5/13 私立組

- 5講
- 6講

チャレ(5)はじかんがあれば

次回 21講 (〜23講)

31 C

1 から 1000 までの整数全体の集合を全体集合 U とし，その部分集合 A，B，C を

$$A = \{\, n \mid n \text{ は奇数},\ n \in U \,\}$$

$$B = \{\, n \mid n \text{ は 3 の倍数でない},\ n \in U \,\}$$

$$C = \{\, n \mid n \text{ は 18 の倍数でない},\ n \in U \,\}$$

とする．このとき，$A \cup B \subset C$ であることを示せ． ← 直接証明が困難

または

$$A \cup B \subset C \iff \boxed{\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{C}}$$

$$\iff \overline{A \cup B} \supset \overline{C}$$

ド・モルガン

32 C

次の (1)，(2) が成り立つことをそれぞれ示せ．

(1) 異なる $n+1$ 個の整数のうち，適当な 2 個を選べば，その差が n の倍数になることを示せ．

(2) 平面 ~~座標~~空間で，その座標がすべて整数であるような点を格子点という．平面 ~~座標空間~~に 9 個 5 の格子点が与えられたとき，そのうちの 2 点を結ぶ線分で中点がまた格子点となるものが少なくとも 1 つ存在する．

鳩の巣の原理

入試問題にチャレンジ (4)

ある大学で実施された定期試験の結果について学生 100 人を対象にして調査したところ，物理学に合格した学生は 75 人，化学に合格した学生は 80 人，生物学に合格した学生は 90 人であった．これから，3 科目とも合格した学生は少なくとも (　　) 人であることがわかる．

(2001・兵庫医科大学)

45

(2) 座標空間で，その座標がすべて整数であるような点を格子点という．座標空間に 9 個の格子点が与えられたとき，そのうちの 2 点を結ぶ線分で中点がまた格子点となるものが少なくとも 1 つ存在する．

$x \quad y \quad z$

(2) 座標空間における格子点は，座標成分について考えると，

(偶数，偶数，偶数)

(偶数，偶数，奇数)

(偶数，奇数，偶数)

(奇数，偶数，偶数)

(偶数，奇数，奇数)

(奇数，偶数，奇数)

(奇数，奇数，偶数)

(奇数，奇数，奇数)

の 8 種類に分類できる．

$2^3 = 8$

部屋

玉

したがって，9 個の格子点を選ぶと，同じ種類となる 2 個の格子点の組が存在し，この 2 個の格子点の中点は格子点となるので，題意は示された．

第5講　2次関数(1)

1　2次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

a, p, q は実数，$a \neq 0$ とする．

2次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは，放物線 $y = ax^2$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である．

軸の方程式は $x = p$，頂点の座標は $(p,\ q)$

2　2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

a, b, c は実数，$a \neq 0$ とする．

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは，

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

と平方完成できるから，放物線 $y = ax^2$ を

$$x \text{軸方向に} -\frac{b}{2a},\quad y \text{軸方向に} -\frac{b^2-4ac}{4a}$$

だけ平行移動した曲線が2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフである．この放物線の

軸の方程式は $x = -\dfrac{b}{2a}$，頂点の座標は $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

33 A

次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その軸の方程式，および，頂点の座標を求めよ．

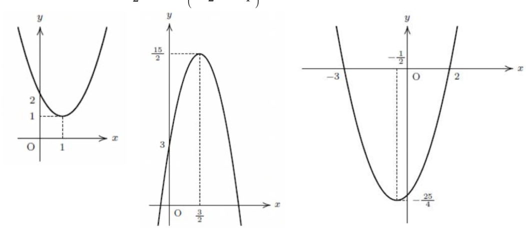
(1) $y = x^2 - 2x + 2$

(2) $y = -2x^2 + 6x + 3$

(3) $y = (x+3)(x-2)$

$\boxed{3\,3\,\mathrm{A}}$ (1)軸 $x=1$，頂点 $(1, 1)$ (2)軸 $x=\frac{3}{2}$，頂点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$

(3)軸 $x=-\frac{1}{2}$，頂点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ 【解法】平方完成



34 A

次の関数について，それぞれ与えられた定義域における最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = x^2 - 6x + 10 \quad (2 \leqq x \leqq 5)$

(2) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x \quad (-2 \leqq x \leqq 1)$

$\boxed{3\,4\,\mathrm{A}}$ (1) $x=5$ のとき最大値 5， $x=3$ のとき最小値 1

(2) $x=1$ のとき，最大値 $\dfrac{7}{2}$， $x=-2$ のとき最小値 -10 【解法】平方完成

切片型 [α β $y=k(x-\alpha)(x-\beta)$ 型]

35 A

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ．

(1) $x=1$ において最小値 5 をとり，点 $(3,\ 7)$ を通る．

(2) 3 点 $(-1,\ 9)$，$(1,\ -1)$，$(2,\ 0)$ を通る．

$\boxed{3\,5\,\mathrm{A}}$ (1) $y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+5$ (2) $y=2x^2-5x+2$

【解法】(1) $y=a(x-p)^2+q$ 型 (2) $y=ax^2+bx+c$ 型

標準型． 一般型

36 B

(1) グラフが，放物線 $y = 2x^2$ を平行移動した曲線で，点 (1，3) を通り，頂点が直線 $y = 2x + 1$ 上にある放物線の方程式を求めよ．

(2) 放物線 $y = x^2 - 4x + 5$ を x 軸方向に a だけ平行移動し，その後，原点に関して対称移動する．続いて y 軸方向に b だけ平行移動し，その後，x 軸に関して対称移動すると，放物線 $y = x^2 + 18x + 73$ と一致した．a，b の値を求めよ．

$\boxed{36\text{B}}$ (1) $y = 2x^2 + 1$ または，$y = 2(x-1)^2 + 3$　　(2) $(a, b) = (7, 9)$

【解法】2 次関数なので，平行移動・対称移動は「頂点と最高次係数」に着目

$y=2x^2-4x+5$

37 B

2 次関数 $f(x) = ax^2 + 2ax + b$ の区間 $-2 \leqq x \leqq 1$ における最大値が 11，最小値が 3 のとき，定数 a，b の値を求めよ．

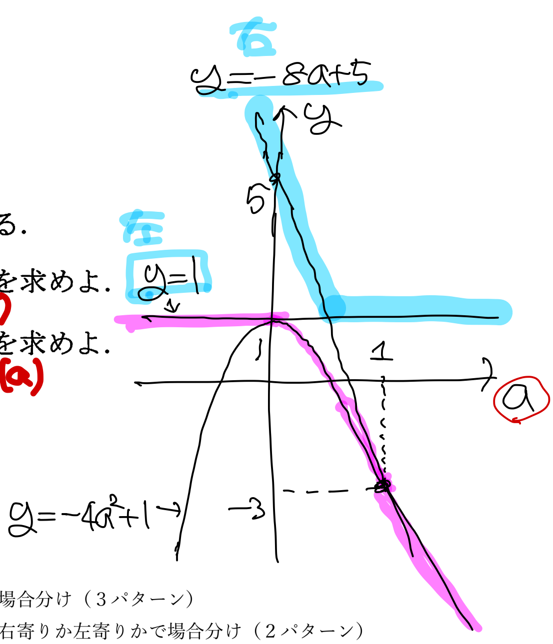
$\boxed{37\text{B}}$ $(a, b) = (2, 5), (-2, 9)$　　【解法】$y = a(x-p)^2 + q$ 型

38 B

a を定数，$f(x) = x^2 - 4ax + 1$ とする．

(1) $0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を求めよ．　$m(a)$

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値を求めよ．　$M(a)$



$\boxed{38\text{B}}$ (1) $m(a) = \begin{cases} 1 & (a < 0) \\ -4a^2 + 1 & (0 \leqq a \leqq 1) \\ -8a + 5 & (a > 1) \end{cases}$

(2) $M(a) = \begin{cases} -8a + 5 & \left(a < \dfrac{1}{2}\right) \\ 1 & \left(a \geqq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$

【解法】(1)下に凸の最小値　⇒　軸が変域の内か外かで場合分け（3 パターン）

(2)下に凸の最大値　⇒　軸が変域の真ん中より右寄りか左寄りかで場合分け（2 パターン）

aを定数，$f(x)=x^2-4ax+1$とする．

(1) $0 \leqq x \leqq 2$における$f(x)$の最小値を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq 2$における$f(x)$の最大値を求めよ．

Max. minの候補は
極値，両端（変域に注意）

2次なら
軸．頂点x

・$y=f(x)=(x-2a)^2-4a^2+1$

$y=f(2a)=-4a^2+1$

$0 \leqq 2a \leqq 2 \Leftrightarrow 0 \leqq a \leqq 1$のみ

・$y=f(0)=1$

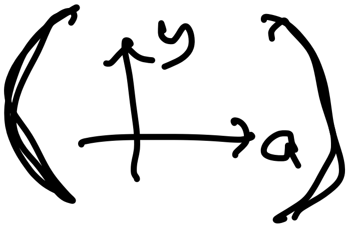
・$y=f(2)=-8a+5$

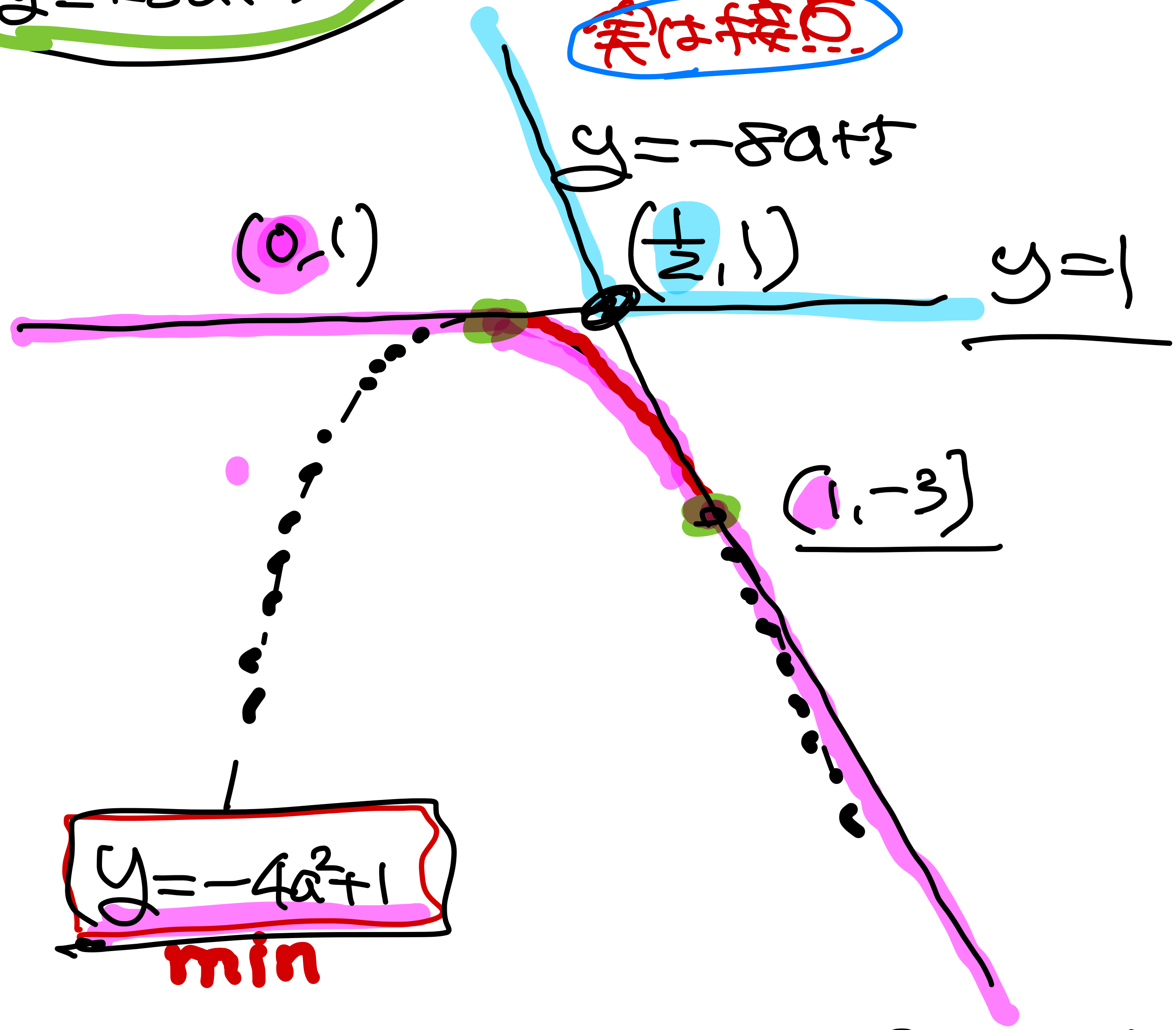
どーせ．Max，minのグラフも
つながるはず

$$\begin{cases} y=-4a^2+1 & (0\leqq a\leqq 1) \\ y=1 \\ y=-8a+5 \end{cases}$$

a　y
(1, −3)

実は接点





$$m(a)=\begin{cases} 1 & (a\leqq 0) \\ -4a^2+1 & (0\leqq a\leqq 1) \\ -8a+5 & (a\geqq 1) \end{cases}$$

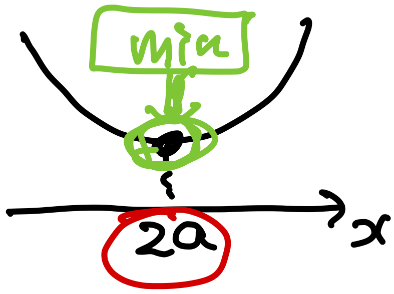
$$M(a)=\begin{cases} -8a+5 & \left(a\leqq \frac{1}{2}\right) \\ 1 & \left(a\geqq \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

a を定数，$f(x) = x^2 - 4ax + 1$ とする．

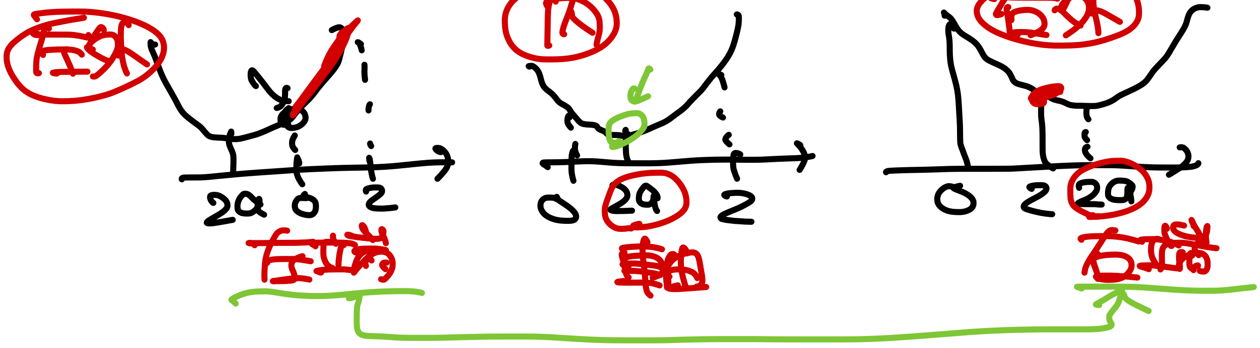
(1) $\boxed{0 \leqq x \leqq 2}$ における $f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) $\boxed{0 \leqq x \leqq 2}$ における $f(x)$ の最大値を求めよ．

$$f(x) = x^2 - 4ax + 1$$
$$= (x-2a)^2 - 4a^2 + 1$$

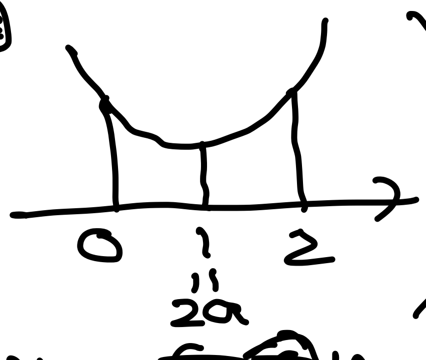


(1) 軸が変域の内 or 外 (3パターン)



(2)

(分け目



)

(2パターン)

軸が変域の左寄り or 右寄り

39 C

実数 x，y が $x^2+2y^2=1$ を満たしながら変化するとき，$\frac{1}{2}x+y^2$ の最大値，最小値を求めよ．さらに，そのときの x，y の値を求めよ．

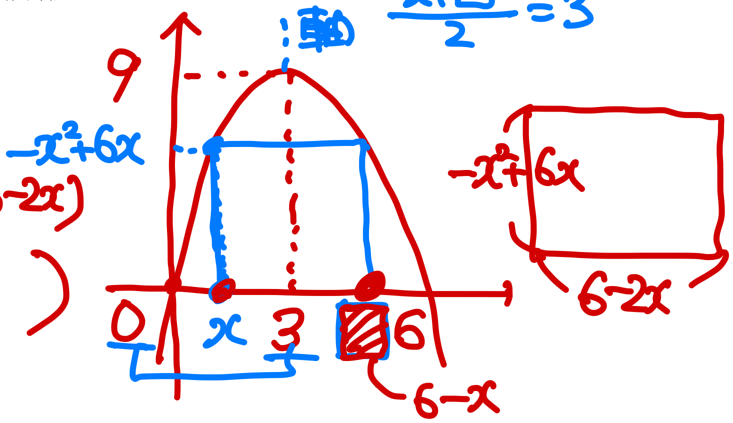
$\boxed{39\text{C}}$ $(x,\,y)=\left(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ のとき最大値 $\frac{5}{8}$，　$(x,\,y)=(-1,\,0)$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}$

40 C

放物線 $y=-x^2+6x$ と x 軸で囲まれる部分に内接する長方形 (一辺は x 軸上にある) のうちで，周の長さが最大になる長方形の 2 辺の長さを求めよ．

$\frac{x+\square}{2}=3$

$\boxed{40\text{C}}$　2 と 8



周長 $l=(-x^2+6x)+(6-2x)$

($0<x<3$ において.)

入試問題にチャレンジ (5)

k は実数の定数とする．関数 $f(x)=x^2-4|x|+k$ の最小値を $m(k)$，最大値を $M(k)$ とする．

(1)　$m(k)=2$ のとき，k の値を求めよ．

(2)　$-1\leqq x\leqq 5$ のとき，$m(k)$，$M(k)$ をそれぞれ，k を用いて表せ．

(3)　関数 $y=f(x)$ のグラフを直線 $y=k$ に関して対称移動するとき，その最大値を求めよ．

(2000・滋賀医科大学)

$\boxed{39C}$

道具箱

実数 x，y が $x^2+2y^2=1$ を満たしながら変化するとき，$\frac{1}{2}x+y^2$ の最大値，最小値を求めよ．さらに，そのときの x，y の値を求めよ．

$k=\frac{1}{2}x+y^2$ とおき．k の Max, min を求める

2変数　条件式あり ⇒ 実質1変数

$\boxed{\text{一文字消去}}$　$\boxed{y^2}=\frac{1-x^2}{2}$ より　変域に注意

$$k=\frac{1}{2}x+\frac{1-x^2}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{8}$$

ここで $\boxed{y^2}\geqq 0$ より ―消滅してしまう

$$y^2=\frac{1-x^2}{2}\geqq 0 \quad \therefore\ -1\leqq x\leqq 1$$

$x=\frac{1}{2}$ で 最大値 $\frac{5}{8}$　このとき $y=\boxed{\pm\frac{\sqrt{6}}{4}}$

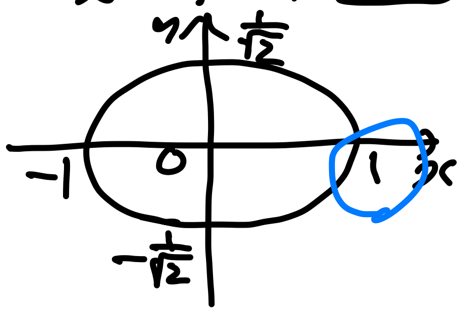
$x=-1$ で 最小値 $-\frac{1}{2}$　このとき $y=\boxed{0}$

//

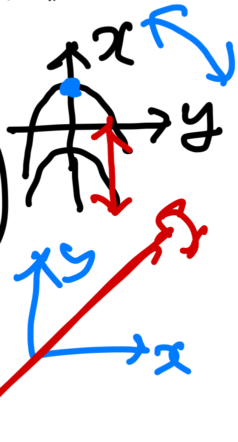
実数 x，y が $\underline{x^2+2y^2=1}$（だ円）を満たしながら変化するとき，$\underline{k=\frac{1}{2}x+y^2}$（放物線）の最大値，最小値を求めよ．さらに，そのときの x，y の値を求めよ．

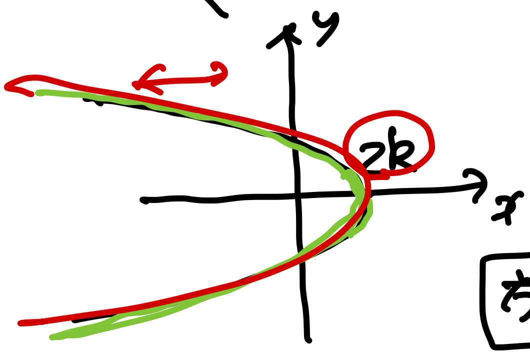
[解2] 図示

$x^2+2y^2=1$ $\boxed{\text{だ円}}$



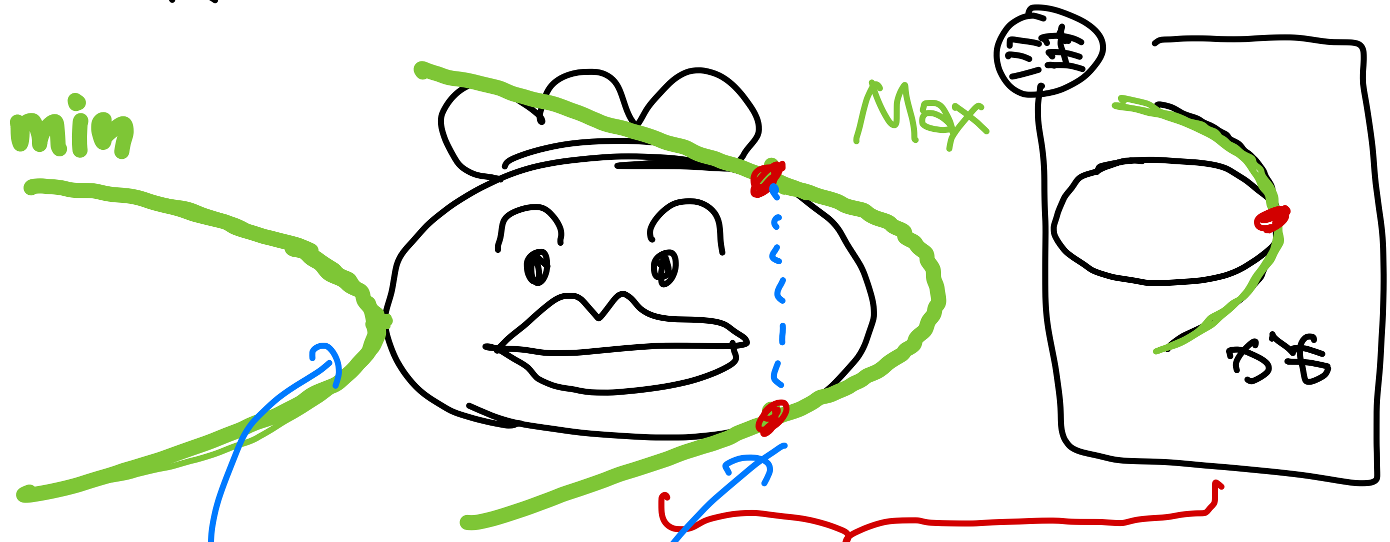
$$\left(\begin{aligned} x&=-2y^2+2k \\ y^2&=-\frac{1}{2}x+k \end{aligned}\right)$$





$\boxed{\text{放物線}}$

共有点をもつ条件



連立 & D=0 で
計算すれば わかる。

$(-1, 0)$ のとき

$\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$

[解3] $\begin{cases} x^2+2y^2=1 \\ k=\frac{1}{2}x+y^2 \end{cases}$ → 楕円のパラメータ表示

$x^2+(\sqrt{2}y)^2=1$ ← $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$x = \cos\theta$, $\sqrt{2}y = \sin\theta$

楕円上の点Pは P $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{cases}$ と表せる

$\therefore k=\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta$ ← $1-\cos^2\theta$

$=-\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}$

$x=\cos\theta$

$=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$(-1\leqq x\leqq 1)$ ← 自然にでてくる

⋮

Max. min $\begin{cases} ① \text{ 消去（変域）} \\ ② \text{ 図示} \\ ③ \text{ おき・パラ} \end{cases}$

第6講　2次関数(2)

a, b, c は実数，$a \neq 0$ とする．

1　2次関数のグラフと2次方程式の解

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解は連立方程式

$$\begin{cases} y = ax^2+bx+c \\ y = 0 \end{cases}$$

の実数解 x の値，すなわち，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸 $(y=0)$ との共有点の x 座標と一致する．

2　2次関数のグラフと2次不等式の解

2次不等式 $ax^2+bx+c \geqq 0$ の解は，放物線 $y=ax^2+bx+c$ 上の点で，(y 座標) $\geqq 0$ となる x の値の範囲である．

2次不等式 $ax^2+bx+c \leqq 0$ の解は，放物線 $y=ax^2+bx+c$ 上の点で，(y 座標) $\leqq 0$ となる x の値の範囲である．

2　解の配置

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解がある区間内に存在するかどうか，存在するならばいくつ存在するかを判断するには，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを利用する．

そのとき，

(i)　**判別式 $D=b^2-4ac$ の符号**，または，**頂点の y 座標の符号**

(ii)　**軸 $x=-\dfrac{b}{2a}$ の位置**

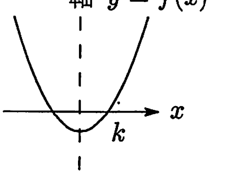
(iii)　**区間の端点における関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ の値の符号**

のいずれかに注目する．

例えば，次のようになる．

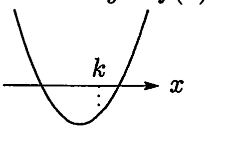
(1)　**2つの解(重解の場合も含む)がともに k より小**

$$\begin{cases} D \geqq 0 \\ x = -\dfrac{b}{2a} < k \\ f(k) > 0 \end{cases}$$



(2)　**1つの解は k より大，1つの解は k より小**

$$f(k) < 0$$



不等式 ⇒ グラフの上下
大小関係 に帰着

方程式 ⇒ グラフの共有点
の解 のx座標に対応

2次 特有の話

① $\boxed{\text{平方完成}}$

② 解の公式 ← 証

③ 判別式 ルート内

④ KKK

xを1つにまとめる

2次方程式 $(a \neq 0)$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

平方完成

解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

41 A

$f(x)=|x^2-2x-3|$ とする.

(1) $y=f(x)$ のグラフをかけ.

(2) 方程式 $f(x)=k$ が相異なる 4 個の実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ.

42 A

2 次不等式 $ax^2+bx+2<0$ の解が $x<-1$, $2<x$ であるような定数 a, b の値を求めよ.

43 A

すべての実数 x に対して $2x^2-kx+3>0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ.

44 B

次の問に答えよ.

(1) $0 \leqq x \leqq 2$ を満たすすべての x に対して, $x^2 - 2ax + a + 6 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ.

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ を満たすある x に対して, $x^2 - 2ax - 8 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ.

45 B

方程式 $|4 - x^2| + 2x + k = 0$ の異なる実数解の個数が 4 であるような定数 k の値の範囲を求めよ.

46 B

x の方程式 $x^2 - 2(k+1)x + 2k + 5 = 0$ が次のような実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ.

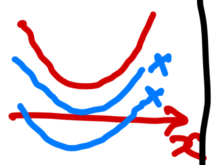
(1) 2 つの解がともに 2 より大きい.

(2) 1 つの解が 2 より大きく, もう 1 つの解が 2 より小さい.

44-B 不等式 → グラフの上下

(1) $0 \leqq x \leqq 2$ を満たすすべての x に対して，$x^2 - 2ax + a + 6 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

変域がなければ簡単．



全ての x に対して $\underbrace{x^2-2ax+a+6}_{y\ 上} > 0$

$x^2-2ax+a+6=0$ の $\boxed{判別式}$ $D<0$

$D/4 = a^2-(a+6)<0$

$(a-3)(a+2)<0$

$-2<a<3$.

$\boxed{平方完成}$

$y=(x-a)^2-a^2+a+6$

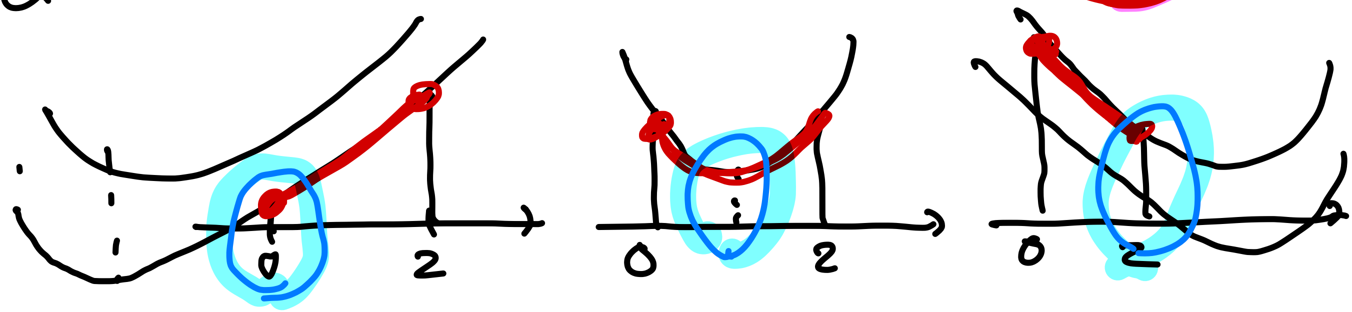
(頂点のy座標) >0

⋮

$-2<a<3$.

(1) $0 \leqq x \leqq 2$ を満たすすべての x に対して，$x^2 - 2ax + a + 6 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

$y=x^2-2ax+a+6$ が $0 \leqq x \leqq 2$ で 常に $y=0$ より上側 (x軸)



$f(x)=x^2-2ax+a+6$ とおき，$0 \leqq x \leqq 2$ での 最小値 >0

⇒ 軸が変域の内か外かで場合分け．

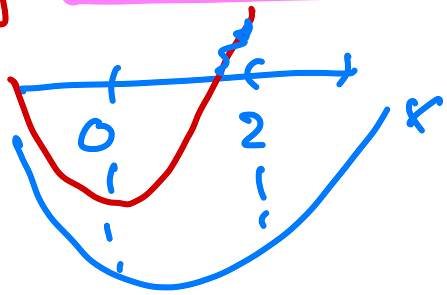
(別) 候補を絞って解くのもアリ

存在する (exist)

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ を満たすある x に対して，$x^2-2ax-8>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

y

hint　そのままグラフ　OR　否定



[かがみの国のアリス
あべこべ]

全称命題
存在命題 ← 成立・不成立

否定

すべて = ある
ある = すべて

前提

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ を満たすある x に対して，$x^2-2ax-8>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

かがみ

否定

$0 \leqq x \leqq 2$ で．$x^2-2ax-8 \leqq 0$ が常に成立

[$0 \leqq x \leqq 2$ を満たすすべての x で $x^2-2ax-8 \leqq 0$ が成立]

~~(答)~~

否定の否定

(答)

$\boxed{45B}$

じゃま

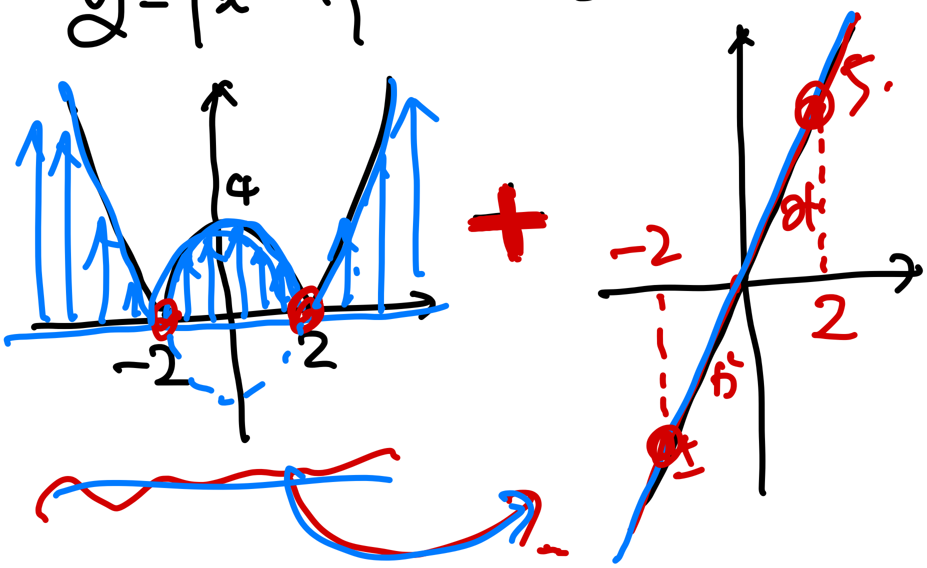
方程式 $|4-x^2|+2x+k=0$ の異なる実数解の個数が 4 であるような定数 k の値の範囲を求めよ.

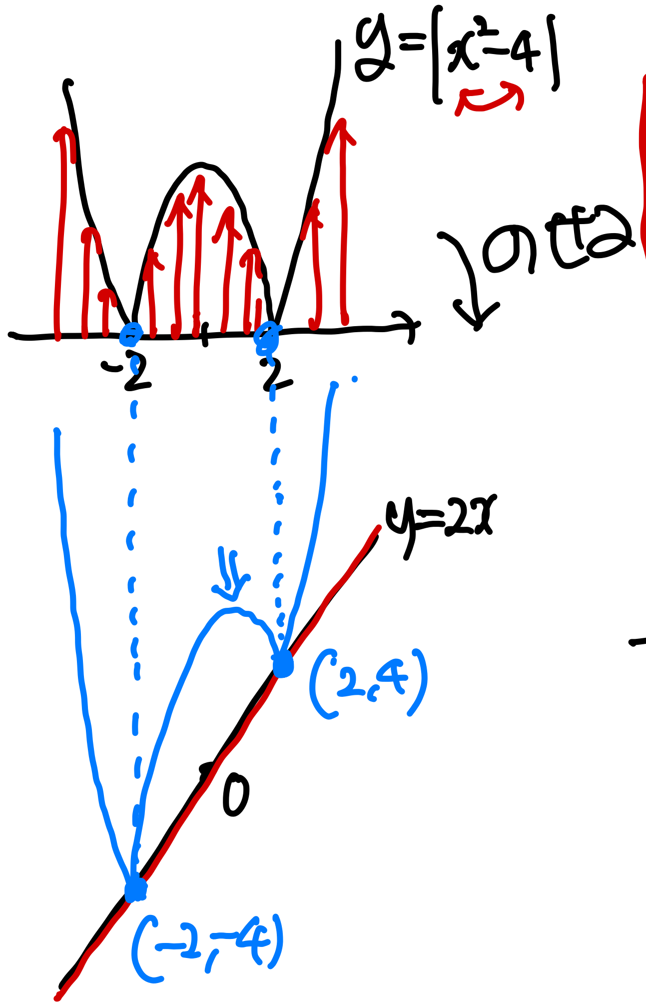
定数分離

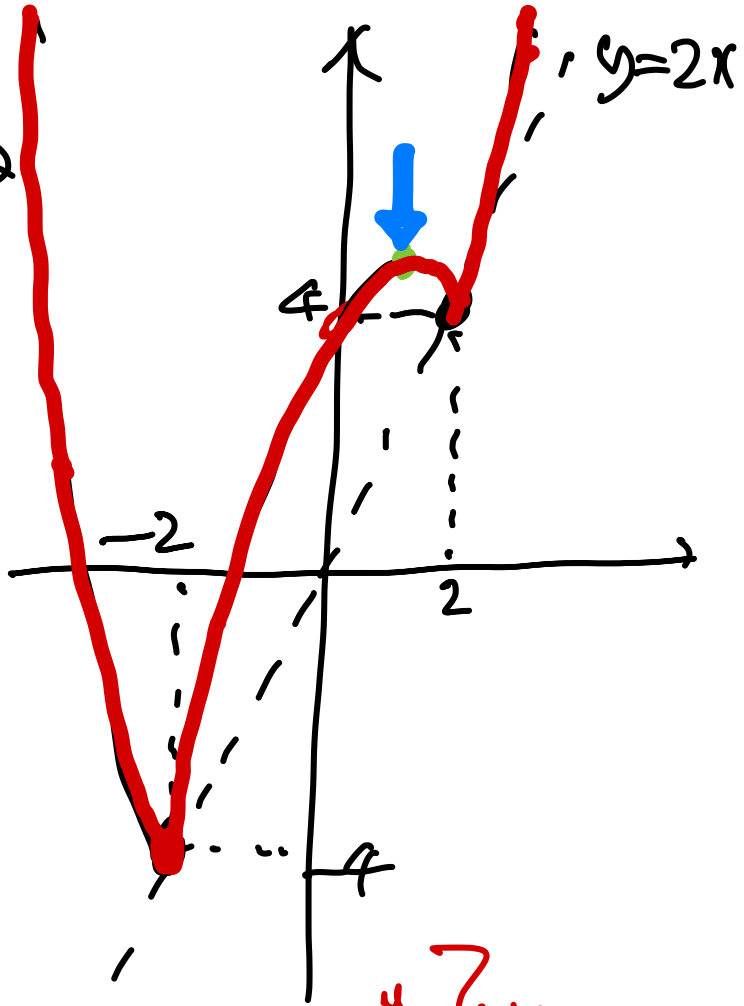
$$\underbrace{-|4-x^2|-2x}_{=y}=\underbrace{k}_{=y} \quad \text{or} \quad \underbrace{|4-x^2|+2x}_{=y}=\underbrace{-k}_{=y}$$

$y=|4-x^2|+2x$ と $y=-k$ の共有点に着目

$y=|x^2-4|$ と $y=2x$ の和







$y = |x^2-4| + 2x$

$$= \begin{cases} +(\quad)+2x \\ -(\quad)+2x \end{cases}$$

$-x^2+2x+4$

$= -(x-1)^2+5$

$(1,5)$

グラフより

$4 < -k < 5$

$\therefore -5 < k < -4$

KKK（2次）

xの2次方程式
$ax^2+bx+c=0$
の2解が α, β

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

単に「2解」
$\Updownarrow$
重解を含む

きまり

合理的

例1　KKK　誤答例

2解を $x=\alpha, \beta$ とおく
$-2<\alpha, \beta<0$

$$\therefore \begin{cases} -4<\alpha+\beta<0 \\ 0<\alpha\beta<4 \end{cases}$$

これを解く

$D\geqq 0$も連立

47 C

関数 $f(x)=-x^2+kx+k-2$，$g(x)=x^2-(k-2)x+3$ について，次の条件を満たすような定数 k の値の範囲をそれぞれ求めよ．

(1) どのような実数 x に対しても $f(x)<g(x)$ が成り立つ．

(2) どのような実数 x_1，x_2 に対しても $f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ．

48 C

x についての 2 次方程式 $x^2-2kx+2k^2-2=0$ が $x>0$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ．

入試問題にチャレンジ (6)

任意の実数 x，y に対して，不等式 $a(x^2+y^2)-(a+3)xy \geqq 0$ が成り立つような定数 a の最小値を求めよ．

(1999・自治医科大学)

第21講　　式と証明(1)

1　整式の除法

2つの整式 $f(x)$, $g(x)$ (ただし, $g(x) \neq 0$) に対して,

$$\boldsymbol{f(x) = g(x)Q(x) + R(x)}$$
$$\boldsymbol{(\,R(x)\ \text{の次数}) < (\,g(x)\ \text{の次数})\ \text{または}\ R(x) = 0}$$

を満たす整式 $Q(x)$, $R(x)$ がただ1組存在する.

$Q(x)$ を, $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの**商**, $R(x)$ を**余り**という.

特に, $R(x) = 0$ のとき, $f(x)$ は $g(x)$ で**割り切れる**という.

2　分数式

A が整式で, B が定数でない整式のとき, $\dfrac{A}{B}$ の形の式を**分数式**という.

3　分数式の四則計算

加法　$\dfrac{A}{C} + \dfrac{B}{C} = \dfrac{A+B}{C}$　　**減法**　$\dfrac{A}{C} - \dfrac{B}{C} = \dfrac{A-B}{C}$

乗法　$\dfrac{A}{B} \times \dfrac{C}{D} = \dfrac{AC}{BD}$　　**除法**　$\dfrac{A}{B} \div \dfrac{C}{D} = \dfrac{A}{B} \times \dfrac{D}{C} = \dfrac{AD}{BC}$

4　恒等式

x がどのような値をとっても, その両辺の式の値が存在する限り, 両辺の値が等しいとき, その等式を x についての**恒等式**という.

5　等式 $A = B$ の証明

等式 $A = B$ を証明するとき, 次のような方法がよく用いられる.

(i)　A または B の一方を変形して, 他方を導く.

(ii)　A, B のそれぞれ変形して, 同じ式を導く.

(iii)　$A - B = 0$ を示す.

6　不等式 $A \geqq B$ の証明

$A - B$ が0以上の数の和や積で書けることを利用する方法や, $A - B$ をある文字の関数とみなして値域を調べたりする方法がある.

7　有名な不等式

(1)　**相加平均と相乗平均の大小関係**

$a \geqq 0$, $b \geqq 0$ のとき, $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つ.

(等号が成り立つのは $a = b$ のとき)

(2)　**コーシー・シュワルツの不等式**

a, b, x, y が実数のとき, $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geqq (ax + by)^2$ が成り立つ.

(等号が成り立つのは $a : b = x : y$ のとき)

161 A

次の問に答えよ.

(1) x^2-3x-4 を $x+2$ で割った商と余りを求めよ.

(2) x^2+x+1 で割ると，商が $x-1$，余りが $2x+3$ である多項式を求めよ.

(3) x^3-x^2+3x+1 を多項式 $f(x)$ で割ると，商が $x+1$，余りが $3x-1$ であるとき，$f(x)$ を求めよ.

(1) 商は $x-5$, 余りは 6.

(2) x^3+2x+2.

(3) $f(x)=x^2-2x+2$.

162 A

次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{3x-4}{x^2-3x+2}-\dfrac{3x+2}{x^2-4}$

(2) $\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{x-5}{x-4}$

(3) $\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{1+x}}}$

(1) $\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$.

(2) $\dfrac{-8x+12}{x(x+1)(x-3)(x-4)}$.

(3) -1.

163 A

次の等式が x についての恒等式となるような定数 a，b，c の値を求めよ.

(1) $x^3+x^2-8x+5=(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c$

(2) $\dfrac{3}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

(1) $a=7,\quad b=8,\quad c=1$.

(2) $a=1,\quad b=-1,\quad c=2$.

164 B

$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) x^2+x-1

(2) $4x^4+3x^3+2x^2+x$

165 B

(1) $a+b+c=0$，$abc\neq 0$ のとき，等式

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$$

が成り立つことを示せ．

(2) a，b，c が実数のとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$$

が成り立つことを示せ．

(3) a，b，x，y が実数のとき，不等式

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$$

が成り立つことを示せ．

166 B

$x>0$ のとき，$\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$ の最小値を求めよ．

167 C

a，b は正の整数とする．$\sqrt{3}$ は $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{a+3b}{a+b}$ の間にあることを示せ．

168 C

$|x|<1$，$|y|<1$，$|z|<1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $xy+1>x+y$

(2) $xyz+2>x+y+z$

入試問題にチャレンジ (21)

実数 x，y，z について $(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$ を示し，等号がいつ成り立つかを答えよ．これを用いて，命題

「$x^2+y^2+z^2 \leqq a$ ならば $x+y+z \leqq a$ である」

が真となる最小の正の実数 a を求めよ．

(2005・岡山大学)

第22講　式と証明(2)

1 **負の数の平方根**

2乗すると -1 になる数の1つを**虚数単位**といい，i で表す．すなわち，

$$i^2 = -1$$

さらに，

$$a > 0 \text{のとき，} \sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i \quad \text{特に，} \sqrt{-1} = i$$

2 **複素数**

a，b を実数とするとき，$a + bi$ の形の数を**複素数**といい，a を**実部**，b を**虚部**という．

3 **複素数の相等**

a，b，c，d は実数とする．複素数 $\alpha = a + bi$，$\beta = c + di$ に対して，

$$\alpha = \beta \iff a = c,\quad b = d$$

4 **共役な複素数**

a，b は実数とする．複素数 $\alpha = a + bi$ に対して，$a - bi$ を α と**共役な複素数**といい，$\overline{\alpha}$ と書く．

5 **実数係数の方程式の虚数解**

実数を係数とする n 次方程式が虚数解 α をもつとき，共役複素数 $\overline{\alpha}$ もその方程式の解である．

6 **2次方程式の解と係数の関係**

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の**2つの解を** α，β とすると，

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

169 A

i を虚数単位とするとき，次の計算をせよ.

(1) $(4+5i)-(3-2i)$

(2) $(2+i)(1-i)$

(3) $\dfrac{2+5i}{1-3i}$

170 A

i を虚数単位とするとき，次の等式を満たす実数 x，y を求めよ.

(1) $(2i+3)x+(2-3i)y=5-i$

(2) $\dfrac{x+2i}{1+3i}=1+yi$

171 A

2 次方程式 $2x^2-4x+5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ.

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $(\alpha-\beta)^2$

(3) $\alpha^3+\beta^3$

172 B

i を虚数単位とするとき，等式 $z^2 = 8 - 6i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ.

173 B

x の方程式 $x^2 + (m-3)x + m^2 - 6m - 3 = 0$ が実数解 α，β をもつとき，$\alpha^2 + \beta^2$ のとり得る値の範囲を求めよ.

174 B

2 次方程式 $x^2 - 5x + 5 = 0$ の 2 つの解の小数部分を解とするような 2 次方程式のうち，x^2 の係数が 1 であるものを求めよ.

175 C

m は整数とする．x についての 2 次方程式 $x^2 - mx + 3m = 0$ が整数解をもつような m の値を求めよ．さらに，そのときの整数の解をすべて求めよ．

176 C

k は実数の定数とする．x についての 2 次方程式 $x^2 + kx + k^2 + 3k - 9 = 0$ が実数解をもつとき，その解の値の範囲を求めよ．

入試問題にチャレンジ (22)

0 以上の実数 s，t が $s^2 + t^2 = 1$ を満たしながら動くとき，方程式

$$x^4 - 2(s+t)x^2 + (s-t)^2 = 0$$

の解のとる値の範囲を求めよ．

(2005・東京大学)

第23講　式と証明(3)

1 **剰余の定理**

整式 $P(x)$ について,

$$(P(x)\text{ を }x-\alpha\text{ で割ったときの余り}) = P(\alpha)$$

2 **因数定理**

整式 $P(x)$ について,

$$「P(x)\text{ が }x-\alpha\text{ で割り切れる}」\iff P(\alpha)=0$$

3 **3次方程式の解と係数の関係**

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の **3つの解を** α, β, γ とすると,

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\qquad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

4 **1の3乗根 ω**

3次方程式 $x^3=1$ の解を**1の3乗根**という.

さらに, $x^3=1$ の虚数解 $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ の一方を ω と表すことが多い. このとき, 次が成り立つ.

(i) $\omega^3=1$　(ii) $\omega^2+\omega+1=0$　(iii) $\omega^2=\overline{\omega}$

5 **特殊な4次方程式**

(1) **複2次方程式**

$x^4+ax^2+b=0$ の形の方程式を**複2次方程式**という.

(2) **相反方程式**

$a\neq 0$ とするとき, $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ の形の方程式を**相反方程式**という.

177 A

多項式 x^3+3x^2+ax+5 を $x+1$ で割ったときの余りが 3 となるような定数 a の値を求めよ.

178 A

次の方程式を解け.

(1) $x^3+3x^2-4=0$

(2) $2x^3-7x^2+2=0$

(3) $(x-1)(x-2)(x-3)=8\cdot 7\cdot 6$

179 A

3 次方程式 $2x^3-2x^2+3x+1=0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき，次の式の値を求めよ.

(1) $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

180 B

多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 2，$x-2$ で割ると余りが 3 である．このとき，$f(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りを求めよ．

181 B

実数を係数とする 3 次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $3+2i$ を解にもつとする．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 係数 a，b の値を求めよ．さらに，他の 2 つの解を求めよ．

(2) 3 つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ の値を求めよ．

182 B

方程式

$$2x^4-9x^3-x^2-9x+2=0 \qquad \cdots (*)$$

について，次の問に答えよ．

(1) $t=x+\dfrac{1}{x}$ とおいて，$(*)$ を t の方程式で表せ．

(2) $(*)$ を解け．

183 C

多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 5，$(x+2)^2$ で割ると余りが $-23x-35$ である．このとき，$f(x)$ を $(x-1)(x+2)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

184 C

1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，

$$\omega^{2n}+\omega^{n}+1$$

の値を求めよ．ただし，n は自然数とする．

入試問題にチャレンジ (23)

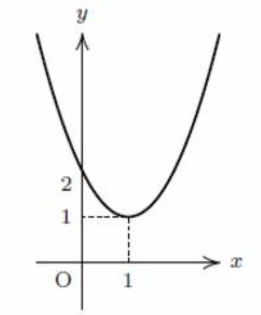
多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか．

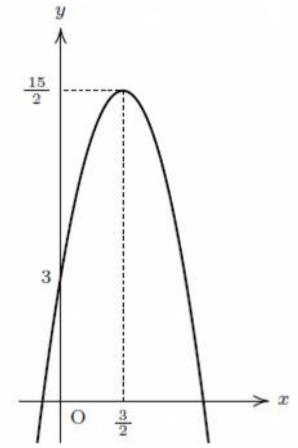
(2003・京都大学)

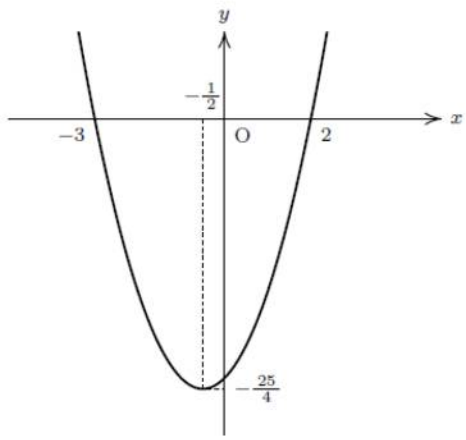
2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】５講

33A　(1)軸 $x=1$，頂点 $(1,1)$　(2)軸 $x=\dfrac{3}{2}$，頂点 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{2}\right)$

(3)軸 $x=-\dfrac{1}{2}$，頂点 $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{25}{4}\right)$　　【解法】平方完成







34A　(1) $x=5$ のとき最大値 5，$x=3$ のとき最小値 1

(2) $x=1$ のとき，最大値 $\dfrac{7}{2}$，$x=-2$ のとき最小値 -10　　【解法】平方完成

35A　(1) $y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+5$　　(2) $y=2x^2-5x+2$

【解法】(1) $y=a(x-p)^2+q$ 型　　(2) $y=ax^2+bx+c$ 型

36B　(1) $y=2x^2+1$ または，$y=2(x-1)^2+3$　　(2)　$(a,b)=(7,9)$

【解法】２次関数なので，平行移動・対称移動は「頂点と最高次係数」に着目

37B　$(a,b)=(2,5),(-2,9)$　　【解法】$y=a(x-p)^2+q$ 型

38B　(1)　$m(a)=\begin{cases}1 & (a<0)\\ -4a^2+1 & (0\leqq a\leqq 1)\\ -8a+5 & (a>1)\end{cases}$

(2)　$M(a)=\begin{cases}-8a+5 & \left(a<\dfrac{1}{2}\right)\\ 1 & \left(a\geqq\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$

【解法】(1)下に凸の最小値　⇒　軸が変域の内か外かで場合分け（３パターン）

(2)下に凸の最大値　⇒　軸が変域の真ん中より右寄りか左寄りかで場合分け（２パターン）

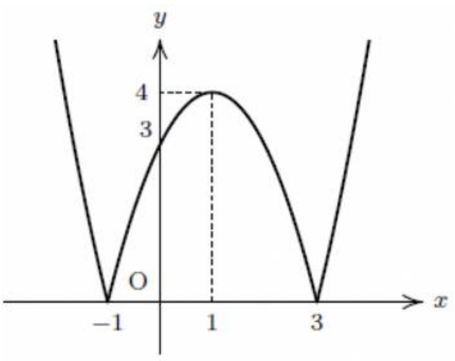
39C　$(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{5}{8}$，　$(x,y)=(-1,0)$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$

40C　２と８

ﾁｬﾚ５　(1) $k=6$　(2) $m(k)=k-4,\ M(k)=k+5$　(3)最大値 $k+4$

2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】 6 講

$\boxed{4\ 1\mathrm{A}}$　(1)右図　(2) $0 < k < 4$



【解法】(1)全体絶対値のグラフ⇒折り返し　(2)定数分離（済）

$\boxed{4\ 2\mathrm{A}}$　$(a, b) = (-1, 1)$

【解法】結論からお迎え（解⇔因数）

$\boxed{4\ 3\mathrm{A}}$　$-2\sqrt{6} < k < 2\sqrt{6}$

【解法】不等式＝グラフの上下に帰着

$\boxed{4\ 4\mathrm{A}}$　(1) $-6 < a < \dfrac{10}{3}$　　(2) $a < -1$

【解法】不等式＝グラフの上下に帰着

$\boxed{4\ 5\mathrm{B}}$　$-5 < k < -4$

【解法】方程式の解⇔グラフの共有点の x 座標に対応

（ｉ）定数分離　（ⅱ）絶対値分離　のいずれでも解ける

$\boxed{4\ 6\mathrm{B}}$　$2 \leqq k < \dfrac{5}{2}$

【解法】2 次方程式の解の配置問題

「解⇔共有点」の対応を利用して，「軸，端点，判別式」の利用