5/9 数学ゼミ

私立1組

22講 A, B, C

チャレ(22)は 今日 hintをいいます。

23講

第22講　式と証明(2)

1 **負の数の平方根**

2乗すると -1 になる数の1つを**虚数単位**といい，i で表す．すなわち，

$$i^2 = -1$$

さらに，

$$a > 0 \text{ のとき，} \sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i \quad \text{特に，} \sqrt{-1} = i$$

2 **複素数**

a，b を実数とするとき，$a + bi$ の形の数を**複素数**といい，a を**実部**，b を**虚部**という．

3 **複素数の相等**

a，b，c，d は実数とする．複素数 $\alpha = a + bi$，$\beta = c + di$ に対して，

$$\alpha = \beta \iff a = c, \quad b = d$$

4 **共役な複素数**

a，b は実数とする．複素数 $\alpha = a + bi$ に対して，$a - bi$ を α と**共役な複素数**といい，$\overline{\alpha}$ と書く．

5 **実数係数の方程式の虚数解**

実数を係数とする n 次方程式が虚数解 α をもつとき，共役複素数 $\overline{\alpha}$ もその方程式の解である．

6 **2次方程式の解と係数の関係**

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解を α，β とすると，

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

169 A

i を虚数単位とするとき，次の計算をせよ．

(1) $(4+5i)-(3-2i)$

(2) $(2+i)(1-i)$

(3) $\dfrac{2+5i}{1-3i} \times \dfrac{1+3i}{1+3i}$

170 A

実部　虚部

i を虚数単位とするとき，次の等式を満たす実数 x，y を求めよ．

(1) $(2i+3)x+(2-3i)y=5-i$

(2) $\dfrac{x+2i}{1+3i}=1+yi$

$x+2i=(1+yi)(1+3i)$

171 A

2 次方程式 $2x^2-4x+5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

(2) $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

(3) $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

１６９A　(1)　$1+7i$　(2)　$3-i$　(3)　$\dfrac{-13+11i}{10}$

【解法】$i^2=-1$　(3)分母実数化（有理化変形）

１７０A　(1)　$x=1, y=1$　(2)　$x=4, y=-1$

【解法】実部・虚部の比較　(2)は分母実数化よりも分母をはらうのがBetter

１７１A　(1)　$\alpha^2+\beta^2=-1$　(2)　$(\alpha-\beta)^2=-6$　(3)　$\alpha^3+\beta^3=-7$

【解法】解と係数の関係＆対称式の変形

△ド・モアブル ×

172 B

i を虚数単位とするとき，等式 $z^2=8-6i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．

$\boxed{172\mathrm{B}}$ $z=3-i,\ -3+i$

【解法】$z=a+bi$ とおき，実部・虚部の比較

$D\geqq 0$ で m の範囲

173 B

x の方程式 $x^2+(m-3)x+m^2-6m-3=0$ が実数解 α，β をもつとき，$\alpha^2+\beta^2$ のとり得る値の範囲を求めよ．

KKK & 平方完成

$\boxed{173\mathrm{B}}$ $8\leqq\alpha^2+\beta^2\leqq 24$

【解法】判別式より $-1\leqq m\leqq 7$，解と係数の関係＆対称式の変形より $8\leqq\alpha^2+\beta^2\leqq 24$

$\sqrt{5}=2.236\cdots$

174 B

2 次方程式 $x^2-5x+5=0$ の 2 つの解の小数部分を解とするような 2 次方程式のうち，x^2 の係数が 1 であるものを求めよ．

全体－整数部分

$\boxed{174\mathrm{B}}$ $x^2-x-2+\sqrt{5}=0$

【解法】元の 2 解は $\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$，その小数部分はそれぞれ，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ に代入して答えを得る。

解⟷因数

$\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}-3$ $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}-1$

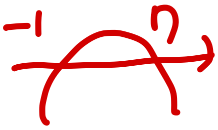
$\boxed{173}$

$$x^2+(m-3)x+m^2-6m-3=0$$

$$D=(m-3)^2-4(m^2-6m-3)$$

$$=-3m^2+18m+21$$

$$=-3(m^2-6m-7)$$



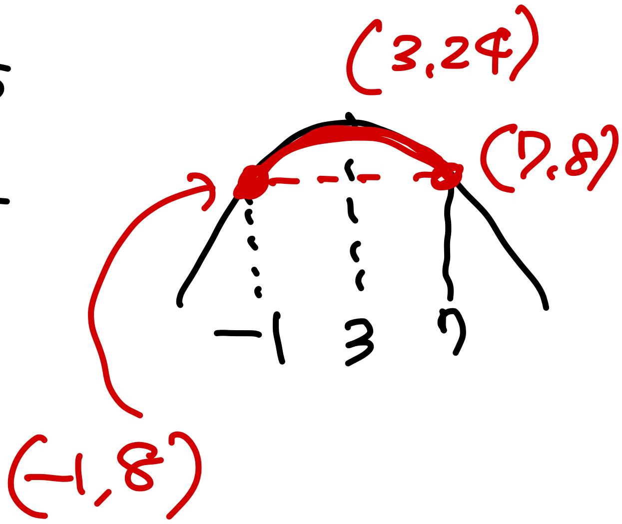
$$=-3(m-7)(m+1)\geqq 0$$ より $-1\leqq m\leqq 7$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$ ← KKK

$$=(m-3)^2-2(m^2-6m-3)$$

$$=-m^2+6m+15$$

平方完成 $=-(m-3)^2+24$



よって

$$8\leqq\alpha^2+\beta^2\leqq 24.$$

2019年度　FG　数学IAIIB　【解答】２２講

$\boxed{１６９A}$ (1)　$1+7i$　(2)　$3-i$　(3)　$\dfrac{-13+11i}{10}$

【解法】$i^2=-1$　(3)分母実数化（有理化変形）

$\boxed{１７０A}$ (1)　$x=1, y=1$　(2)　$x=4, y=-1$

【解法】実部・虚部の比較　(2)は分母実数化よりも分母をはらうのがBetter

$\boxed{１７１A}$ (1)　$\alpha^2+\beta^2=-1$　(2)　$(\alpha-\beta)^2=-6$　(3)　$\alpha^3+\beta^3=-7$

【解法】解と係数の関係＆対称式の変形

$\boxed{１７２B}$　$z=3-i, -3+i$

【解法】$z=a+bi$とおき，実部・虚部の比較

$\boxed{１７３B}$　$8\leqq\alpha^2+\beta^2\leqq 24$

【解法】判別式より$-1\leqq m\leqq 7$，解と係数の関係＆対称式の変形より$8\leqq\alpha^2+\beta^2\leqq 24$

$\boxed{１７４B}$　$x^2-x-2+\sqrt{5}=0$

【解法】元の２解は$\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$，その小数部分はそれぞれ，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \beta=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$に代入して答えを得る。

逆手法を少しだけ

【例題 08】関数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$ の最大，最小を微分法を用いずに求めよ。

答　最大値 $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$，最小値 $\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}$

【例題 09】実数 $x,\ y,\ z$ が関係式　$x^2+y^2+z^2-10x-11=0,\ x^2-yz-4x-5=0$ を満たすとき，

　x のとり得る値の範囲を求めよ。

答　$-1\leqq x\leqq 7$

逆手法を少しだけ

【例題 08】関数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$ の最大，最小を微分法を用いずに求めよ。

答　最大値 $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$，最小値 $\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}$

【例題 09】実数 x, y, z が関係式　$x^2+y^2+z^2-10x-11=0,\ x^2-yz-4x-5=0$ を満たすとき，

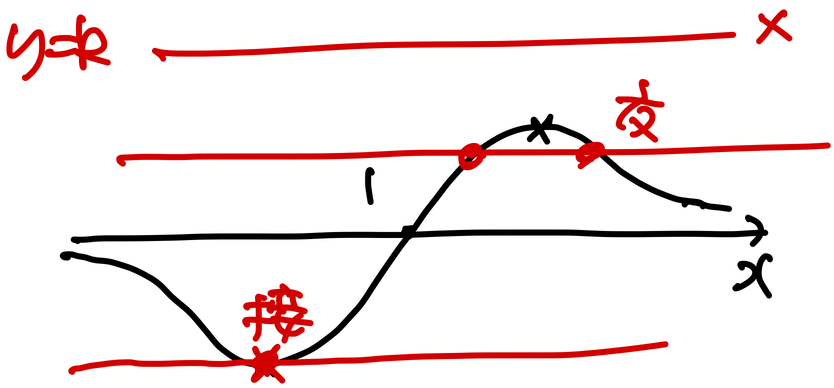
x のとり得る値の範囲を求めよ。

答　$-1 \leqq x \leqq 7$

$\boxed{\text{例}}$ $y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ の Max, min を求めよ。

$\dfrac{1次}{2次} \to 0$ $(x\to\pm\infty)$，分母 $\neq 0$

ヨコ 漸近線 $y=0$　　タテ 漸近線ない



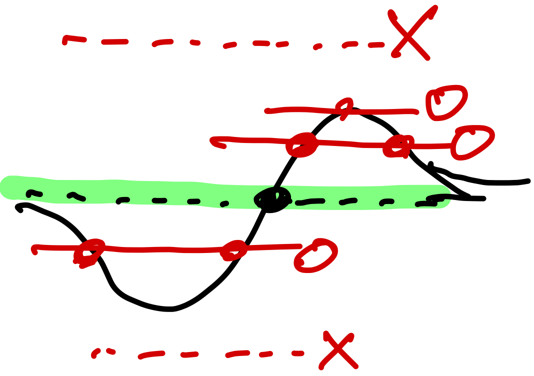
CTスキャン
MRI

$y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ と $y=k$ が

共有点 をもつような k の条件を求める。

$y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ と $y=k$ が

共有点をもつような k の条件を求めよ.



$$k=\frac{x-1}{x^2-x+1}$$

注

$kx^2-(k+1)x+k+1=0$ …㊍

~~いきなり $D\geqq 0$~~

(i) $k=0$ のとき $x=1$ となる. 範囲内

(ii) $k\neq 0$ のとき ㊍は2次方程式

$$D=(k+1)^2-4k(k+1)\geqq 0$$

$$(k+1)(1-3k)\geqq 0$$

$$\therefore\ -1\leqq k\leqq \frac{1}{3}\quad (k\neq 0)$$

(i)(ii)より $-1\leqq k\leqq \dfrac{1}{3}$

最小値 -1, 最大値 $\dfrac{1}{3}$

$\boxed{\text{逆手法}}$ y の範囲を求めたい

⟶ y を定数扱い $y=k$ とおき

⟶ x の存在条件に帰着 ⟶ y の条件

実数

＊ $\boxed{\text{別名}}$ 逆像法, 存在条件の利用

175 C

m は整数とする．x についての 2 次方程式 $x^2 - mx + 3m = 0$ が整数解をもつような m の値を求めよ．さらに，そのときの整数の解をすべて求めよ．

176 C

k は実数の定数とする．x についての 2 次方程式 $x^2 + kx + k^2 + 3k - 9 = 0$ が実数解をもつとき，その解の値の範囲を求めよ．

入試問題にチャレンジ (22)

0 以上の実数 s，t が $s^2 + t^2 = 1$ を満たしながら動くとき，方程式

$$x^4 - 2(s+t)x^2 + (s-t)^2 = 0$$

の解のとる値の範囲を求めよ．

(2005・東京大学)

0個じゃない．
少なくとも1つの

175 C

m は整数とする．x についての2次方程式 $x^2 - mx + 3m = 0$ が整数解をもつような m の値を求めよ．さらに，そのときの整数の解をすべて求めよ．

題意からは2解がともに整数解であることは読みとれない

だが $\boxed{\text{KKK}}$ より．ともに．整数解であることが言える

2解を α, β とおく $(\alpha \leqq \beta)$

KKKより $\begin{cases} \alpha+\beta=m & \text{―①} \\ \alpha\beta=3m \end{cases}$

α, β の少なくとも1つは整数で，m も整数だから，α, β はともに整数

$$\alpha\beta = 3(\alpha+\beta)$$

$$(\alpha-3)(\beta-3)=9$$

整×整＝整

$\alpha-3$	1	3	-9	-3	9	-1
$\beta-3$	9	3	-1	-3	1	-9

(α, β)	$(4, 12)$	$(6, 6)$	$(-6, 2)$	$(0, 0)$
m	16	12	-4	0

(α,β)	$(4,12)$	$(6,6)$	$(-6,+2)$	$(0,0)$
m	16	12	-4	0

$(12,4)$	$(2,-6)$
16	-4

$m=16$ のとき ~~2~~解は 4, 12

$m=12$ のとき ~~2~~解は 6 ~~(重解)~~

$m=-4$ のとき 〃 $-6, 2$

$m=0$ のとき 〃 0 ~~(重解)~~

青字は optional.

数Ⅲの微分積分

• $y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ の

最大最小を求めよ

[解1] ビゾン法を用いる

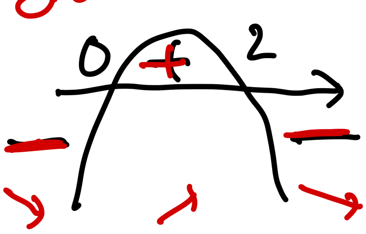
[解2] 〃 用いない

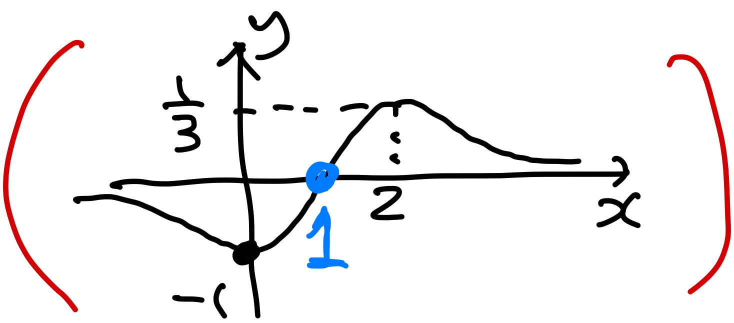
$y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ $\left(\dfrac{1次}{2次}\quad \lim_{x\to\pm\infty} y=0 \quad 漸\ y=0\right)$

$y'=\dfrac{1\times(x^2-x+1)-(x-1)\times(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$=\dfrac{-x^2+2x}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{-x(x-2)}{(x^2-x+1)^2}$

y'の符号





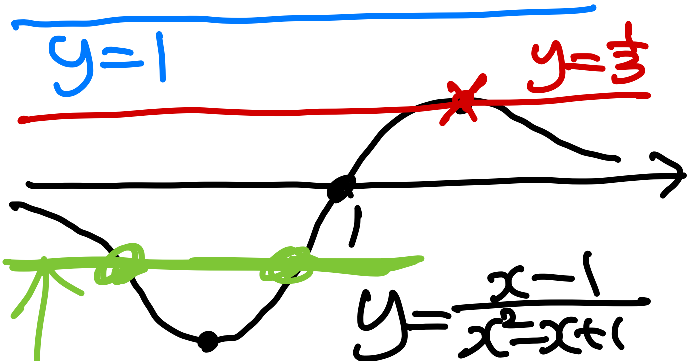
[解2] 逆手法 (逆像法、逆手流)

存在条件へ帰着

(東京出版『大学への数学』)

CTスキャン、(MRI)、

求めるのは yの範囲



実験

$y=1$ 代入 $1=\frac{x-1}{x^2-x+1}$

$x^2-2x+2=0$

xは存在せず　外

$\boxed{y=\frac{1}{3}}$ 代入 $\frac{1}{3}=\frac{x-1}{x^2-x+1}$

$x^2-x+1=3(x-1)$

$x^2-4x+4=0$

$x=2$ (重解)　内　ギリ。

$y=0$ 代入 $x=1$　内

$\boxed{y=-\frac{1}{2}}$ 代入

$-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{x^2-x+1}$

$x^2-x+1=-2(x-1)$

$x^2+x-1=0$

$\left[x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right]$　内

実数

$y=\frac{x-1}{x^2-x+1}$

のMax、min

⇓

$y=k$ を代入したつもり，つまり yを定数扱い

それに対する実数xが存在するかどうかを調べる

- 存在する ⟶ 範囲内
- 存在しない ⟶ 範囲外

逆手法（CTスキャン）と呼ぶ

$$y=\frac{x-1}{x^2-x+1}$$

yを固定して xの方程式とみなす

$$y(x^2-x+1)=x-1$$

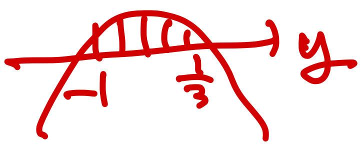
注 ⟶ $y\,x^2-(y+1)x+(y+1)=0$

1次 (i) $y=0$ のとき　$x=1$ より　$y=0$は範囲内

2次 (ii) $y\neq0$ のとき

判別式 $D=(y+1)^2-4y(y+1)\geqq0$

$$(y+1)(\underbrace{y+1-4y}_{1-3y})\geqq0$$



$$-1\leqq y\leqq\frac{1}{3}\quad(y\neq0)$$

(i)(ii)より $-1\leqq y\leqq\frac{1}{3}$

最大値 $\frac{1}{3}$，最小値 -1 //

176 C　答 $-3 \leqq x \leqq 5$

k は実数の定数とする．x についての 2 次方程式 $x^2 + kx + k^2 + 3k - 9 = 0$ が実数解をもつとき，その解の値の範囲を求めよ．

x ← 主役．

[実験]　$x=1$ 代入　$k^2+4k-8=0$

$k=-2\pm2\sqrt{3}$ 実数　内，

⇓

x に対する k の存在条件へ

(未知数) x を定数扱い．脇役．

k で整理して．k の方程式の解の存在条件が求める x の条件である．

$\boxed{\text{主役交代}}$

$$k^2+(x+3)k+x^2-9=0$$

判別式　$D=(x+3)^2-4(x^2-9)\geqq 0$

$$-3x^2+6x+45\geqq 0$$

$$x^2-2x-15\leqq 0$$

$$(x-5)(x+3)\leqq 0$$

$$-3\leqq x\leqq 5$$

Desmos．

$x^2+xy+y^2+3y-9=0$

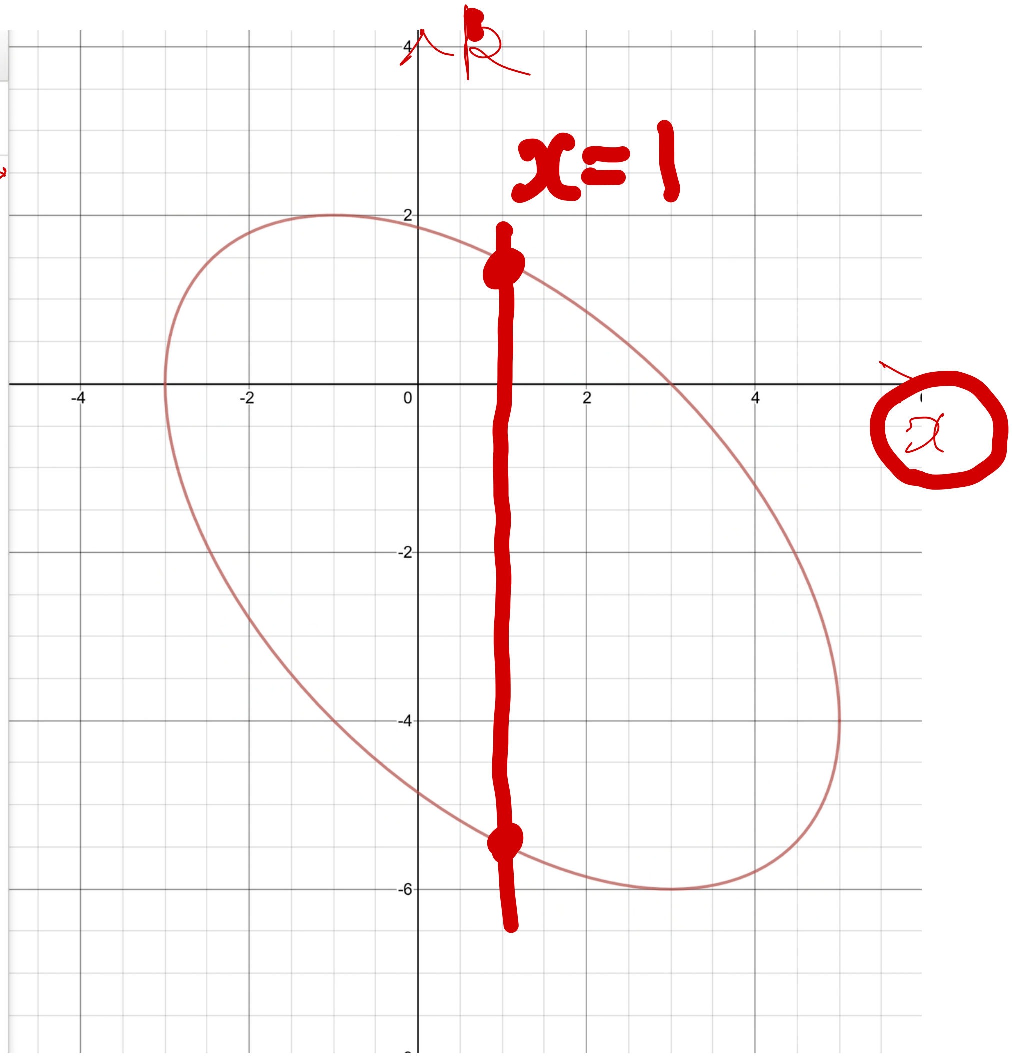
$x^2+kx+k^2+3k-9=0$

図形的になんでしょ —

① だ円　杏林

ナナメだ円

ナナメ双曲線



$x^2+kx+k^2+3k-9=0$

xの範囲を求める

xに対して共有点(x,k)の存在条件を求め

逆手法

範囲を求めたい変数を固定して、定数を未知数とみた方程式とみなし、解の存在条件に帰着

$\boxed{106}$ 別解

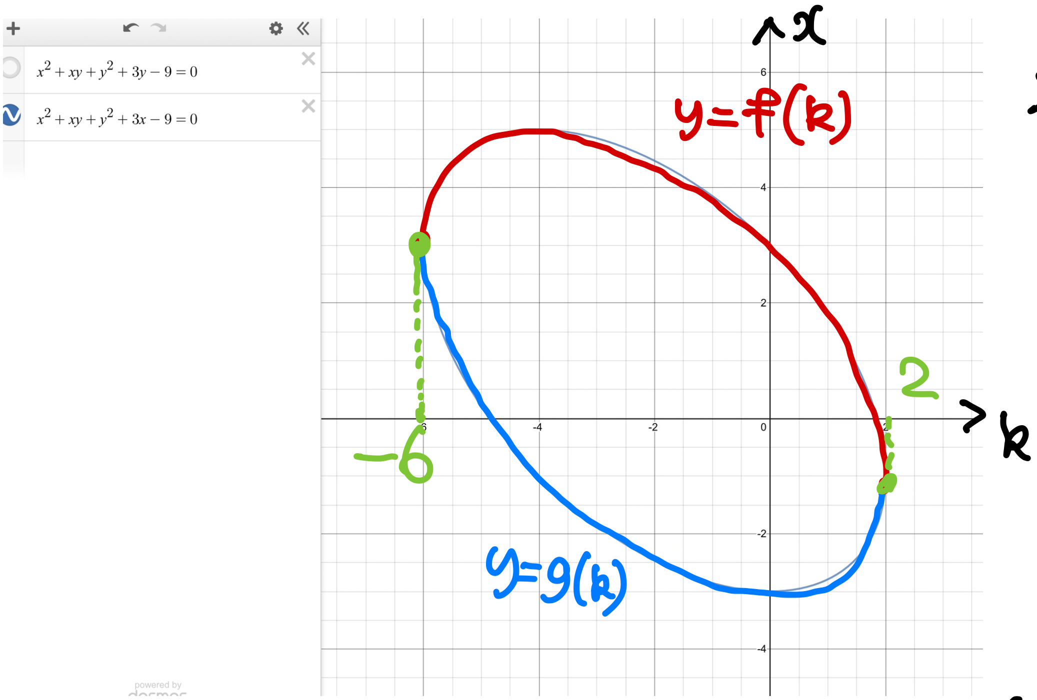
$$D = k^2 - 4(k^2+3k-9)$$
$$= -3k^2-12k+36$$
$$= -3(k^2+4k-12)$$

$$x^2+kx+k^2+3k-9=0$$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{-3(k^2+4k-12)}}{2}$$

$$\begin{cases} f(k) = \dfrac{-k+\sqrt{-3(k^2+4k-12)}}{2} \\ g(k) = \dfrac{-k-\sqrt{-3(k^2+4k-12)}}{2} \end{cases}$$ とおき.

それぞれ微分して Max, minを求める.



xの方程式と
みなして
判別式 $D_2 \geqq 0$
$(k+6)(k-2) \leqq 0$
$-6 \leqq k \leqq 2$

T&E

$\boxed{\text{変数}}$, xとkを
逆にして
Try Again!!

入試問題にチャレンジ (22)

解

0 以上の実数 s, t が $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，方程式

4次

(4次 2次 含む 項)

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$

x

の解のとる値の範囲を求めよ．

逆手かな → ?

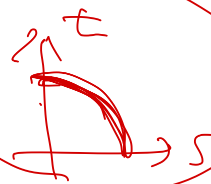
(2005・東京大学)

$X=x^2$ とおく

$$X^2-2(s+t)X+(s-t)^2=0$$

($\boxed{\text{方針}}$ Xの範囲 → xの範囲)

① 図示



$s\geq 0$, $t\geq 0$, $s^2+t^2=1$ のもとで

Xの方程式 $X^2-2(s+t)X+(s-t)^2=0$

の解の範囲を求める (ただし $X\geq 0$ に限る)

($\boxed{\text{逆手法の利用}}$ ただし，文字が 2文字あって Xとどう!?)

主役交代!

② 対称性利用 和と積

③ 円パラ $s=\cos\theta$, $t=\sin\theta$

第23講　式と証明(3)

1 **剰余の定理**

整式 $P(x)$ について，

$$(P(x)\text{ を }x-\alpha\text{ で割ったときの余り})=P(\alpha)$$

2 **因数定理**

整式 $P(x)$ について，

$$「P(x)\text{ が }x-\alpha\text{ で割り切れる}」\iff P(\alpha)=0$$

3 **3次方程式の解と係数の関係**

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の **3つの解を** α，β，γ とすると，

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\qquad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

4 **1の3乗根 ω**

3次方程式 $x^3=1$ の解を**1の3乗根**という．

さらに，$x^3=1$ の虚数解 $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ の一方を ω と表すことが多い．このとき，次が成り立つ．

(i)　$\omega^3=1$　　(ii)　$\omega^2+\omega+1=0$　　(iii)　$\omega^2=\overline{\omega}$

5 **特殊な4次方程式**

(1) **複2次方程式**

$x^4+ax^2+b=0$ の形の方程式を**複2次方程式**という．

(2) **相反方程式**

$a\neq 0$ とするとき，$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ の形の方程式を**相反方程式**という．

177 A

多項式 x^3+3x^2+ax+5 を $x+1$ で割ったときの余りが 3 となるような定数 a の値を求めよ.

178 A

次の方程式を解け.

(1) $x^3+3x^2-4=0$

(2) $2x^3-7x^2+2=0$

(3) $(x-1)(x-2)(x-3)=8\cdot 7\cdot 6$

179 A

3 次方程式 $2x^3-2x^2+3x+1=0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき，次の式の値を求めよ.

(1) $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$\boxed{１７７A}$ $a=4$

【解法】剰余の定理　←　「除法の原理」

$\boxed{１７８A}$ (1) $x=1,-2$ (2) $x=-\dfrac{1}{2}, 2\pm\sqrt{2}$ (3) $x=9, \dfrac{-3\pm\sqrt{143}\,i}{2}$

【解法】因数定理（＆解の公式）

$\boxed{１７９A}$ (1) 順に $1, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}$ (2) -2 (3) -5

【解法】解と係数の関係＆対称式の変形　(3)は「三乗三積」の公式 or 次数下げ

180 B

多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 2，$x-2$ で割ると余りが 3 である．このとき，$f(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りを求めよ．

181 B

実数を係数とする 3 次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $3+2i$ を解にもつとする．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 係数 a，b の値を求めよ．さらに，他の 2 つの解を求めよ．

(2) 3 つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ の値を求めよ．

182 B

方程式

$$2x^4-9x^3-x^2-9x+2=0 \qquad \cdots (*)$$

について，次の問に答えよ．

(1) $t=x+\dfrac{1}{x}$ とおいて，$(*)$ を t の方程式で表せ．

(2) $(*)$ を解け．

183 C

多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 5，$(x+2)^2$ で割ると余りが $-23x-35$ である．このとき，$f(x)$ を $(x-1)(x+2)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

184 C

1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，

$$\omega^{2n}+\omega^n+1$$

の値を求めよ．ただし，n は自然数とする．

入試問題にチャレンジ (23)

多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか．

(2003・京都大学)

2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】２３講

$\boxed{１７７A}$　$a=4$

【解法】剰余の定理　←　「除法の原理」

$\boxed{１７８A}$　(1)　$x=1,-2$　(2)　$x=-\dfrac{1}{2},2\pm\sqrt{2}$　(3)　$x=9,\ \dfrac{-3\pm\sqrt{143}\,i}{2}$

【解法】因数定理（＆解の公式）

$\boxed{１７９A}$　(1)　順に $1,\ \dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}$　(2)　-2　(3)　-5

【解法】解と係数の関係＆対称式の変形　(3)は「三乗三積」の公式 or 次数下げ

$\boxed{１８０B}$　$x+1$

【解法】　剰余の定理，2 次で割った余りは 1 次以下を $ax+b$ とおき除法の原理

$\boxed{１８１B}$　(1)　$a=7,\ b=13$　他の解は $3-2i,\ -1$　(2)　-1195

【解法】(1)共役解からの，①KKK，②文字設定して係数比較，　$3+2i$ を代入してもよい。

(2)1 解簡単　⇒　2 文字の対称式変形　（一般化して漸化式を立式してもよい）

$\boxed{１８２B}$　(1)　$2t^2-9t-5=0$　(2)　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{4},\ \dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

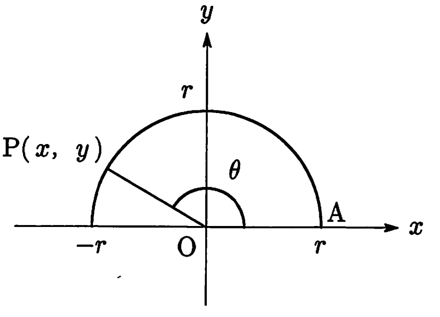
【解法】相反方程式

(1) x^2 で割って置き換え（対称式の変形），(2)2 段階に 2 次方程式を解く。

第7講　三角比(1)

1　三角比の定義

O を原点とする座標平面上で A(r, 0) ($r>0$) とし，半円周 $x^2+y^2=r^2$ ($y \geqq 0$) 上にある点 P(x, y) を考える。



$\angle\mathrm{POA}=\theta$ ($0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$) とするとき，

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

と定義する．$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ をそれぞれ θ の**正弦**，**余弦**，**正接**という．

2　三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

3　$90^\circ-\theta$ の三角比

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$$

4　$180^\circ-\theta$ の三角比

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$$

49 A

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\cos\theta = \dfrac{2}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ．

50 A

次の式を簡単にせよ．

(1) $\sin(90^\circ - \theta) + \sin(180^\circ - \theta) - \cos(90^\circ - \theta) + \cos(180^\circ - \theta)$

(2) $\sin 10^\circ \cos 80^\circ - \sin 100^\circ \cos 170^\circ$

51 A

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の方程式を解け．

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

52 B

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする.

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ.

(2) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{23}{17}$ のとき，$\sin\theta$ の値を求めよ.

(3) $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ.

53 B

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の方程式を解け.

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

(2) $2\cos^2\theta = 1$

(3) $\tan^2\theta - (\sqrt{3} - 1)\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

54 B

三角形 ABC の ∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とするとき，

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

が成り立つことを示せ.

55 C

$0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ とする．$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 9$ のとき，$\sin\theta - \cos\theta$ の値を求めよ．

56 C

正五角形 ABCDE において，対角線 AC と BE の交点を F，対角線 AD と BE の交点を G とする．

(1) 三角形 ABG と三角形 GAF は相似であることを証明せよ．

(2) $\mathrm{BF} = 1$ のとき，辺 AB の長さを求めよ．

(3) $\cos 36^\circ$ の値を求めよ．

入試問題にチャレンジ (7)

$0^\circ < \theta < 45^\circ$ のとき，縦と横の長さがそれぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$ の長方形がある．この長方形を半分に折ってできる長方形がもとの長方形と相似であるとき，もとの長方形の面積はいくらか．また，もとの長方形の縦と横の長さの比はいくらか．

(2000・藤田保健衛生大学)

2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】 7 講

$\boxed{4\ 9\text{A}}$ (1)　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$,　$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$　(2)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,　$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

【解法】三角関数の相互関係 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\boxed{5\ 0\text{A}}$ (1)　0　(2)　1

【解法】三角関数の変換公式　$90°-\theta, 180°-\theta$

$\boxed{5\ 1\text{A}}$ (1)　$\theta=45°$,　$135°$　(2)　$\theta=150°$　(3)　$\theta=120°$

【解法】三角関数の方程式

$\boxed{5\ 2\text{B}}$ (1)　$\cos\theta=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,　$\tan\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(2)　$\sin\theta=\dfrac{8}{17}$,　$\dfrac{5}{17}$

(3)　$\tan\theta=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

【解法】三角関数の相互関係

$\boxed{5\ 3\text{B}}$ (1)　$\theta=30°$,　$150°$　(2)　$\theta=45°$,　$135°$　(3)　$\theta=60°$,　$135°$

【解法】三角関数の方程式

$\boxed{5\ 4\text{B}}$ 方針：$A+B+C=180°$ を利用，変換公式へ。