逆手法. 9 $-\frac{1}{6} \leqq k \leqq \frac{1}{2}$.

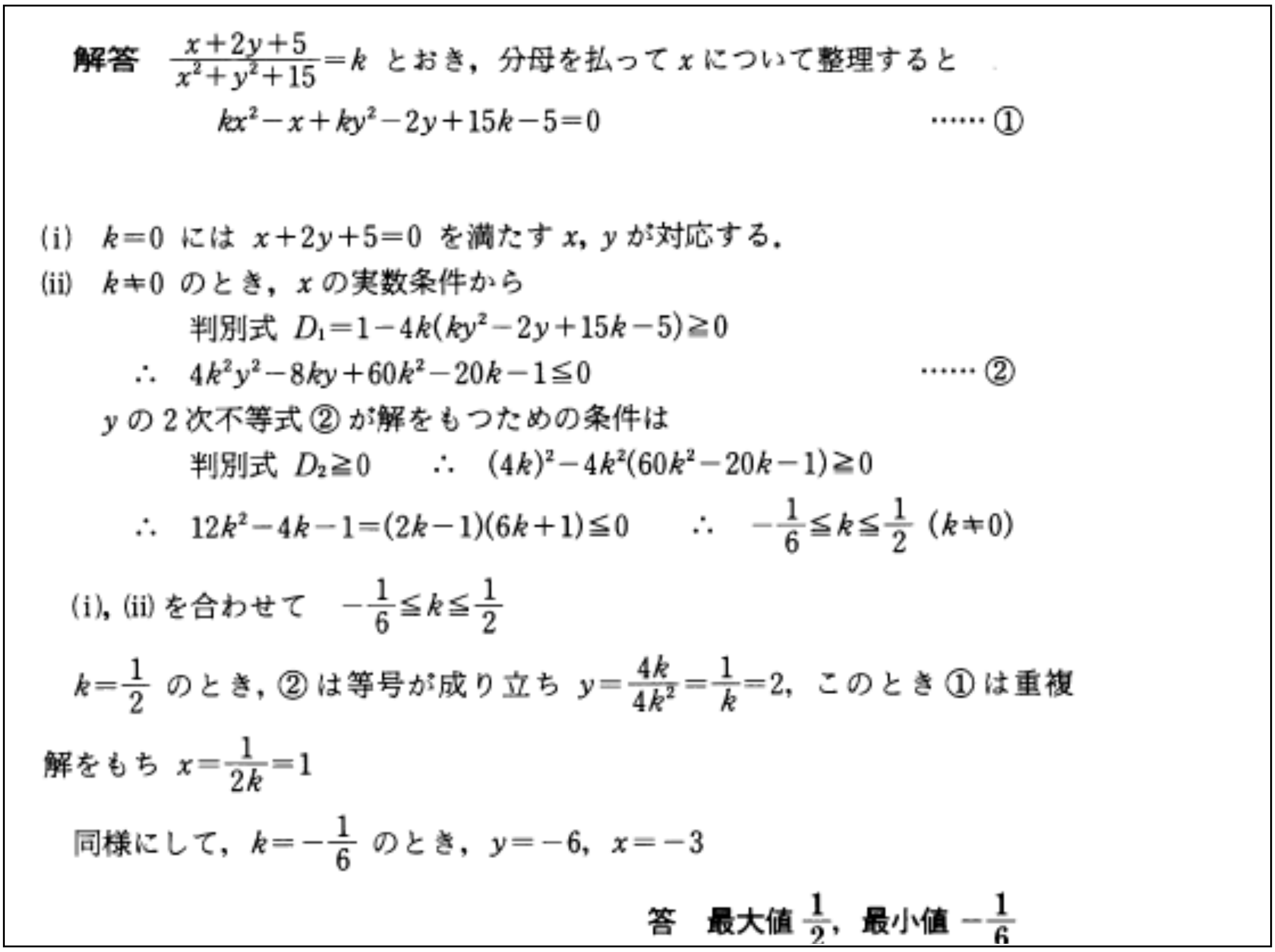
10 $-2 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$.

四面体かんれん

第10講

【９】

x, y が実数値をとって変わるとき，$\dfrac{x+2y+5}{x^2+y^2+15}$ の最大値と最小値を求めよ。



解答　$\dfrac{x+2y+5}{x^2+y^2+15}=k$ とおき，分母を払って x について整理すると

$$kx^2-x+ky^2-2y+15k-5=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

(i)　$k=0$ には $x+2y+5=0$ を満たす x, y が対応する．

(ii)　$k\neq0$ のとき，x の実数条件から

判別式 $D_1=1-4k(ky^2-2y+15k-5)\geqq0$

∴　$4k^2y^2-8ky+60k^2-20k-1\leqq0$ ……②

y の2次不等式②が解をもつための条件は

判別式 $D_2\geqq0$　∴　$(4k)^2-4k^2(60k^2-20k-1)\geqq0$

∴　$12k^2-4k-1=(2k-1)(6k+1)\leqq0$　∴　$-\dfrac{1}{6}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$ $(k\neq0)$

(i), (ii) を合わせて　$-\dfrac{1}{6}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$

$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，②は等号が成り立ち $y=\dfrac{4k}{4k^2}=\dfrac{1}{k}=2$，このとき①は重複解をもち $x=\dfrac{1}{2k}=1$

同様にして，$k=-\dfrac{1}{6}$ のとき，$y=-6$，$x=-3$

答　最大値 $\dfrac{1}{2}$，最小値 $-\dfrac{1}{6}$

【学習テーマ】逆手法

【10】

実数tが$0 \leqq t \leqq 2$を満たすとき，2次方程式$x^2-2tx+2t^2-4=0$の実数解xのとり得る値の範囲を求めよ。

$\boxed{-2 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}}$

【学習テーマ】逆手法，2次方程式の解の配置問題

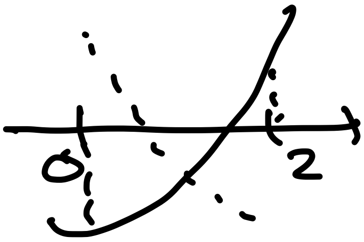
tで整理　$2t^2 - 2x \cdot t + x^2 - 4 = 0$ —— ⊛

⊛が $0 \leqq t \leqq 2$ に少なくとも1つの実数解をもつ条件を求める.

1コ or 2コ

$f(t) = 2t^2 - 2xt + x^2 - 4$　とおく

(i) $\boxed{1コ}$

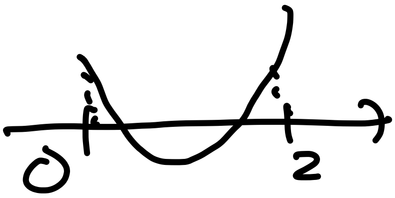


$f(0) \times f(2) \leqq 0$

$(x^2-4) \times (\overbrace{x^2-4x+4}^{\geqq 0}) \leqq 0$

$-2 \leqq x \leqq 2$

(ii) $\boxed{2コ}$ (重解含む)



$$\begin{cases} f(0) \geqq 0,\ f(2) \geqq 0 \\ 軸\ 0 \leqq \frac{x}{2} \leqq 2 \\ D/4 = x^2 - 2(x^2-4) \geqq 0 \end{cases}$$

より　$2 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$

$-2 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$

63 C

三角形 ABC において，$\mathrm{AB} = 15$，$\mathrm{BC} = 13$，$\mathrm{CA} = 8$ である．点 P が辺 AB 上に，点 Q が辺 AC 上にあり，線分 PQ が三角形 ABC の面積を二等分するように動くとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

64 C

実数 x に対して，3 辺の長さがそれぞれ $2x-1$，x^2-2x，x^2-x+1 で表される三角形 T がある．このとき，T の 3 つの内角のうち，最大の角の大きさを求めよ．

入試問題にチャレンジ (8)

三角形 ABC において，頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1，頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは $\sqrt{2}$，頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である．

このとき，三角形 ABC の面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ．

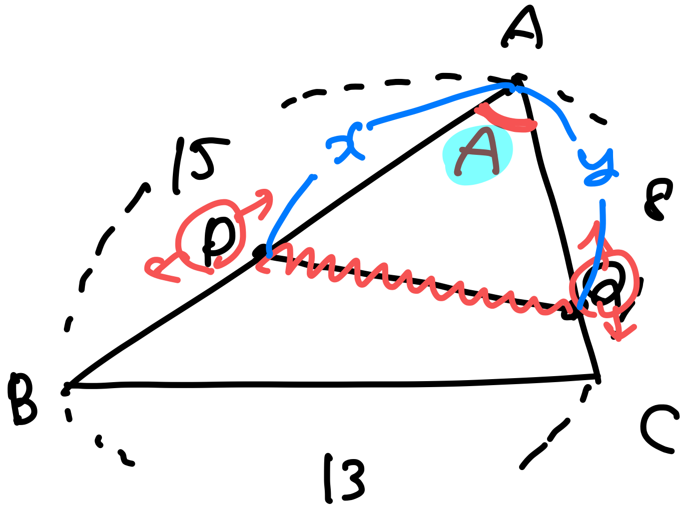
(2010・千葉大学)

63 C

三辺

三角形 ABC において，AB = 15，BC = 13，CA = 8 である．点 P が辺 AB 上に，点 Q が辺 AC 上にあり，線分 PQ が三角形 ABC の面積を二等分するように動くとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

二辺夾角



$x = AP,\ y = AQ$ とおく.

$(0 < x \leq 15,\ 0 < y \leq 8)$

$\triangle APQ = \frac{1}{2} \cdot \triangle ABC$

$\frac{1}{2} x \cdot y \cdot \cancel{\sin A} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8 \cdot \cancel{\sin A} \right)$

$xy = 60$ ——①

- PQ ⇒ 余弦 [△APQ]

$PQ^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos A$

[△ABCで余弦]

$13^2 = 15^2 + 8^2 - 2 \times 15 \times 8 \times \cos A$

より. $\cos A = \frac{1}{2}$

$(A = 60^\circ)$

$\therefore\ PQ^2 = x^2 + y^2 - xy$ ——②

$xy = 60$

①②より

$PQ^2 = x^2 + y^2 - xy$

$= (\underset{=0}{\boxed{x-y}})^2 + xy$

$\geqq xy = 60$

$PQ \geqq 2\sqrt{15}$

等号成立は

$\boxed{x=y} = 2\sqrt{15}$ のとき

$\left(\begin{array}{l} 0 < x \leqq 15 \\ 0 < y \leqq 8 \end{array}\right.$ をみたす)

平方完成

①,②より $\left(y = \frac{60}{x}\right)$

$PQ^2 = x^2 + y^2 - xy$

$= x^2 + \frac{3600}{x^2} - 60$

$\geqq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{3600}{x^2}} - 60$

$= 60$

$PQ \geqq 2\sqrt{15}$

⋮ 以下略

相加相乗

64 C　答 120°

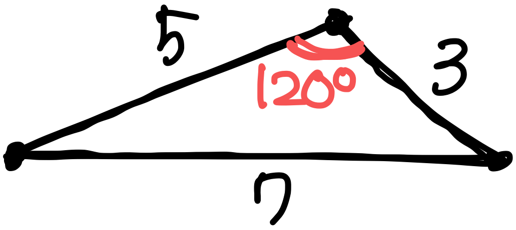
実数 x に対して，3 辺の長さがそれぞれ $2x-1$，x^2-2x，x^2-x+1 で表される三角形 T がある．このとき，T の 3 つの内角のうち，最大の角の大きさを求めよ．

《参考》自治医　▨×30° の型で答える問

標

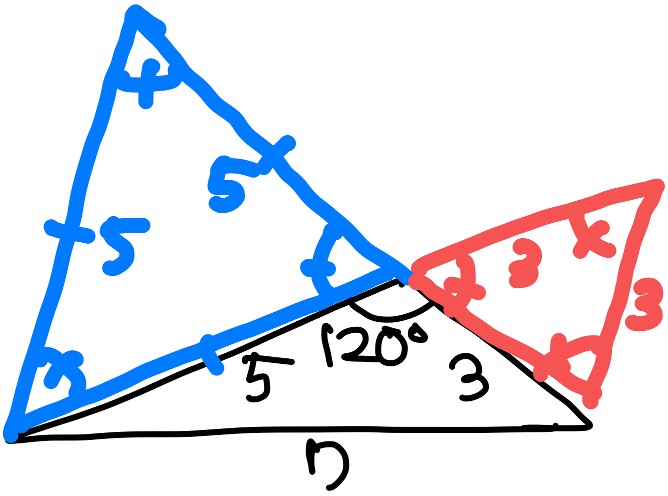
$x=1, 2$ 代入 ×

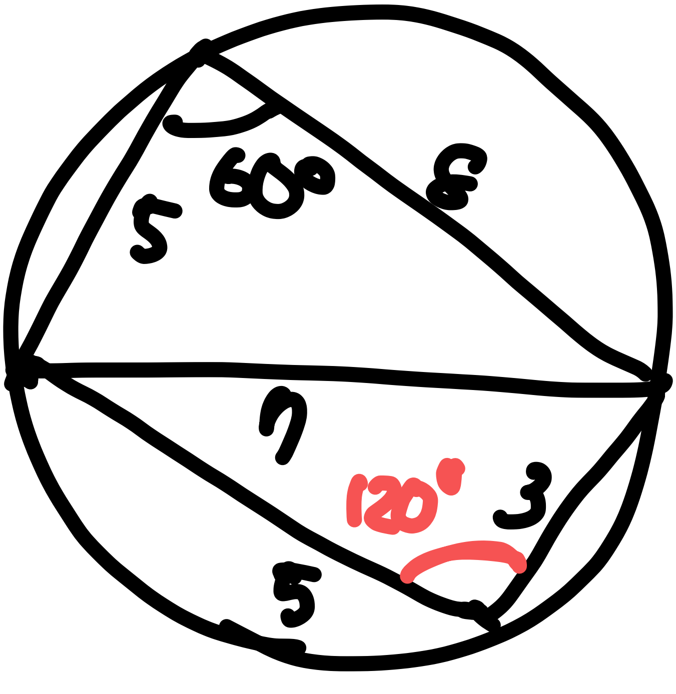
$x=3$ 代入　順に　5, 3, 7



余弦定理より
求める角は
120°

名古屋の悩みは 七五三





64 C

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

実数 x に対して，3 辺の長さがそれぞれ $2x-1$，x^2-2x，$\underset{\parallel}{x^2-x+1}$ で表される三角形 T がある．このとき，T の 3 つの内角のうち，最大の角の大きさを求めよ．

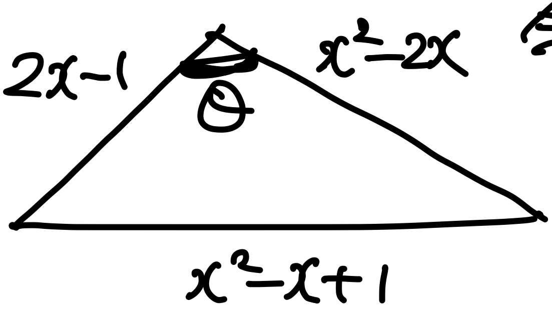
三辺の長さ正より　$x>\frac{1}{2}$ かつ「$x>2$ または $x<0$」

つまり　$x>2$

$$\begin{cases}(x^2-x+1)-(2x-1)=x^2-3x+2=(\overset{+}{x-1})(\overset{+}{x-2})>0\\(x^2-x+1)-(x^2-2x)=x+1>0\end{cases}$$

より．最大辺の長さは．x^2-x+1

最大辺と最大角は対応するから．
余弦定理より
図のように θ をとると



$$\cos\theta=\frac{(2x-1)^2+(x^2-2x)^2-(x^2-x+1)^2}{2\cdot(2x-1)(x^2-2x)}$$

ここで $(x^2-2x)^2-(x^2-x+1)^2$

$$=(2x^2-3x+1)(-x-1)=-(2x-1)(x-1)(x+1)$$

より

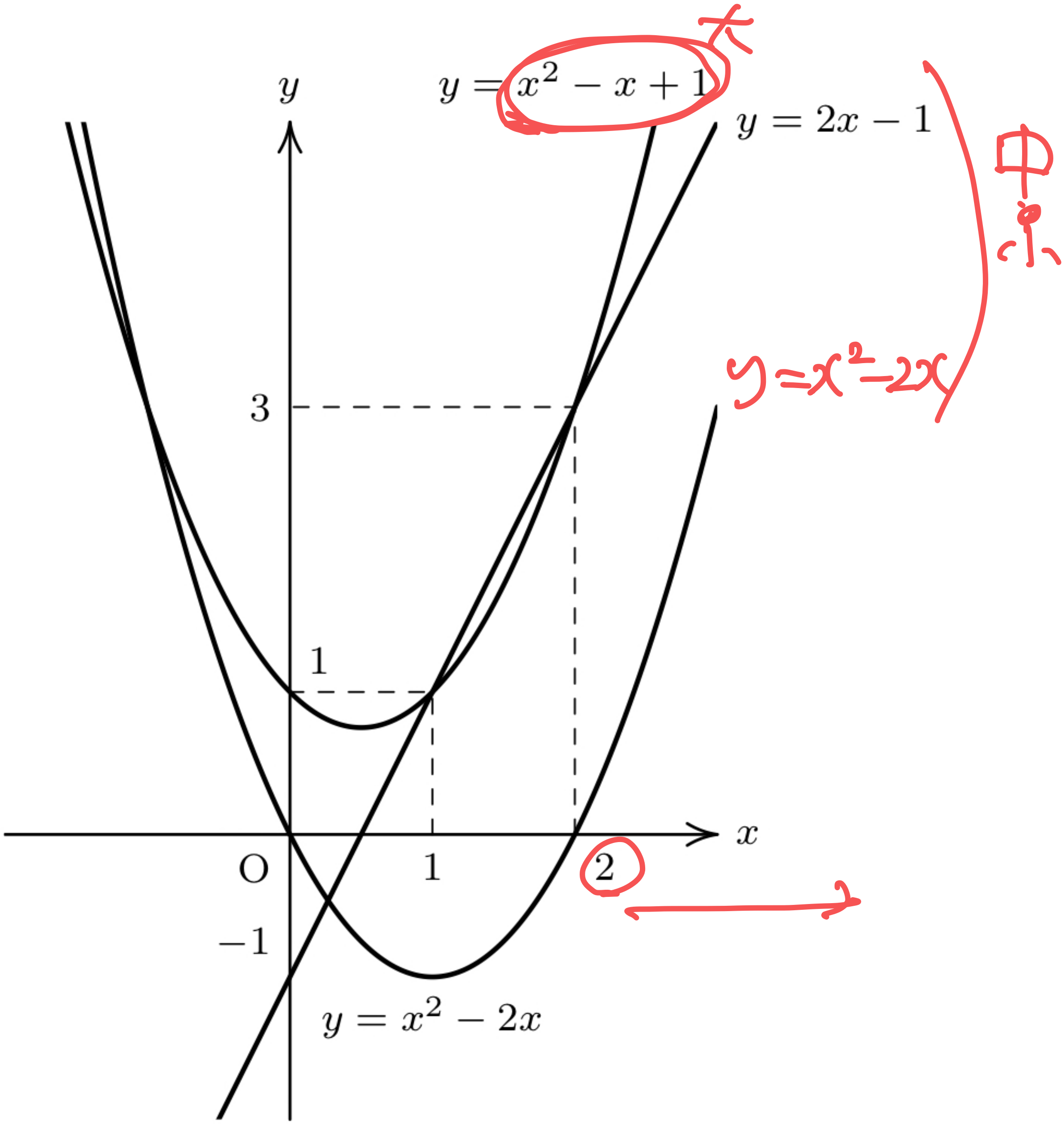
$$(分子)=(2x-1)\{\underbrace{(2x-1)-(x-1)(x+1)}_{-x^2+2x}\}$$

$$=-(2x-1)(x^2-2x)$$

$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{2}$ [illegible]

$\theta = 120^\circ$

//


大
y = x^2 - x + 1
y = 2x - 1
中
小
y=x^2-2x
y
3
1
O
1
2
x
−1
y = x^2 - 2x

入試問題にチャレンジ (8)

三角形 ABC において，頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1，頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは $\sqrt{2}$，頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である．

このとき，三角形 ABC の面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ．

【解答】 面積利用

(2010・千葉大学)

BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とすると，条件より，

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot a. \quad \cdots ①$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot b. \quad \cdots ②$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot c. \quad \cdots ③$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc\sin A. \quad \cdots ④$$

sinB, sinC 利用

①，②，③より，

$$a = 2c, \quad b = \sqrt{2}c.$$

ここで，内接円の半径を r とすると，

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

であるから，

$$\frac{1}{2}(2c+\sqrt{2}c+c)r = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot c.$$

したがって，

$$r = \frac{2}{3+\sqrt{2}} = \boxed{\frac{2(3-\sqrt{2})}{7}}.$$

また，②，④より，

$$\sqrt{2} = c\sin A. \quad \cdots ⑤$$

さらに，三角形 ABC に余弦定理を用いると，

$$\cos A = \frac{(\sqrt{2}c)^2+c^2-(2c)^2}{2\cdot\sqrt{2}c\cdot c} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

であるから，

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

⑤より，

$$\frac{\sqrt{14}}{4}c = \sqrt{2}$$

であるから，

$$c = \frac{4\sqrt{7}}{7}.$$

③より，

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4\sqrt{7}}{7} = \boxed{\frac{4\sqrt{7}}{7}}.$$

さらに，三角形 ABC の外接円の半径を R とし，正弦定理を用いると，

$$2R = \frac{a}{\sin A}$$

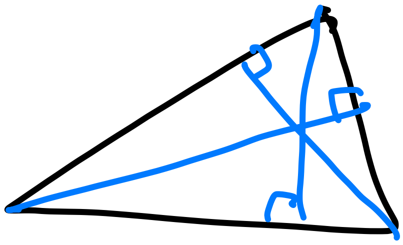
であるから，

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{2\cdot\frac{4\sqrt{7}}{7}}{2\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}} = \boxed{\frac{8\sqrt{2}}{7}}.$$

コメント

問題は単純なのですが，条件式が多いために，整理整頓が苦手な生徒には難しく見えるものでしょうね。

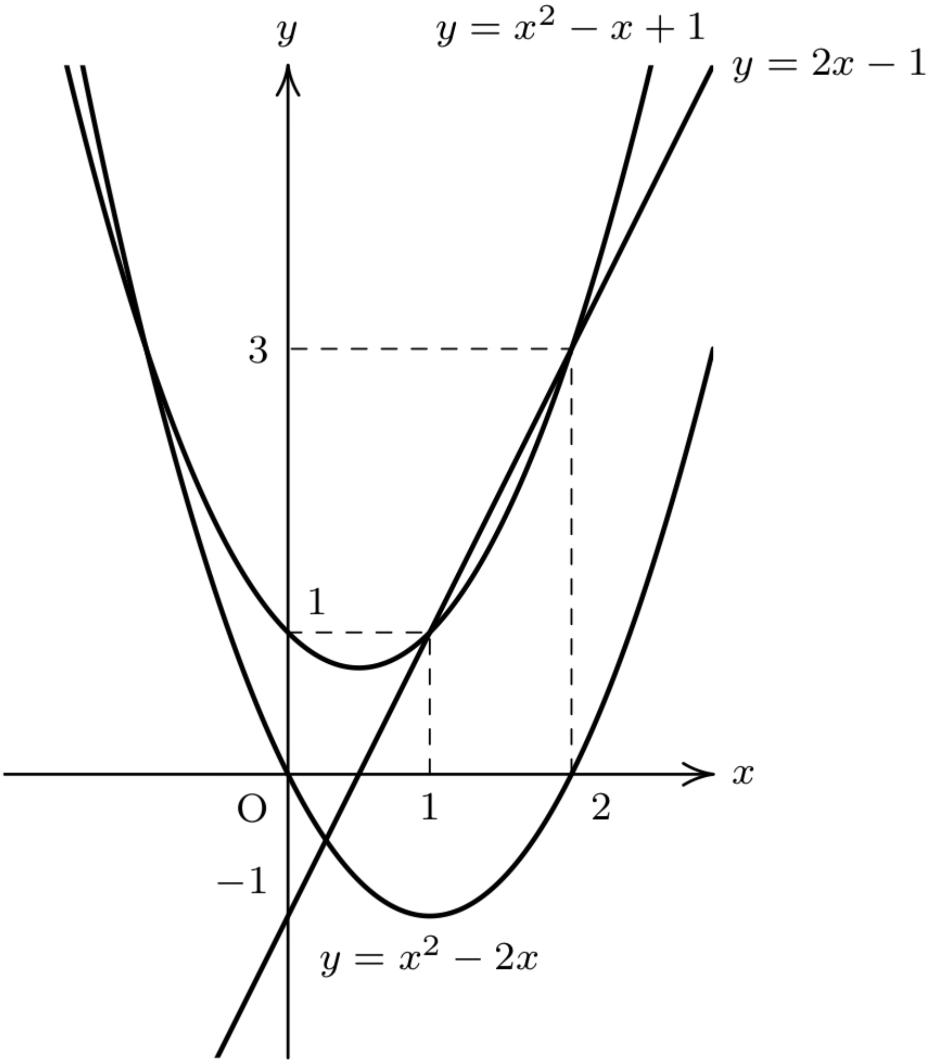
逆に図形的な落とし所がない問題なので，式の組合せがうまくいった生徒は満点をとれる問題です。差がつく問題の一例だと思います。



$$r = \frac{2(3-\sqrt{2})}{7}$$

$$\triangle ABC = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$$R = \frac{8\sqrt{2}}{7}$$


y
$y = x^2 - x + 1$
$y = 2x - 1$
3
1
O
1
2
x
−1
$y = x^2 - 2x$

第9講　三角比(3)

1 四角形の面積

四角形 ABCD の面積 S は，対角線 AC，BD のなす角を θ とすると，

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\sin\theta}$$

2 円に内接する四角形の対角の和

四角形 ABCD が円に内接する必要十分条件は，対角の和が 180° である．すなわち，

$$\boldsymbol{\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{D} = 180^\circ}$$

3 球の体積と表面積

半径 r の球の体積を V，表面積を S とすると，

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3,\quad S = 4\pi r^2}$$

65 A

平行四辺形ABCDにおいて，$AB=4$，$BC=5$，$BD=7$のとき，平行四辺形ABCDの面積を求めよ．

66 A

円Kに内接する四角形ABCDにおいて，$AB=5$，$BC=3$，$CD=2$，$\angle ABC=60^\circ$とする．

(1) 対角線ACの長さを求めよ．さらに，円Kの半径を求めよ．

(2) 辺DAの長さを求めよ．

(3) 四角形ABCDの面積を求めよ．

67 A

次の問に答えよ．

(1) 半径1の円に内接する正六角形の面積を求めよ．

(2) 半径1の円に外接する正六角形の面積を求めよ．

68 B

四角形 ABCD の 2 つの対角線の長さが AC = 1，BD = 2 であり，それらが交点をもち，なす角が 30° であるとき，四角形 ABCD の面積を求めよ．

69 B

円に内接する四角形 ABCD において，AB = 1，BC = 2，CD = 3，DA = 4 であり，∠DAB = θ とする．

(1) $\cos\theta$ の値，および，対角線 BD の長さを求めよ．

(2) 四角形 ABCD の面積を求めよ．

$\boxed{69\mathrm{B}}$ (1) $\cos\theta = \dfrac{1}{5}$ (2) $S = 2\sqrt{6}$

【解法】円の内接四角形の性質 & 二辺夾角

$BD = \sqrt{\dfrac{77}{5}}$

$$\left[\begin{aligned}&\cos(180^\circ - \theta)\\&= -\cos\theta\end{aligned}\right]$$

70 B

一辺の長さが 1 の正四面体の体積を求めよ．

71 C

$n \geqq 3$，$r > 0$ とする．

(1) 半径 r の円に内接する正 n 角形の面積を r と n を用いて表せ．

(2) 半径 r の円に外接する正 n 角形の面積を r と n を用いて表せ．

72 C

半径 r の球面上に異なる4点A，B，C，Dがある．

$$\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = \sqrt{2}, \quad \mathrm{AC} = \mathrm{AD} = \mathrm{BC} = \mathrm{BD} = \sqrt{5}$$

であるとき，r の値を求めよ．

入試問題にチャレンジ (9)

半径 r の球面上に4点A，B，C，Dがある．四面体ABCDの各辺の長さは，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{3}, \qquad \mathrm{AC} = \mathrm{AD} = \mathrm{BC} = \mathrm{BD} = \mathrm{CD} = 2$$

を満たしている．このとき，r の値を求めよ．

(2001・東京大学)

2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】 9 講

$\boxed{\text{6 5 A}}$　$S=8\sqrt{6}$

【解法】平行四辺形の性質

①平行四辺形の対角線は互いに他を二等分する，②２対辺の長さが等しい，

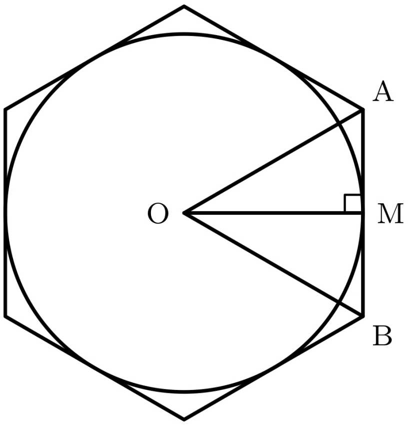
③２対角の大きさが等しい，④対辺の長さが等しく，かつ平行。

$\boxed{\text{6 6 A}}$　(1)　$R=\dfrac{\sqrt{57}}{3}$　(2)　DA$=3$　(3)　$S=\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$

【解法】円の内接四角形の性質　&　二辺夾角

$\boxed{\text{6 7 A}}$　(1)　$S=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　(2)　$S=2\sqrt{3}$

【解法】正n角形⇒中心角n等分して二等辺三角形へ。



$\boxed{\text{6 8 B}}$　$S=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{6 9 B}}$　(1)　$\cos\theta=\dfrac{1}{5}$　(2)　$S=2\sqrt{6}$

【解法】円の内接四角形の性質　&　二辺夾角

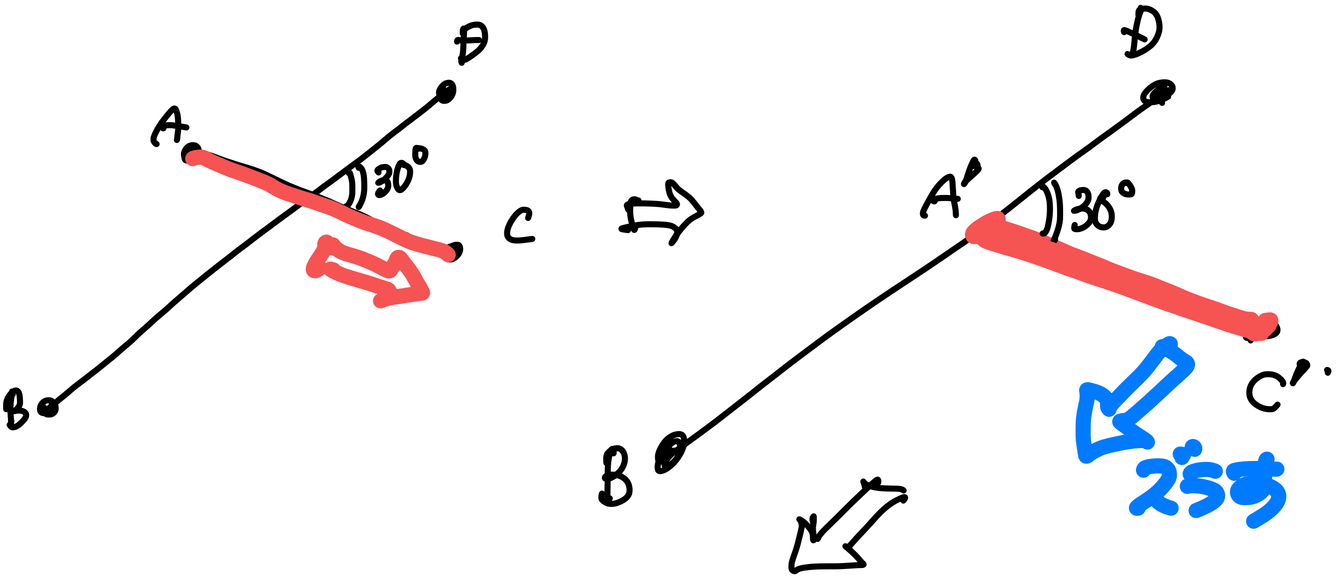
$\boxed{\text{7 0 B}}$　$\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

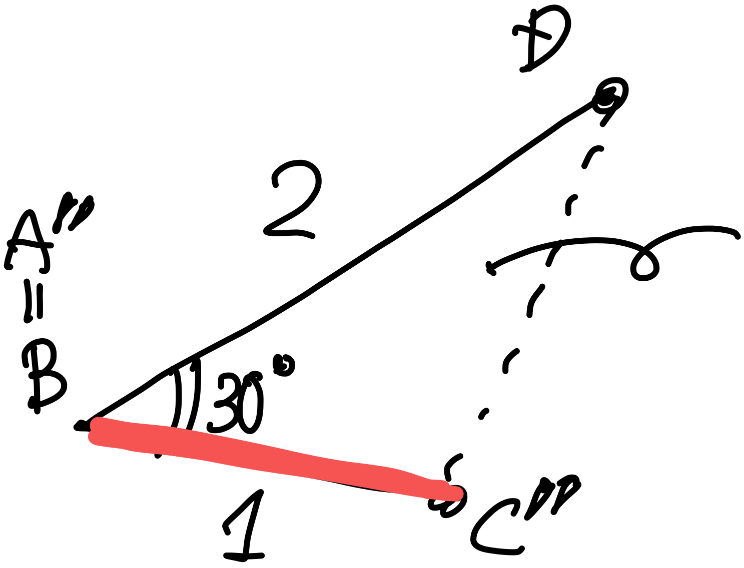
【解法】正四面体の基本情報

(1)　(2)　(3)

等積変形

AC=1, BD=2





$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot \sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{2}$$

70 B

$$\frac{\sqrt{6}}{12}$$

一辺の長さが１の正四面体の体積を求めよ.

空間図形

最強

① できるだけ平面に帰着する

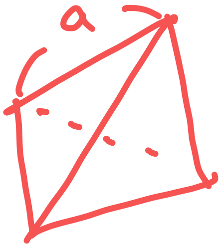
ある面, 断面, 展開図

射影

② 別の図形に埋めこむ

正四面体

一辺の長さを a とすると



① 高さ $h = \boxed{\sqrt{\frac{2}{3}}}\,a$

② 内接球半径 $r = \boxed{\frac{1}{4}}\,h$

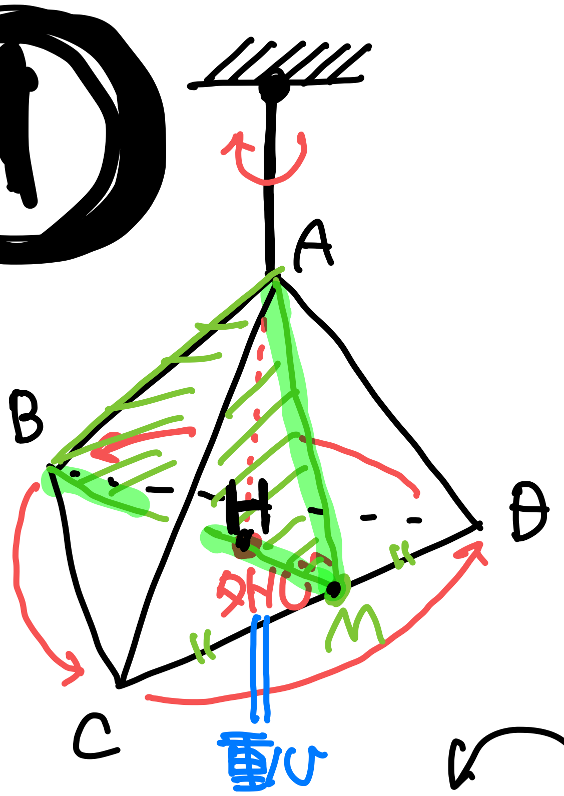
③ 外接球半径 $R = \boxed{\frac{3}{4}}\,h$.

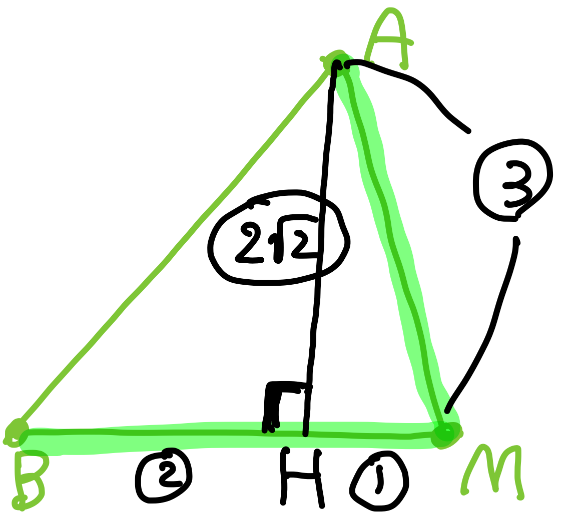
和がh

[ルートの中身は呼吸商 $\frac{CO_2}{O_2}$]

①

正四面体 ⇒ つるす





回転対称性より

AからΔBCDに下ろした

垂線の足Hは

ΔBCDの外心

ΔBCDは正三角形だから

Hは ΔBCDの重心

BH:HM=2:1

$AM=BM=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

高さ $h=AH=\boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\times AM$

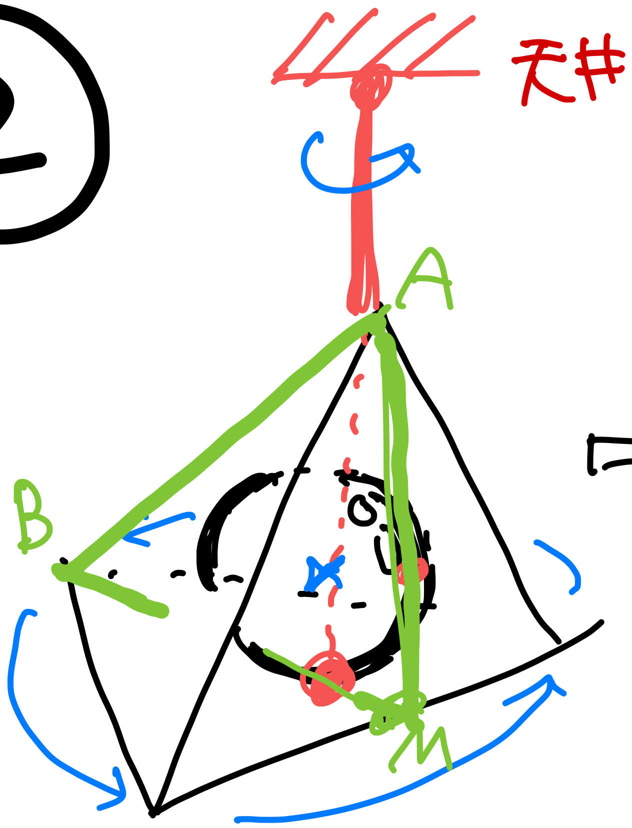
$=\sqrt{\frac{2}{3}}a$

（注 正三角形では

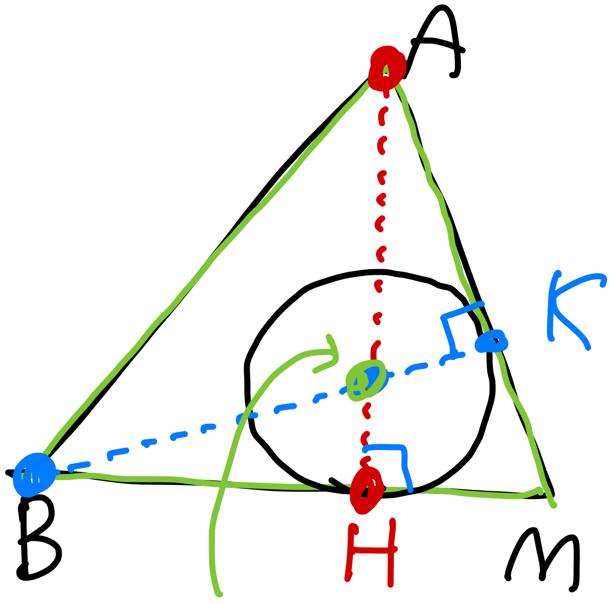
内.外.垂.重心が全て一致）

②

つるす



⇒

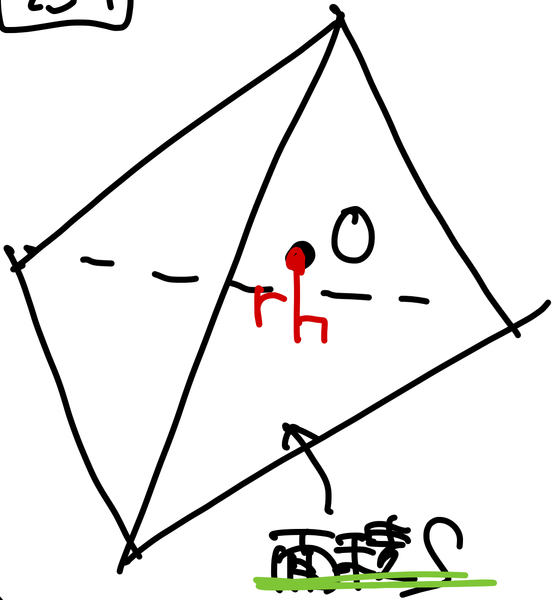


内接球中心~

メネラウスの定理
or
相似 より

$$\boxed{r=\frac{1}{4}h}$$

別



体積

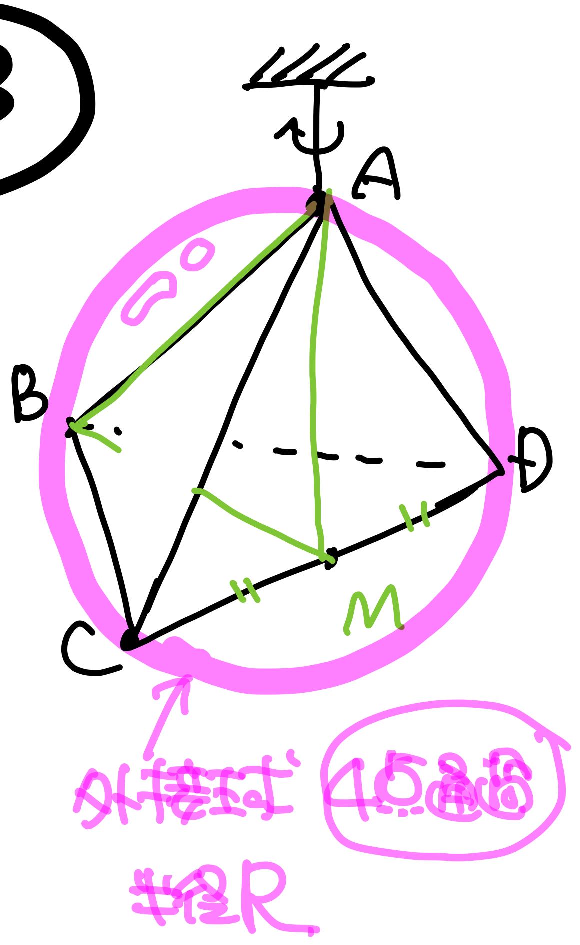
h
$$\begin{cases} V=\frac{1}{3}Sh \\ V=\left(\frac{1}{3}Sr\right)\times 4 \end{cases}$$

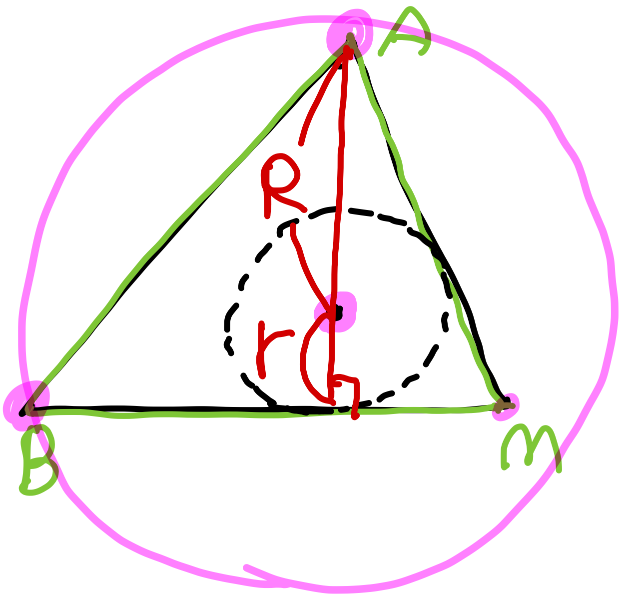
より $r=\frac{1}{4}h$

2次元 → 3次元

内接円半径 ⇒ 面積3分割
内接球半径 ⇒ 体積4分割

③

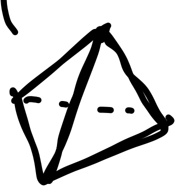




$R+r=h$

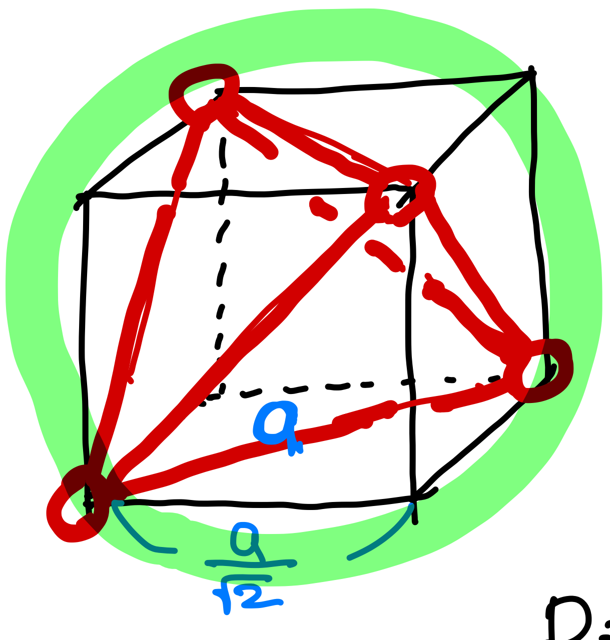
② より $\boxed{R=\frac{3}{4}h}$

$$R=\frac{3}{4}h=\frac{3}{4}\times\sqrt{\frac{2}{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{4}a$$



正四面体 ⇒ 立方体に埋めこむ

一辺 a　　一辺 $\frac{a}{\sqrt{2}}$



正四面体と立方体で
外接球は共通.

直径 $2R$ が立方体の
対角線の長さと一致.

$\sqrt{3}\times\frac{a}{\sqrt{2}}$

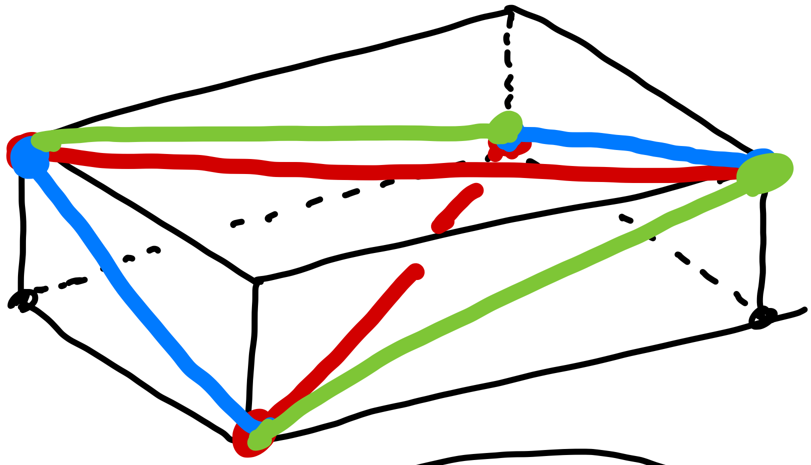
$$R=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a=\frac{\sqrt{6}}{4}a$$

72

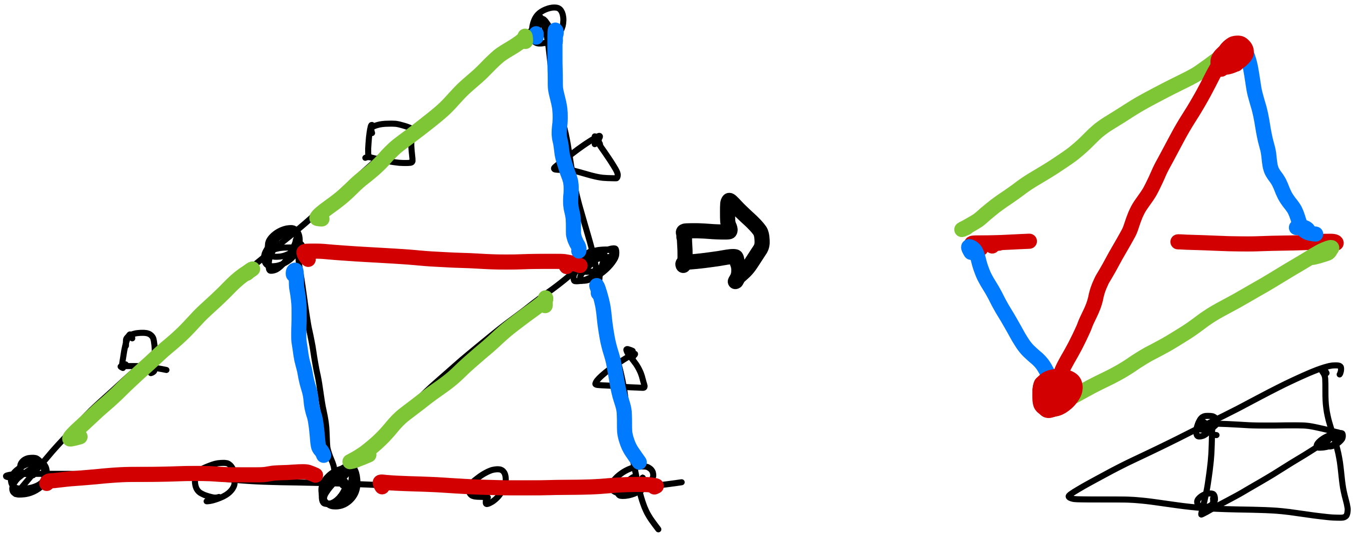
正四面体 ⇒ 立方体に埋めこみ

等面四面体 ⇒ 直方体に埋めこみ

①作り方



等面四面体：各面が合同な四面体のこと



どんな△でも中点とって組み立てると

等面四面体ができるか（Yes or [✓ No?]）

【(答) 鋭角三角形に限る】

72 C

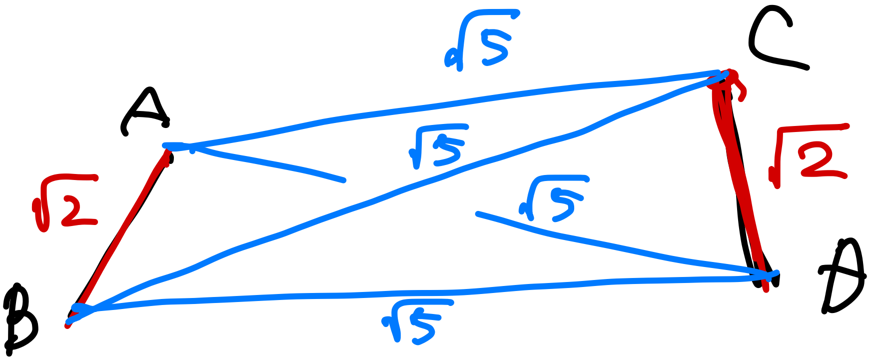
四面体ABCDの外接球　実は等面、

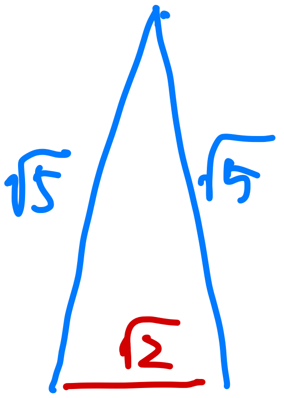
半径 r の球面上に異なる4点A, B, C, D がある．

$$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=\sqrt{2},\quad \mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\sqrt{5}$$

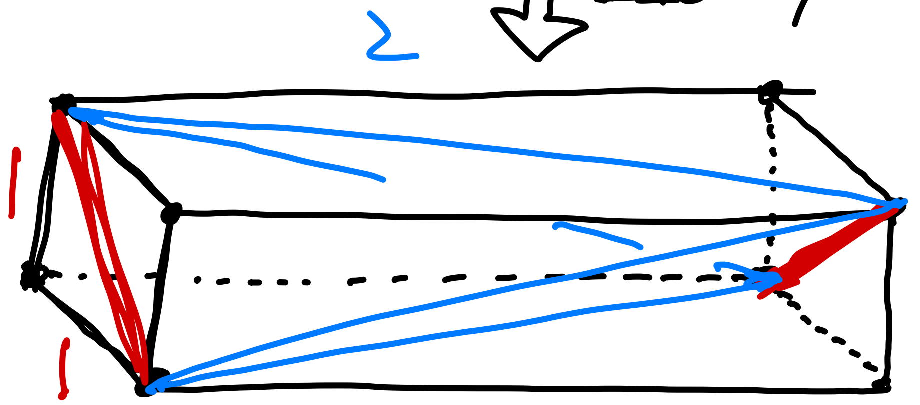
であるとき，r の値を求めよ．

等面四面体
↓
直方体





⇩ 埋めこみ



対角線の長さ ＝ 外接球半径．

$$\sqrt{6} = 2r$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

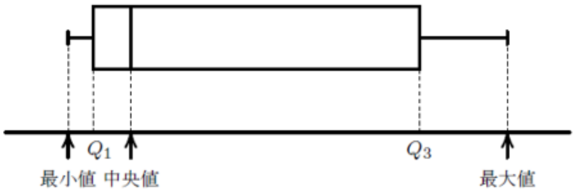
別解　断面を考える

2019年度　FG　数学IAIIB　【解答】１０講

７３Ａ　(1)　4.3　(2)　4.5　(3)　5

【解法】代表値の確認

７４Ａ　中央値90，最小値85，最大値120，第1四分位数87，第3四分位数113より，次図



【解法】四分位数，箱ひげ図の確認

７５Ａ　平均値13，分散9.2，標準偏差$\sqrt{9.2}=3.03 \fallingdotseq 3.0$

【解法】分散，標準偏差の確認。開平方。

７６Ｂ　(1)　$a=542$　(2)　26通り

【解法】仮平均を用いると楽？

７７Ｂ　平均71，分散7

【解法】分散の公式

７８Ｂ　国語の平均6，分散4，数学の平均5，分散5，また共分散$-\dfrac{8}{5}$。よって相関係数-0.36

以上より，(やや) 負の相関が認められる。

【解法】相関係数とその意味の確認