D $9abc$

$\boxed{B \text{と} A}$

$$A-B=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}$$

2乗マイナス積あたり

$$=(a+b+c)\times\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}>0$$

$\frac{1}{2}$ でくくると....

$\therefore A>B.$

$\boxed{C \text{と} A}$

$$C-A=3(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

$$=3a^3+3b^3+3c^3-(a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)$$

$$=2a^3+2b^3+2c^3-(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)$$

$$=(a^3+b^3-a^2b-ab^2)+(b^3+c^3-b^2c-bc^2)+(c^3+a^3-c^2a-ca^2)$$

(1)と同型

>0

$\therefore C>A$

(2) 次の 4 数の大小を比較し，小さい方から順に並べよ。

A $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$, B $(a+b+c)(ab+bc+ca)$,

C $3(a^3+b^3+c^3)$, D $9abc$

$\boxed{D<B}$

$$B-D=(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc$$

$$=3abc+a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b-9abc$$

$$=a^2b+ac^2+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b-6abc \qquad 3\times 2abc$$

$$=a(b^2+c^2-2bc)+b(c^2+a^2-2ca)+c(a^2+b^2-2ab)$$

$$=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2>0$$

$$\therefore B>D$$

以上より

$$D<B<A<C$$

以上が，知識のない人が，誘導にのる & パズル的に解いた 解法

チェビシェフの不等式 (背景)

結婚 & G.D.P.を高める.

チェビシェフの素

男: $a<b$ (小 大)　女: $x<y$ (小 大)

$$\underline{ax} + \underline{by} > ay + bx$$

小小　大大　　小大　大小

$a<b<c$　　$x<y<z$

$$ax+by > ay+bx$$
$$ax+cz > az+cx$$
$$by+cz > bz+cy$$
$$+\quad ax+by+cz = ax+by+cz$$

$$2(ax+by+cz) > a(y+z)+b(x+z)+c(x+y)$$

ax　by　cz

$$3(ax+by+cz) > a(x+y+z)+b(x+y+z)+c(x+y+z)$$

$$3(ax+by+cz) > (a+b+c)(x+y+z)$$