5/20(水) 数学ゼミ 国立組

- 宿 逆手のれんしゅう。
- 整式のわりざん 演

- 23コめC
- 9コめABC

8コめAB C..
[週テストはんい].

2 【例題 09】 hint

x, y が実数値をとって変わるとき，$\dfrac{x+2y+5}{x^2+y^2+15}$ の最大値と最小値を求めよ。

1 【例題 10】

実数 t が $0 \leqq t \leqq 2$ を満たすとき，2 次方程式 $x^2-2tx+2t^2-4=0$ の実数解 x のとり得る値の範囲を求めよ。

【１】2011 岩手医科大学

x の整式 P(x) を x^2+1，x^2+2 で割ったときの余りをそれぞれ $4x+4$，$4x+8$ とするとき，以下の設問に答えよ。

(1)　P(x) を $(x^2+1)(x^2+2)$ で割ったときの余りを求めよ。 $-4x^2+4x$

4次

~~(2)　P(x) を 5 次の多項式として，P(0) = −2，P(1) = 6 とするとき，P(x) を求めよ。~~

$P(x)=(x^2+1)\cdot(x^2+2)\cdot Q(x)+ax^3+bx^2+cx+d$

$x=i$, $\cancel{-i}$, $\sqrt{2}i$, $\cancel{-\sqrt{2}i}$ 代入

〇【解1】．虚数でも強引に代入　（略）．

$x=i$, $\sqrt{2}i$ を代入

& 実部・虚部を比較

〇【解2】．$x=i$ はがまんできるが

$x=\sqrt{2}i$ は代入できない… と思ったとする

$P(x)=(x^2+1)Q_1(x)+4x+4$

$P(x)=(x^2+2)Q_2(x)+4x+8$

3次以下

・$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+\boxed{(ax+b)(x^2+2)+4x+8}$

[$(x^2+1)(x^2+2)$ で割ったあまり] = [(x^2+2) で割り切れる] + [(x^2+2) で割り切れない]

ここに $x=i$ を代入 …

【２】2011 慶應義塾大学 2/21，1次 医　　自習用

以下の文章の空欄に適切な**数または式**を入れて文章を完成させなさい。

(1)　n は 3 以上の奇数として，多項式 $P(x)=x^n-ax^2-bx+2$ を考える。$P(x)$ が x^2-4 で割り切れるときは $a=$ $\boxed{\text{(あ)}}$ ，$b=$ $\boxed{\text{(い)}}$ であり，$(x+1)^2$ で割り切れるときは $a=$ $\boxed{\text{(う)}}$ ，$b=$ $\boxed{\text{(え)}}$ である。

【解答１】

2 **解答** (1) $P(x)$ を x^2+1，x^2+2 で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とすると，与えられた条件から

$$P(x)=(x^2+1)Q_1(x)+4x+4 \quad \cdots\cdots①$$

$$P(x)=(x^2+2)Q_2(x)+4x+8 \quad \cdots\cdots②$$

と表せる。

さらに，$P(x)$ を 4 次式 $(x^2+1)(x^2+2)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$ とし，余りを ax^3+bx^2+cx+d とすると

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+ax^3+bx^2+cx+d \quad \cdots\cdots③$$

と表せる。

ここで，ax^3+bx^2+cx+d を x^2+1 で割ることにより③を変形すると

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+(ax+b)(x^2+1)+(c-a)x+(d-b)\\&=(x^2+1)\{(x^2+2)Q_3(x)+(ax+b)\}+(c-a)x+(d-b)\end{aligned}$$

よって，①より $(c-a)x+(d-b)$ と $4x+4$ は一致するから

$$c-a=4 \quad \cdots\cdots④$$

$$d-b=4 \quad \cdots\cdots⑤$$

また，ax^3+bx^2+cx+d を x^2+2 で割ることにより③を変形すると

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+(ax+b)(x^2+2)\\&\qquad\qquad+(c-2a)x+(d-2b)\\&=(x^2+2)\{(x^2+1)Q_3(x)+(ax+b)\}+(c-2a)x+(d-2b)\end{aligned}$$

よって，②より $(c-2a)x+(d-2b)$ と $4x+8$ は一致するから

$$c-2a=4 \quad \cdots\cdots⑥$$

$$d-2b=8 \quad \cdots\cdots⑦$$

④，⑥より　　$a=0$，$c=4$

⑤，⑦より　　$b=-4$，$d=0$

したがって，求める余りは

$$-4x^2+4x \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

参考 ①，②，③に $x=i$，$\sqrt{2}\,i$ を代入することにより求めることもできる。

そのために③を次のようにしておく。

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+ax^3+bx^2+cx+d \quad \cdots\cdots ③$$

（ただし，a，b，c，d は実数の定数とする）

①，③に $x=i$ をそれぞれ代入すると

$$(P(i)=)4i+4=ai^3+bi^2+ci+d$$

$$(d-b)+(c-a)i=4+4i$$

a，b，c，d は実数より

$$d-b=4 \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$c-a=4 \quad \cdots\cdots ④$$

また，②，③に $x=\sqrt{2}i$ をそれぞれ代入すると

$$(P(\sqrt{2}i)=)4\sqrt{2}i+8=a(\sqrt{2}i)^3+b(\sqrt{2}i)^2+c(\sqrt{2}i)+d$$

$$(d-2b)+\sqrt{2}(c-2a)i=8+4\sqrt{2}i$$

a，b，c，d は実数より

$$d-2b=8 \quad \cdots\cdots ⑦$$

$$c-2a=4 \quad \cdots\cdots ⑥$$

となり，以下，〔解答〕と同様。

(2) (1)の結果より

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)-4x^2+4x$$

$P(x)$ が5次の多項式であるとき，$Q_3(x)$ は $px+q$ $(p\neq 0)$ と表せるから，

$P(x)$ は次のようになる。

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)(px+q)-4x^2+4x \quad \cdots\cdots ⑧$$

$P(0)=-2$ より

$$2q=-2 \qquad \therefore \quad q=-1 \quad \cdots\cdots ⑨$$

$P(1)=6$ より

$$6(p+q)=6 \qquad \therefore \quad p+q=1 \quad \cdots\cdots ⑩$$

⑨，⑩より　　$p=2$，$q=-1$

したがって，求める $P(x)$ は，これらを⑧に代入すると

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)(2x-1)-4x^2+4x$$

$$=2x^5-x^4+6x^3-7x^2+8x-2 \quad \cdots\cdots (答)$$

【解答２】2011 慶應義塾大学

(1)　(あ)　$\dfrac{1}{2}$　(い)　2^{n-1}　(う)　$-n-1$　(え)　$-n-2$

183 C

多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 5，$(x+2)^2$ で割ると余りが $-23x-35$ である．このとき，$f(x)$ を $(x-1)(x+2)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

184 C

1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，

$$\omega^{2n}+\omega^n+1$$

の値を求めよ．ただし，n は自然数とする．

入試問題にチャレンジ (23)

多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか．

(2003・京都大学)

入試問題にチャレンジ (23)

多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか.

(2003・京都大学)

$f(x)$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\omega$ を代入してゼロ.

$$\left[\ f(x)=(x^2+x+1)\cdot Q(x)+\boxed{\text{あまり}}\ \right]$$

$f(x)$ が x^2+x+1 で割り切れる

$\Leftrightarrow f\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)$ を代入してゼロ.

$f(x)=(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ とおく

$$f(\omega)=(\boxed{\omega^{100}+1})^{100}+(\boxed{\omega^2+1})^{100}+1$$

$\omega^{100}+1 = -\omega^2$, $\omega^2+1=-\omega$

$\omega^3=1$

$\omega^2+\omega+1=0$

単項式化

$$=\omega^{200}+\omega^{100}+1$$
$$=\omega^2+\omega^1+1$$
$$=0$$

よって、割り切れる 圕

1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，

$$\omega^{2n}+\omega^{n}+1$$

の値を求めよ．ただし，n は自然数とする．

答 $\begin{cases} n：3の倍数のとき & 3 \\ それ以外のとき & 0 \end{cases}$

条件より．
ω は $x^3=1$ の解．
$(x-1)(x^2+x+1)=0$
$x=1$ または $x^2+x+1=0$

よって $\boxed{\omega^3=1}$，$\omega^2+\omega+1=0$ ← $\boxed{公式}$

周期 3．

n を 3 でわったあまりで場合分け．

$\boxed{\omega^3=1}$

$n=3k$（k：整数）のとき
$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k}+\omega^{3k}+1=3.$

$n=3k+1$（ 〃 ）のとき
$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k+2}+\omega^{3k+1}+1$
$=\omega^2+\omega+1=0$

$n=3k+2$（ 〃 ）のとき
$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k+4}+\omega^{3k+2}+1$
$=\omega^1+\omega^2+1=0$

《補足》 $\{\omega^n\}$: 周期3をもつ　$\omega^3=1$

数列. $a_n=\omega^{2n}+\omega^n+1$ とおく.

$a_1=\omega^2+\omega+1=0$

$a_2=\omega^4+\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$

$a_3=\omega^6+\omega^3+1=1+1+1=3$

数列$\{a_n\}$も周期3をもつはず

つまり $\boxed{a_{n+3}=a_n}$ のはず

$$a_{n+3}-a_n=(\omega^{2n+6}+\omega^{n+3}+1)-(\omega^{2n}+\omega^n+1)$$

$$=\omega^{2n}(\underbrace{\boxed{\omega^6-1}}_{0})+\omega^n(\underbrace{\boxed{\omega^3-1}}_{0})$$

$\boxed{\omega^3=1}$

$\omega^6=1$

$=0$ より

$$a_{n+3}=a_n.$$

以上より

$$a_n=\begin{cases}0 & (n\text{は}3\text{の倍数でない})\\ 3 & (n\text{は}3\text{の倍数})\end{cases}$$

//

多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 5，$(x+2)^2$ で割ると余りが $-23x-35$ である．

このとき，$f(x)$ を $(x-1)(x+2)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

① $f(x)=(x-1)\cdot Q_1(x)+5$

② $f(x)=(x+2)^2\cdot Q_2(x)+(-23x-35)$

③ $f(x)=\underbrace{(x-1)(x+2)^2}_{\text{3次で割る}}Q_3(x)+\boxed{}$

あまり 2次以下

[解]. あまり ax^2+bx+c とおく

①③ $f(1)=5=a+b+c$

②③ $[f(-2)=11=4a-2b+c]$

式不足 → 微分

$$(x+2)^2\ \overline{)\ f(x)=(x-1)(x+2)^2\cdot Q_3(x)+\boxed{ax^2+bx+c}}$$

商: $(x-1)Q_3(x)+a$

$(x-1)(x+2)^2Q_3(x)+a(x+2)^2$

$(b-4a)x+(c-4a)$

$-23x+(-25)$

割算実行

$$\begin{cases} b-4a=-23 \\ c-4a=-25 \end{cases}$$

$a+b+c=5$ と連立

$a=7,\quad b=5,\quad c=-7$

求めるあまりは $7x^2+5x-7$

[解2] [解1]を改善.

$(x+2)^2$

$$f(x) = (x-1)(x+2)^2 Q_3(x) + \boxed{ax^2+bx+c}$$

$$(x-1)Q_3(x) + a$$

$$\cancel{(x-1)(x+2)^2 Q_3(x) + a(x+2)^2}$$

$$\cancel{(b-4a)x + (c-4a)}$$

$$-23\,x + (-25)$$

$\Downarrow$

$$f(x) = (x+2)^2 \times \{(x-1)Q_3(x) + a\} + (-23x-25)$$

$$☆ = (x+2)^2(x-1)Q_3(x) + a(x+2)^2 + (-23x-25)$$

[解3] [解2]を改善　☆をいきなり立てる.

$$f(x) = \underbrace{(x+2)^2(x-1)}_{3次}Q_3(x) + \boxed{\underbrace{a(x+2)^2 + (-23x-25)}_{2次以下}}$$

$\left((x+2)^2(x-1)\text{で わったあまり}\right) = \left((x+2)^2\text{で わりきれる}\right) + \left((x+2)^2\text{で わりきれない}\right)$

【解4】 $\boxed{\text{微分の利用}}$ ← $(x-\alpha)^2$ で割ったあまりで有効.

$$\begin{cases} ① \ f(x) = (x-1)\cdot Q_1(x) + 5 \\ ② \ f(x) = (x+2)^2 Q_2(x) + (-23x-35) \\ ③ \ f(x) = (x-1)(x+2)^2 Q_3(x) + ax^2+bx+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} ②' \ f'(x) = 2(x+2)^1 \cdot Q_2(x) + (x+2)^2 Q_2'(x) - 23 \\ ③' \ f'(x) = 1\times(x+2)^2 Q_3(x) + (x-1)\times 2(x+2)^1 Q_3(x) \\ \qquad + (x-1)(x+2)^2 Q_3'(x) + 2ax+b \end{cases}$$

①③より $f(1) = a+b+c = 5$

②③より $f(-2) = 4a-2b+c = 11$

②'③'より $f'(-2) = -4a+b = -23$

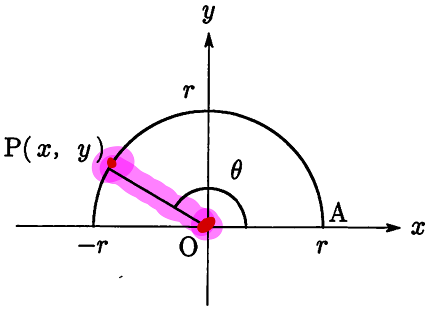
⇒ 連立.

第７講　　三角比(1)

半径1派 v.s r派

1　三角比の定義

Ｏを原点とする座標平面上で A$(r,\ 0)$ $(r>0)$ とし，半円周 $x^2+y^2=r^2$ $(y \geqq 0)$ 上にある点 P$(x,\ y)$ を考える。



$\angle\mathrm{POA}=\theta$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とするとき，

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

と定義する．$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ をそれぞれ θ の**正弦**，**余弦**，**正接**という．

2　三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

↑二点間距離公式 OP=1

3　$90^\circ-\theta$ の三角比

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$$

4　$180^\circ-\theta$ の三角比

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$$

49 A 公式派 v.s 定ギ派

$\div c^2$

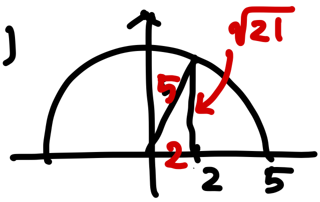
$\boxed{1+t^2=\frac{1}{c^2}} \leftarrow \boxed{c^2+s^2=1}$

0° ≦ θ ≦ 180° とする．

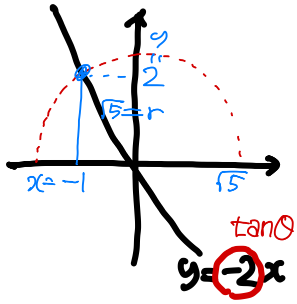
(1) $\cos\theta = \dfrac{2}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ．

(1)



(2)



50 A 加法定理，定ギより

次の式を簡単にせよ．

(1) $\sin(90° - \theta) + \sin(180° - \theta) - \cos(90° - \theta) + \cos(180° - \theta)$

(2) $\sin 10° \cos 80° - \sin 100° \cos 170°$

51 A

0° ≦ θ ≦ 180° のとき，次の方程式を解け．

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

$\boxed{49A}$　(1)　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$,　$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$　(2)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,　$\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

【解法】三角関数の相互関係 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\boxed{50A}$　(1)　0　(2)　1

【解法】三角関数の変換公式　$90° - \theta, 180° - \theta$

$\boxed{51A}$　(1)　$\theta = 45°$,　$135°$　(2)　$\theta = 150°$　(3)　$\theta = 120°$

【解法】三角関数の方程式

52 B

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{23}{17}$ のとき，$\sin\theta$ の値を求めよ．

$\boxed{s^2+c^2=1}$ cos消去．

(3) $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．

52B (1) $\cos\theta = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (2) $\sin\theta = \dfrac{8}{17}$，$\dfrac{5}{17}$

(3) $\tan\theta = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(複号同順)

【解法】三角関数の相互関係

53 B

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の方程式を解け．

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

(2) $2\cos^2\theta = 1$

(3) $\tan^2\theta - (\sqrt{3}-1)\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

53B (1) $\theta = 30^\circ$，150° (2) $\theta = 45^\circ$，135° (3) $\theta = 60^\circ$，135°

【解法】三角関数の方程式

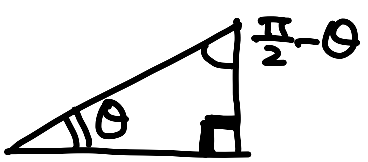
54 B

$A+B+C=\pi$ を利用

三角形 ABC の ∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とするとき，

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

が成り立つことを示せ．



$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$A+B+C=\pi$ より

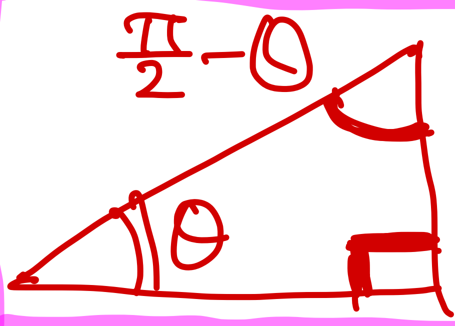
$$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}.$$

$$\sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$$

$$\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$$

よって (左辺) $=\sin\frac{A}{2}\times\cos\frac{A}{2}$

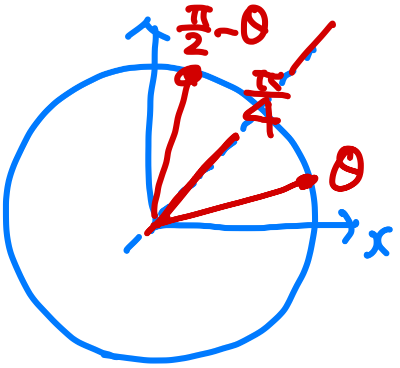
(右辺) $=\cos\frac{A}{2}\times\sin\frac{A}{2}$ より成立 ■



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

角 $\frac{\pi}{2}-\theta$ ⇒ $\sin\theta$, $\cos\theta$ の入れかえ



$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}}$$

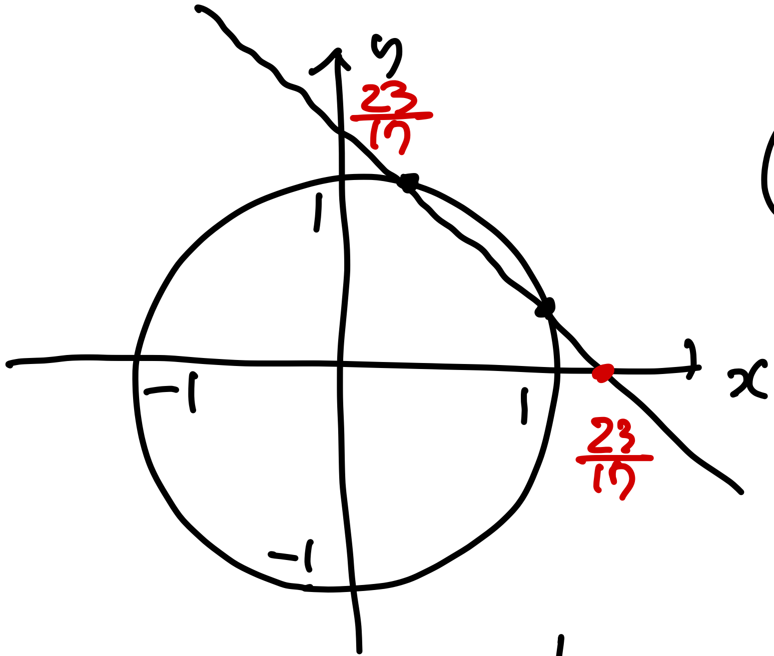
52 (2) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{23}{17}$ のとき $\sin\theta=\boxed{?}$

$y=\sin\theta$, $x=\cos\theta$ とおくと

$x^2+y^2=1$, $x+y=\frac{23}{17}$

連立すると (略)

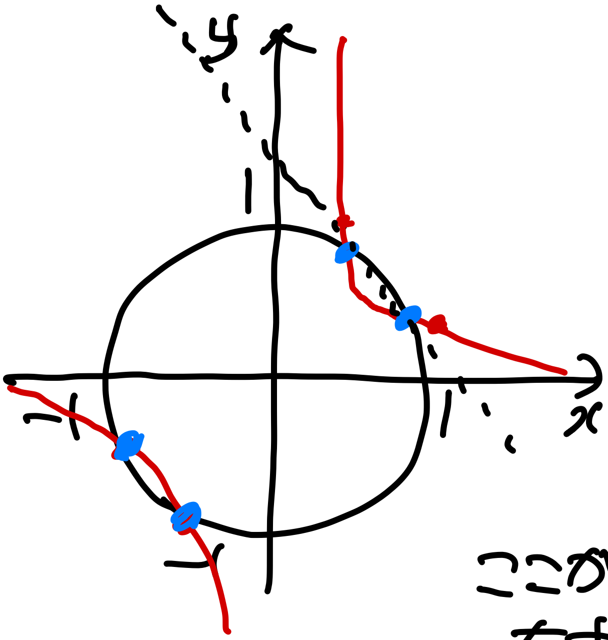
$(x,y)=\left(\frac{5}{17},\frac{8}{17}\right),\left(\frac{8}{17},\frac{5}{17}\right)$



(3) $\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{3}$ のとき $\tan\theta=\boxed{?}$

$y=\sin\theta$, $x=\cos\theta$ とおくと

$x^2+y^2=1$ 円, $xy=\frac{1}{3}$ 直角双曲線 (反比例のグラフ)



$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ より

$=\frac{5}{3}$

$x+y=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

⋮

ここから第1象限の2交点(x,y)を求めると

$\tan\theta=\frac{y}{x}$ より

求まる.

$\boxed{\text{計算で…}}$

$\times \dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}$

$\sin\theta \cdot \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ より

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \cos^2\theta = \dfrac{1}{3}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$t = \tan\theta$ とおくと

$t \times \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{1}{3}$

$t^2 - 3t + 1 = 0$

$t = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

2019年度　FG　数学IAIIB　【解答】7講

$\boxed{49A}$ (1)　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$,　$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$　(2)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,　$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

【解法】三角関数の相互関係 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\boxed{50A}$ (1)　0　(2)　1

【解法】三角関数の変換公式　$90°-\theta, 180°-\theta$

$\boxed{51A}$ (1)　$\theta=45°$，$135°$　(2)　$\theta=150°$　(3)　$\theta=120°$

【解法】三角関数の方程式

$\boxed{52B}$ (1)　$\cos\theta=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,　$\tan\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(2)　$\sin\theta=\dfrac{8}{17}$,　$\dfrac{5}{17}$

(3)　$\tan\theta=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

【解法】三角関数の相互関係

$\boxed{53B}$ (1)　$\theta=30°$，$150°$　(2)　$\theta=45°$，$135°$　(3)　$\theta=60°$，$135°$

【解法】三角関数の方程式

$\boxed{54B}$ 方針：$A+B+C=180°$ を利用，変換公式へ。

55 C 答 $-\frac{\sqrt{7}}{3}$

$0° \leqq \theta \leqq 45°$ とする．$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 9$ のとき，$\sin\theta - \cos\theta$ の値を求めよ．

$\frac{s}{c} + \frac{c}{s} = 9$

$s^2 + c^2 = 9sc$

$sc = \frac{1}{9}$

56 C

正五角形 ABCDE において，対角線 AC と BE の交点を F，対角線 AD と BE の交点を G とする．

(1) 三角形 ABG と三角形 GAF は相似であることを証明せよ．

(2) $\mathrm{BF} = 1$ のとき，辺 AB の長さを求めよ．

(3) $\cos 36°$ の値を求めよ．

☆

入試問題にチャレンジ (7)

$0° < \theta < 45°$ のとき，縦と横の長さがそれぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$ の長方形がある．この長方形を半分に折ってできる長方形がもとの長方形と相似であるとき，もとの長方形の面積はいくらか．また，もとの長方形の縦と横の長さの比はいくらか．

(2000・藤田保健衛生大学)

$1 : \sqrt{2}$

56 C

夾 = 挟

正五角形 ABCDE において，対角線 AC と BE の交点を F，対角線 AD と BE の交点を G とする．

(1) 三角形 ABG と三角形 GAF は相似であることを証明せよ．

(2) BF = 1 のとき，辺 AB の長さを求めよ．

(3) cos 36° の値を求めよ．

合同条件

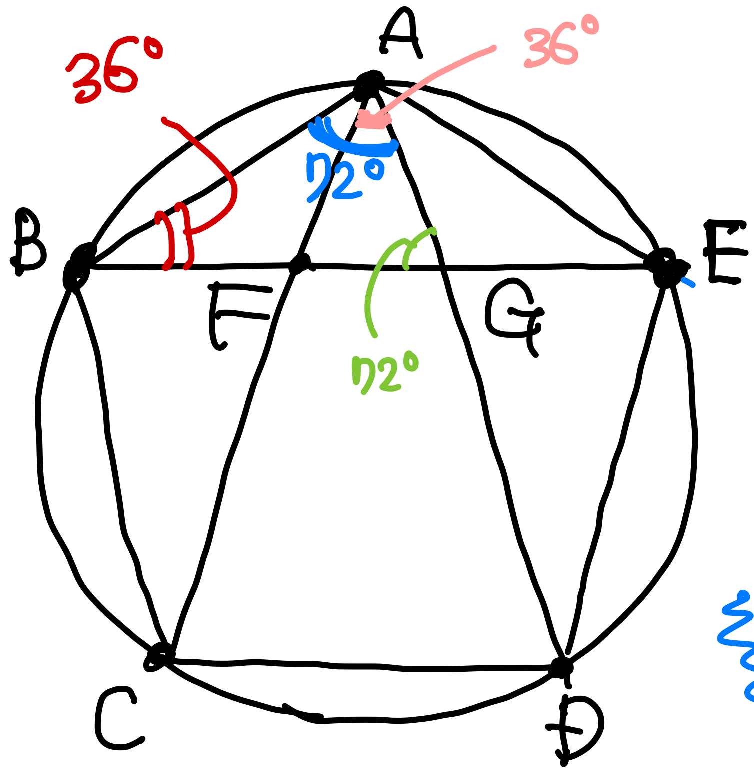
- 三辺相等
- 二辺夾角
- 二角夾辺

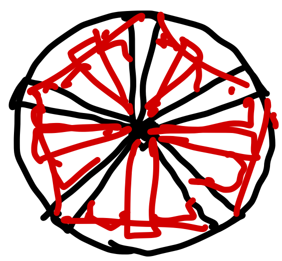
shape & size

相似条件

- 三辺比相等
- 二辺比夾角
- 二角相等

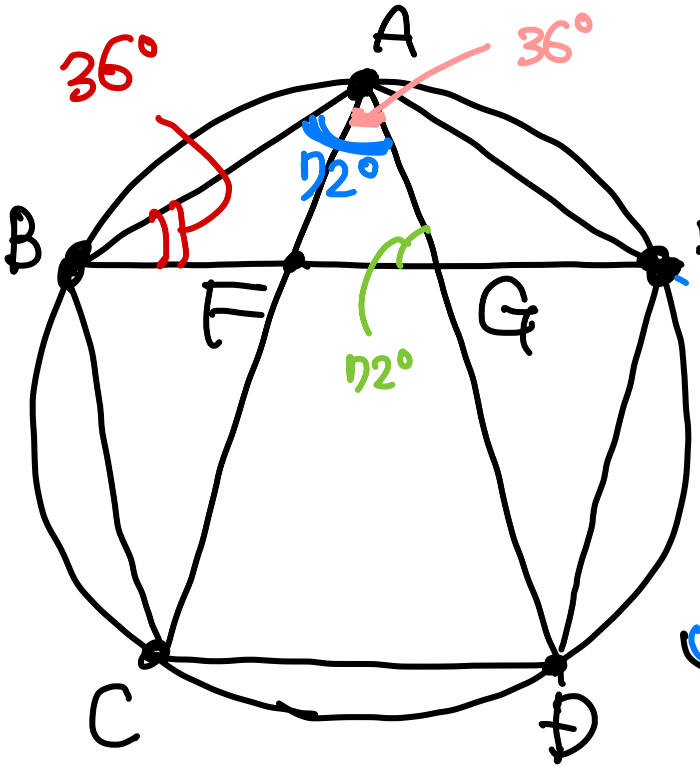
shape





△ABG ∽ △GAF
を証明

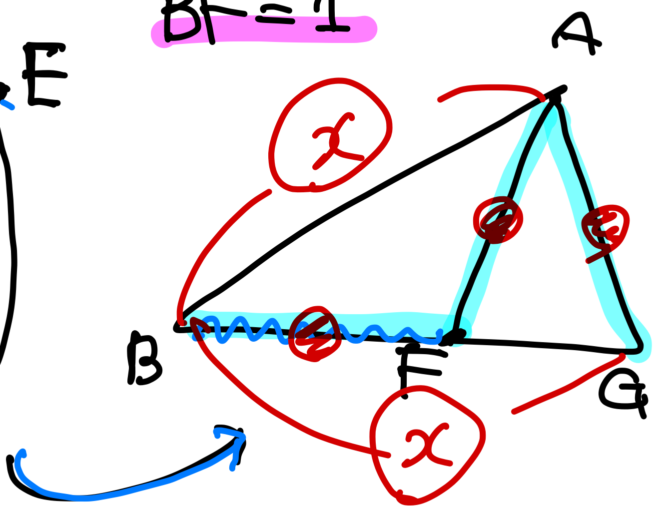
& 円周角の定理.



(2) (1)より

$$\boxed{\triangle ABG \backsim \triangle GAF}$$

BF=1



$BF = AF = AG = 1$

$AB = x$ とおくと

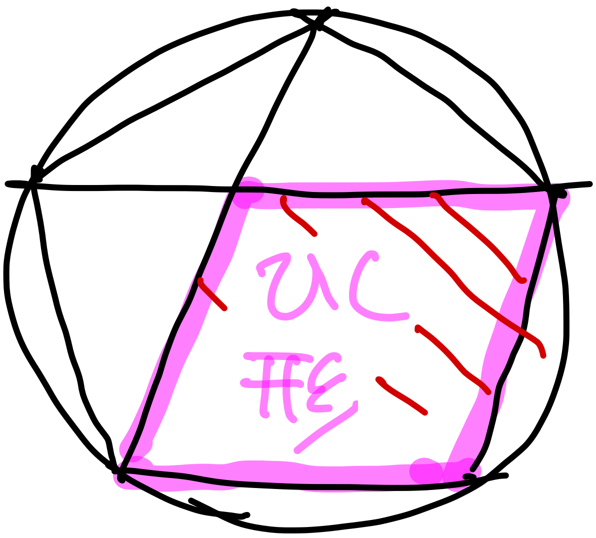
$BG = x$

$\boxed{AB:AG = GA:GF}$ より

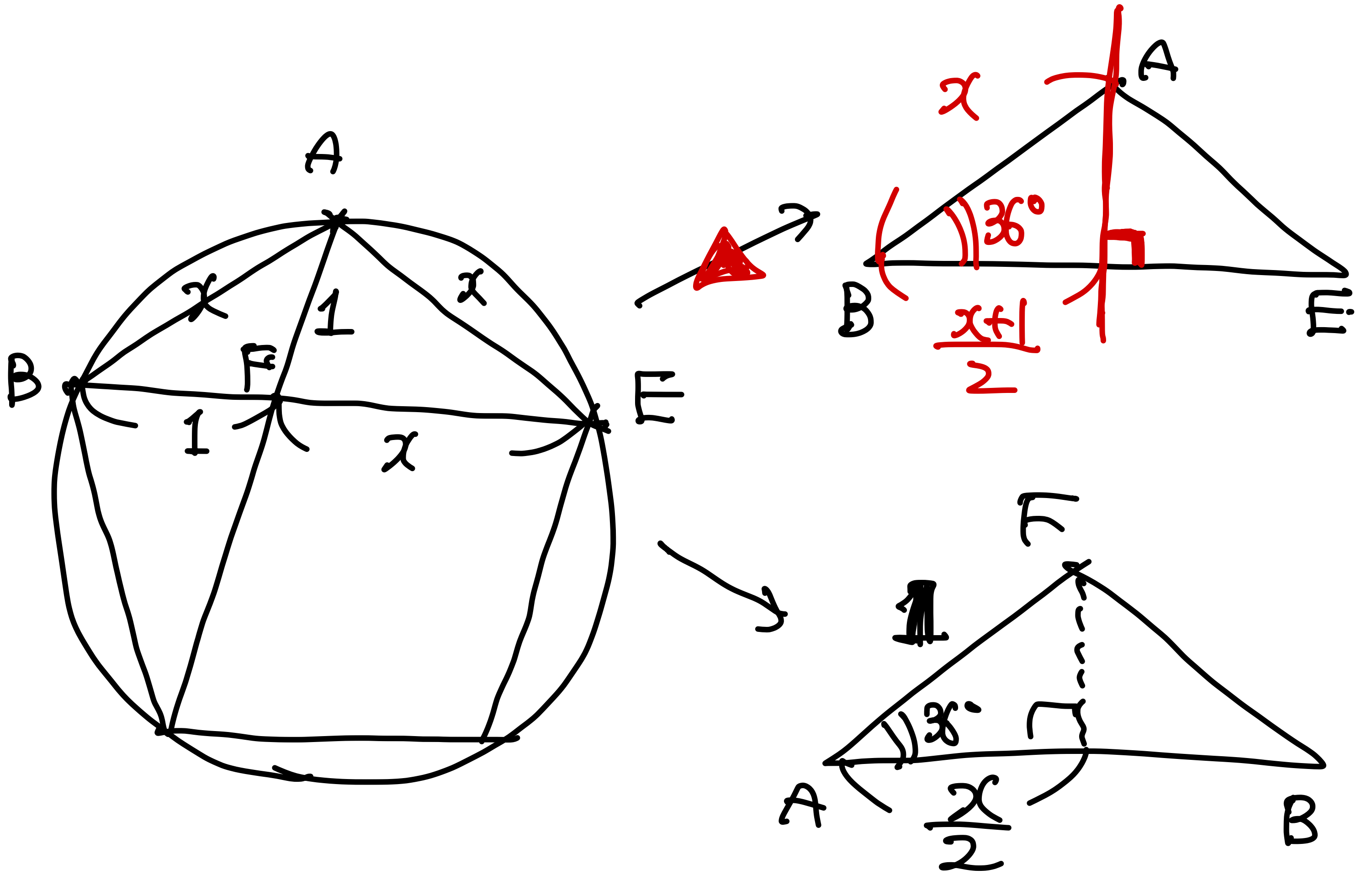
$x : 1 = 1 : (x-1)$

$x(x-1) = 1 \times 1$

$x^2 - x - 1 = 0$



$x > 0$ より $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



$$\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$\cos 36^\circ$ の求め方

(トレミーの定理)

① 正五角形内の相似

数A ② 正五角形の対角線

③ $\theta = 36^\circ$ とおくと $5\theta = 180^\circ$

数II

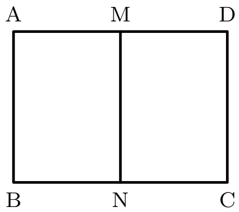
入試問題にチャレンジ (7)

$0° < \theta < 45°$ のとき，縦と横の長さがそれぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$ の長方形がある．この長方形を半分に折ってできる長方形がもとの長方形と相似であるとき，もとの長方形の面積はいくらか．また，もとの長方形の縦と横の長さの比はいくらか．

【解答】 (2000・藤田保健衛生大学)

$0° < \theta < 45°$ のとき，

$$\begin{cases} 0 < \tan\theta < 1, \\ 0 < \sin\theta < \cos\theta < 1. \end{cases}$$



もとの長方形の 4 頂点を図のように A，B，C，D とし，

$$\begin{cases} \mathrm{AB} = \sin\theta \\ \mathrm{AD} = \cos\theta \end{cases}$$

とする．

さらに，辺 AD の中点を M，辺 BC の中点を N とすると，長方形 ABCD と長方形 BNMA が相似であることから，

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AD} = \mathrm{BN} : \mathrm{BA}.$$

したがって，

$$\sin\theta : \cos\theta = \frac{1}{2}\cos\theta : \sin\theta$$

$$2\sin^2\theta = \cos^2\theta$$

$$\tan^2\theta = \frac{1}{2}$$

であるから，

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

これより，

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

したがって，もとの長方形の面積は，

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

また，もとの長方形の縦と横の比は，

$$\sin\theta : \cos\theta = 1 : \sqrt{2}.$$