5/18 私立1組.

- 21コめ B〜
- 順天 かこもん

164 B

$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x^2 + x - 1$

(2) $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$

165 B

(1) $a+b+c=0$，$abc \neq 0$ のとき，等式

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$$

が成り立つことを示せ．

(2) a，b，c が実数のとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$$

が成り立つことを示せ．

(3) a，b，x，y が実数のとき，不等式

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$$

が成り立つことを示せ．

166 B

$x > 0$ のとき，$\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$ の最小値を求めよ．

164 B

(1) 代入でもOK

$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x^2 + x - 1$

(2) $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$

注

$x = \dfrac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$ & KKK

(1) $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ より

$2x+1=\sqrt{5}$

2乗 $4x^2+4x-4=0$

$\therefore\ x^2+x-1=0$ //

とおく

(2) $f(x) = 4x^4+3x^3+2x^2+x = ?$

$x^2+x-1=0$ を利用．

次数を下げ

$f(x)$ を x^2+x-1 で割る．

筆算

$f(x) = (\underbrace{x^2+x-1}_{ゼロ})(4x^2-x+7) + (-7x+7)$

より．

$f\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = -7\times\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 7$

$= \dfrac{21-7\sqrt{5}}{2}$

補足

係数比較で調節．

あまり1次以下

① $4x^4+3x^3+2x^2+x$

$=(x^2+x-1)(4x^2-x+7)+(-7x+7)$

1次 8
定 −7

次数下げ

② $\boxed{x^2+x-1=0} \iff x^2=-x+1$

2次 ⇒ 1次

(与式): 4次 → (3次) → 2次 → 1次

$f(x)=x^2(4x^2+3x+2)+x$

4次 ↓ 2次

$=(-x+1)(-x+6)+x$

$=x^2-7x+6+x$

↓ 1次

$=-7x+7$

$=\cdots\cdots$

次数下げ

~~通分~~

(1) $a+b+c=0$, $abc \neq 0$ のとき，等式

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$$

が成り立つことを示せ.

$$(\text{左辺}) = \frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$$

$$= \frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$

← 分母ごとに整理

$$= \frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}$$

$$= -3 : (\text{右辺})$$ ■

注

(1) $a+b+c=0$, $abc \neq 0$ のとき，等式

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$$

が成り立つことを示せ.

$$\frac{b+c}{bc} = \frac{-a}{bc}$$ など

(2) a, b, c が実数のとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$$

が成り立つことを示せ.

≧0を示す
( )^{2}を作る

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$$

このままだと分解

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

$$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$$

(等号 $a=b=c$)

補足

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

3乗3積

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

和づくり

2乗マイナス総あたり.

2乗マイナス総あたり
⇨ $\frac{1}{2}$でくくる.

(2) a, b, c が実数のとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$$

が成り立つことを示せ.

一文字整理.

対称性くずす

$\boxed{\text{別解}}$ $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$$=a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc$$

$$=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2-\frac{(b+c)^2}{4}+b^2+c^2-bc$$

$$=\left(\quad 〃 \quad\right)^2+\frac{1}{4}\left(3b^2+3c^2-6bc\right)$$

$$=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2 \geqq 0$$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca. \blacksquare$$

(等号 $a=\dfrac{b+c}{2}$ かつ $b=c$ つまり $a=b=c$)

(3) a, b, x, y が実数のとき，不等式

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$$

が成り立つことを示せ．

※ コーシー・シュワルツの不等式

[解1]

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$$

$$= \cancel{a^2x^2}+a^2y^2+b^2x^2+\cancel{b^2y^2}-(\cancel{a^2x^2}+abxy+\cancel{b^2y^2})$$

$$=(ay-bx)^2 \geqq 0 \quad \blacksquare$$

㊟ 等号成立は　$ay=bx$ のとき

$\theta=0, \pi$

$\cos\theta=\pm1$

[解2]

$\vec{u}=(a, b)$，$\vec{v}=(x, y)$ とおく

$$\boxed{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \geqq (\vec{u}\cdot\vec{v})^2}$$

$\cos^2\theta$　なし　あり

$0 \leqq \cos^2\theta \leqq 1$

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2 \quad \blacksquare$$

㊟ 等号成立は　$\vec{u} /\!/ \vec{v}$ ← 平行条件

つまり　$a:b=x:y$ のとき

166 B

$x>0$ のとき，$\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$ の最小値を求めよ．

$y=\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\cdot\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$ とおく．

$$= x^2+\frac{36}{x^2}+13$$

$$\geqq 2\sqrt{x^2\times\frac{36}{x^2}}+13$$

$$=25 \qquad \therefore y\geqq 25$$

~~最小値 (答)~~ 記述では

等号成立は $x^2=\dfrac{36}{x^2}$

$x>0$ より $x=\sqrt{6}$ のとき

最小値 $\underline{25}$ //

相加相乗

- ○$+\dfrac{1}{○}$ 型で有効
- Max.minでは 等号成立を必ず調べる

注 ×

$$y=\left(x+\frac{4}{x}\right)\times\left(x+\frac{9}{x}\right)$$

$$\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}\times 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}$$

$$=24 \qquad \therefore \underline{y\geqq 24}$$

不等式としては成立するが等号は不成立．

等号は $x=\dfrac{4}{x}$ かつ $x=\dfrac{9}{x}$ ： 不成立

相加・相乗

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$ とする

$\boxed{2文字}$ $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ （等号 $a=b$）

$\boxed{3文字}$ $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ （等号 $a=b=c$）

$\boxed{4文字}$ $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ （等号 $a=b=c=d$）

$\sqrt{\ } \Rightarrow$ ~~2乗~~ ~~$\sqrt[3]{\ }$~~ $\Rightarrow 3$乗 あわてるな

地道に

$\boxed{2}$ $a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$

$\boxed{a=(\sqrt[3]{a})^3 など}$

$\boxed{3}$ $a+b+c-3\cdot\sqrt[3]{abc}$

$x=\sqrt[3]{a},\ y=\sqrt[3]{b},\ z=\sqrt[3]{c}$ とおく

$= x^3+y^3+z^3-3xyz$ 3乗 3積

$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$+$

$= \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geq 0$

$a=(\sqrt[4]{a})^4$ など

$\boxed{4}$ $a+b+c+d-4\cdot\sqrt[4]{abcd}$

$x=\sqrt[4]{a}$ など

$= x^4+y^4+z^4+w^4-4xyzw$

$=$ 公式なし.

$$a+b+c+d = (a+b) + (c+d)$$

$$\geqq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd}$$

$$= 2\left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right)$$

$$\geqq 2 \times 2\sqrt{\sqrt{ab} \times \sqrt{cd}}$$

$$= 4\left((ab)^{\frac{1}{2}} \times (cd)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 4(abcd)^{\frac{1}{4}}$$

$$= 4 \cdot \sqrt[4]{abcd}$$ ■

$\sqrt{\ } = (\ )^{\frac{1}{2}}$

等号成立は、

$a=b$ かつ $c=d$ かつ $\sqrt{ab} = \sqrt{cd}$

つまり、$a=b=c=d$ のとき

以上の考え方は、5文字以上に応用しにくい

167 C

a，bは正の整数とする．$\sqrt{3}$ は $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{a+3b}{a+b}$ の間にあることを示せ．

168 C

$|x|<1$，$|y|<1$，$|z|<1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $xy+1>x+y$

(2) $xyz+2>x+y+z$

入試問題にチャレンジ (21)

実数x，y，zについて $(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$ を示し，等号がいつ成り立つかを答えよ．これを用いて，命題

「$x^2+y^2+z^2 \leqq a$ ならば $x+y+z \leqq a$ である」

が真となる最小の正の実数aを求めよ．

(2005・岡山大学)

入試問題にチャレンジ (21)　答 $a=3$.　誘導

実数 x, y, z について $(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$ を示し，等号がいつ成り立つかを答えよ．これを用いて，命題

「$x^2+y^2+z^2 \leqq a$ ならば $x+y+z \leqq a$ である」

が真となる最小の正の実数 a を求めよ．

(2005・岡山大学)

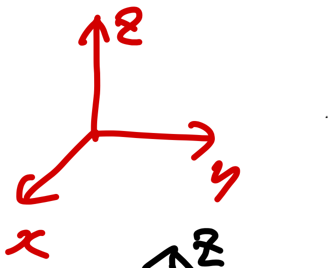
《雑談》

もし，誘導がなければ，

　　　　小　　　　　　大

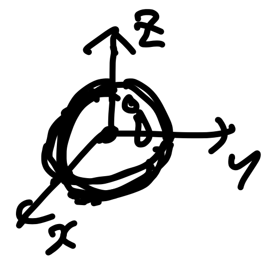
「$x^2+y^2+z^2 \leqq a$ ならば $x+y+z \leqq a$ である」

が真となる最小の正の実数 a を求めよ．

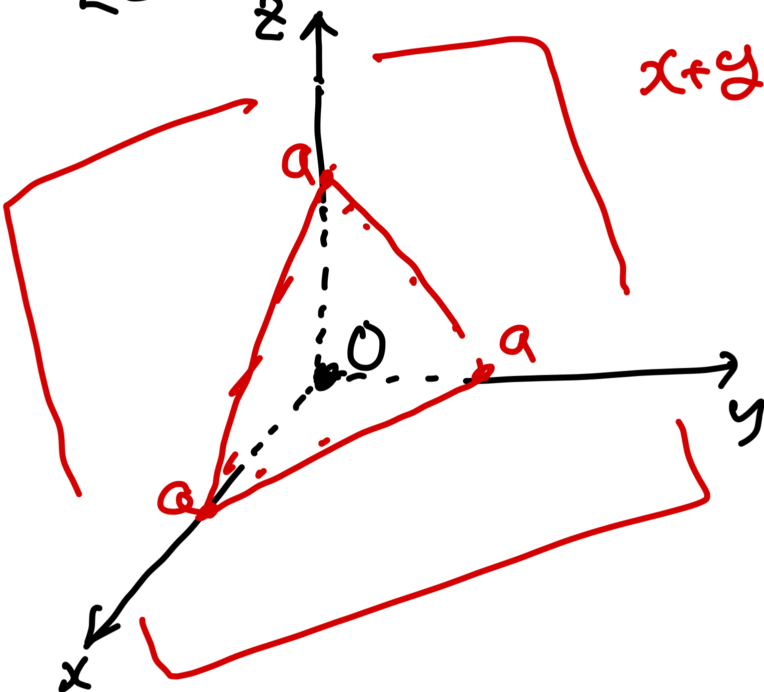


図形的に考える

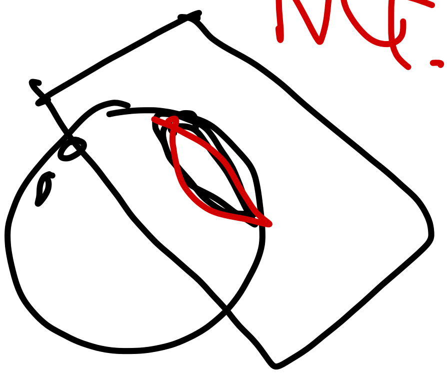
$$\begin{cases} ①: x^2+y^2+z^2 \leqq a & \leftarrow \text{球体} \\ ②: x+y+z \leqq a & \leftarrow \text{平面} \end{cases}$$



$x+y+z=a$

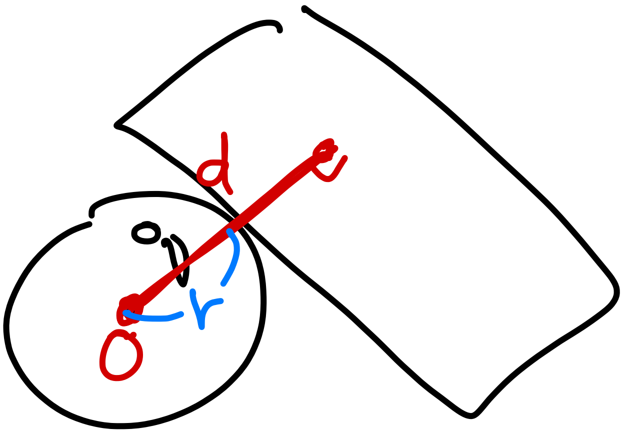


平面 $x+y+z=a$ と原点側の領域



NG.

球と平面が共有点をもたない，または接する条件を求める。



球の半径 $r=\sqrt{a}$
球の中心Oと
平面 $x+y+z-a=0$ の
キョリ $d=\dfrac{|0+0+0-a|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{|a|}{\sqrt{3}}$

条件より $\boxed{d \geqq r}$

$$\frac{|a|}{\sqrt{3}} \geqq \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a} \geqq \sqrt{3}$$

$$a \geqq 3$$

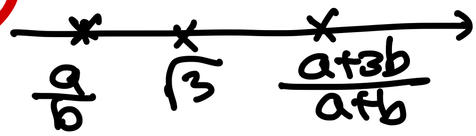
これをみたす最小の a は、 $\underline{a=3}$

☆ 点と平面のキョリ公式

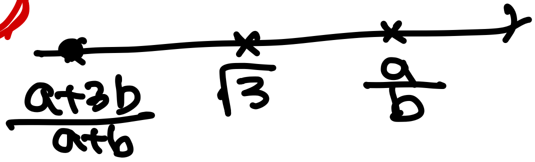
167 C

a, bは正の整数とする．$\sqrt{3}$ は $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{a+3b}{a+b}$ の間にあることを示せ．

(i)



(ii)



場合分けして解く → メンドウ、記述の方法が困難

下書き

(i) $\begin{cases} \dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}>0 \ \oplus \\ \text{かつ} \\ \sqrt{3}-\dfrac{a}{b}>0 \ \oplus \end{cases}$ または． (ii) $\begin{cases} \dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}<0 \ \ominus \\ \text{かつ} \\ \sqrt{3}-\dfrac{a}{b}<0 \ \ominus \end{cases}$

$\left(\dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{3}-\dfrac{a}{b}\right)>0$ を示せばよい

$$\left(\frac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{3}-\frac{a}{b}\right)$$ → ~~展開~~

通分 まとめる

$$=\frac{a+3b-\sqrt{3}(a+b)}{a+b}\times\frac{\sqrt{3}b-a}{b}$$

$$\begin{aligned}&(1-\sqrt{3})a+(3-\sqrt{3})b\\&=(1-\sqrt{3})a-\sqrt{3}(1-\sqrt{3})b\\&=(1-\sqrt{3})(a-\sqrt{3}b)\\&=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}b-a)\end{aligned}$$

$x-y=\triangle(y-x)$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)\times(\sqrt{3}b-a)}{a+b}\times\frac{\sqrt{3}b-a}{b}$$

a, b：正整数

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}b-a)^2}{(a+b)b}\geqq 0 \quad ∎$$

$(\sqrt{3}b-a)^2 \geqq 0$ の等号は不成立.

なぜなら $\sqrt{3}b-a=0$ と仮定すると

$\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$ となり

無理数＝有理数で矛盾

背理法

$$\therefore \left(\frac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\frac{a}{b}\right)>0$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)>0 \\ \left(\sqrt{3}-\dfrac{a}{b}\right)>0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \left(\dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)<0 \\ \left(\sqrt{3}-\dfrac{a}{b}\right)<0 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{a}{b}<\sqrt{3}<\frac{a+3b}{a+b} \quad \text{または.} \quad \frac{a+3b}{a+b}<\sqrt{3}<\frac{a}{b} \quad \blacksquare$$

168 C

$-1<x<1$, $-1<y<1$, $-1<z<1$

$|x|<1$, $|y|<1$, $|z|<1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $xy+1>x+y$

(2) $xyz+2>x+y+z$

(1) (左辺) − (右辺)

$= (xy+1)-(x+y)$

$= (y-1)x-(y-1)$ ← xで整理

$= (x-1)(y-1) > 0$ 圏

$\ominus \times \ominus$

$\left(\because \begin{array}{l} -2<x-1<0 \\ -2<y-1<0 \end{array}\right)$

よって $xy+1>x+y$

(2) (左辺) − (右辺)

$= (xyz+2)-(x+y+z)$

$= (yz-1)x+2-y-z = \cdots$

(1) より. $|a|<1,\ |b|<1 \Rightarrow ab+1 > a+b$ 　公式化

• $a=x,\ b=y$ 代入 　$xy+1 > x+y$ ——— ①

• Aim $xyz+2 > x+y+z$ 　3個の積

$a=xy,\ b=z$ とおくと 　$|xy|<1,\ |z|<1$ より

$xy \times z+1 > xy+z$ ——— ②

② より $+1$ 　$\underline{xyz+2}$ (左辺) $> xy+z+1$

① より $+z$ 　$xy+z+1 > \underline{x+y+z}$ (右辺)

$\therefore\ xyz+2 > xy+z+1 > x+y+z$ 　■

第22講　式と証明(2)

1 **負の数の平方根**

2乗すると -1 になる数の1つを**虚数単位**といい，i で表す．すなわち，

$$i^2 = -1$$

さらに，

$$a > 0 \text{のとき，} \sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i \quad \text{特に，} \sqrt{-1} = i$$

2 **複素数**

a，b を実数とするとき，$a+bi$ の形の数を**複素数**といい，a を**実部**，b を**虚部**という．

3 **複素数の相等**

a，b，c，d は実数とする．複素数 $\alpha = a+bi$，$\beta = c+di$ に対して，

$$\alpha = \beta \iff a = c, \quad b = d$$

4 **共役な複素数**

a，b は実数とする．複素数 $\alpha = a+bi$ に対して，$a-bi$ を α と**共役な複素数**といい，$\overline{\alpha}$ と書く．

5 **実数係数の方程式の虚数解**

実数を係数とする n 次方程式が虚数解 α をもつとき，共役複素数 $\overline{\alpha}$ もその方程式の解である．

6 **2次方程式の解と係数の関係**

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β とすると，

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

169 A

i を虚数単位とするとき，次の計算をせよ．

(1) $(4+5i)-(3-2i)$

(2) $(2+i)(1-i)$

(3) $\dfrac{2+5i}{1-3i}$

170 A

i を虚数単位とするとき，次の等式を満たす実数 x，y を求めよ．

(1) $(2i+3)x+(2-3i)y=5-i$

(2) $\dfrac{x+2i}{1+3i}=1+yi$

171 A

2 次方程式 $2x^2-4x+5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $(\alpha-\beta)^2$

(3) $\alpha^3+\beta^3$

$\boxed{１６９A}$　(1)　$1+7i$　(2)　$3-i$　(3)　$\dfrac{-13+11i}{10}$

【解法】$i^2=-1$　(3)分母実数化（有理化変形）

$\boxed{１７０A}$　(1)　$x=1, y=1$　(2)　$x=4, y=-1$

【解法】実部・虚部の比較　(2)は分母実数化よりも分母をはらうのがBetter

$\boxed{１７１A}$　(1)　$\alpha^2+\beta^2=-1$　(2)　$(\alpha-\beta)^2=-6$　(3)　$\alpha^3+\beta^3=-7$

【解法】解と係数の関係＆対称式の変形

$\boxed{\text{連分数}}$ 東洋↑ $\frac{a}{b}$ ↓西洋 a over b $\frac{2}{3}$

$$y=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$ とすると y は $ay^2+by+c=0$ を満たす。

ただし $a>0$，a，b，c の最大公約数は 1 とする。

このとき $a=$ $\boxed{\text{ア}}$ ，$b=$ $\boxed{\text{イ}}$ ，$c=$ $\boxed{\text{ウエ}}$ であり，

$$y=\cfrac{1}{2+\underbrace{\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}_{=y}}$$

マトリョーシカ

$y=\frac{1}{2+y}$

$\therefore y^2+2y-1=0$

$a=1,\ b=2,\ c=-1$

連分数.

2次方程式

$$y=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$ とすると y は $\boxed{ay^2+by+c=0}$ を満たす。

ただし $a>0$，a，b，c の最大公約数は 1 とする。

このとき $a=$ $\boxed{\text{ア}}$，$b=$ $\boxed{\text{イ}}$，$c=$ $\boxed{\text{ウエ}}$ であり，

1　　2　　-1

$$y=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}=y$$

マトリョーシカ

$$y=\frac{1}{2+y}$$

$$y^2+2y-1=0$$

$$y=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$