5/20 数ゼミ 私立1組

・チャレ(22)：答だけ

・23コウ A BC チャレ(23)

[二次回] 7コウ A, B
→ 8コウ A B 先にやっ2
7コウC, 8コウC
チャレ(7)はかんたん

演 整式のわりざん

宿 逆手法の練習

入試問題にチャレンジ (22)

0 以上の実数 s，t が $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$

の解のとる値の範囲を求めよ．

【解答】 (2005・東京大学)

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0 \quad \cdots ①$$

において，$x^2=X$ とすると，①は，

$$X^2-2(s+t)X+(s-t)^2=0. \quad \cdots ②$$

ここで，②の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(s+t)^2-(s-t)^2$$
$$=4st,$$
$$(②の解の和)=2(s+t),$$
$$(②の解の積)=(s-t)^2$$

であるから，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ より，

$$\begin{cases} D \geqq 0, \\ (②の解の和) \geqq 0, \\ (②の解の積) \geqq 0. \end{cases}$$

したがって，②の 2 つの解はともに 0 以上であるから，①の解はすべて実数である．

ここで，

$$s+t=k$$

とすると，

$$\begin{cases} s^2+t^2=1, \\ (s-t)^2=2(s^2+t^2)-(s+t)^2 \end{cases}$$

より，

$$(s-t)^2=2-k^2$$

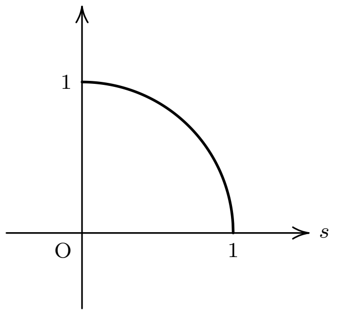
であるから，①は，

$$x^4-2kx^2+2-k^2=0. \quad \cdots ③$$

さらに，st 平面において，条件

$$s \geqq 0,\quad t \geqq 0,\quad s^2+t^2=1$$

を満たす点 (s，t) の存在範囲は次の図の太線部分である．



これと直線 $s+t=k$ との共有点を考えることより，k のとり得る値の範囲は，

$$1 \leqq k \leqq \sqrt{2}. \quad \cdots ④$$

以上より，①の解 x のとる値の範囲は，k の方程式③が④の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような x の値の範囲と一致する．

③を k について整理すると，

$$k^2+2x^2k-2-x^4=0$$

であるから，

$$f(k)=k^2+2x^2k-2-x^4$$

とすると，

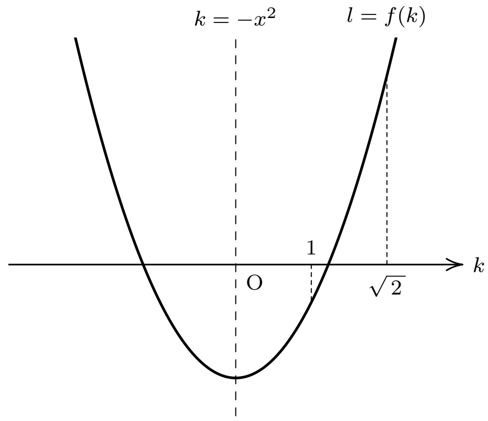
$$f(k)=(k+x^2)^2-2-2x^4.$$

したがって，放物線 $l=f(k)$ の軸について，

$$k=-x^2 \leqq 0$$

が成り立つので，③が④の範囲に少なくとも 1 つの解をもつ条件は，

$$\begin{cases} f(1) \leqq 0, & \cdots ⑤ \\ f(\sqrt{2}) \geqq 0. & \cdots ⑥ \end{cases}$$



ここで，

$$f(1)=1^2+2x^2-2-x^4$$
$$=-(x^2-1)^2 \leqq 0$$

であるから，⑤はつねに成り立つ．

また，⑥より，

$$(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}x^2-2-x^4 \geqq 0$$
$$x^4-2\sqrt{2}x^2 \leqq 0$$

であるから，

$$x^2 \leqq \sqrt{8}.$$

以上より，①の解 x のとる値の範囲は，

$$-\sqrt[4]{8} \leqq x \leqq \sqrt[4]{8}.$$

逆手法.　　　　③東大

②【例題 09】 hint.

x, y が実数値をとって変わるとき，$\dfrac{x+2y+5}{x^2+y^2+15}$ の最大値と最小値を求めよ。

①【例題 10】

実数 t が $0 \leqq t \leqq 2$ を満たすとき，2 次方程式 $x^2-2tx+2t^2-4=0$ の実数解 x のとり得る値の範囲を求めよ。

第23講　　式と証明(3)

1に注

$\boxed{1}$ **剰余の定理**

整式 $P(x)$ について，

$$(P(x) \text{ を } x-\alpha \text{ で割ったときの余り}) = P(\alpha)$$

$\boxed{2}$ **因数定理**

整式 $P(x)$ について，

$$\text{「}P(x) \text{ が } x-\alpha \text{ で割り切れる」} \iff P(\alpha)=0$$

$\boxed{3}$ **3 次方程式の解と係数の関係**

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 つの解を α，β，γ とすると，

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\qquad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

$\boxed{4}$ **1 の 3 乗根 ω**

3 次方程式 $x^3=1$ の解を **1 の 3 乗根**という．

さらに，$x^3=1$ の虚数解 $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ の一方を ω と表すことが多い．このとき，次が成り立つ．

$$\text{(i)}\quad \omega^3=1 \qquad \text{(ii)}\quad \omega^2+\omega+1=0 \qquad \text{(iii)}\quad \omega^2=\overline{\omega}$$

$\boxed{5}$ **特殊な 4 次方程式**

(1) **複 2 次方程式**

$x^4+ax^2+b=0$ の形の方程式を**複 2 次方程式**という．

(2) **相反方程式**

$a\neq 0$ とするとき，$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ の形の方程式を**相反方程式**という．

除法の原理

F を P でわると Q あまり R

$\Rightarrow F = P\times Q + R$

(P の次数) > (R の次数)

177 A (剰余の定理) ← 除法の原理

多項式 x^3+3x^2+ax+5 を $x+1$ で割ったときの余りが 3 となるような定数 a の値を求めよ.

$f(x)=x^3+3x^2+ax+5=(x+1)\cdot Q(x)+3$
と表せる

$\to f(-1)=7-a=3 \quad \therefore \underline{a=4}$ //

178 A

次の方程式を解け. ← $x=1,-2$

(1) $x^3+3x^2-4=0$ ← [$x=1$ 代入して0 → $(x-1)$因数にもつ]

$\boxed{(2)}$ $2x^3-7x^2+2=0$ $\quad x=-\frac{1}{2},\ 2\pm\sqrt{2}$

(3) $(x-1)(x-2)(x-3)=8\cdot7\cdot6$

179 A

3 次方程式 $2x^3-2x^2+3x+1=0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき, 次の式の値を求めよ.

(1) $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

(2) $2x^3-7x^2+2=0$

くくってから代入

$x^2(2x-7)+2$

$x=\boxed{}$ 代入して0となる数をさがす

$[\cancel{\pm1, \pm2} \Rightarrow \pm\frac{1}{2}]$

有理数解の候補

整数係数n次

$\boxed{\text{１７７A}}$　$a=4$

【解法】剰余の定理　←　「除法の原理」

$\boxed{\text{１７８A}}$　(1)　$x=1,-2$　(2)　$x=-\dfrac{1}{2}, 2\pm\sqrt{2}$　(3)　$x=9, \dfrac{-3\pm\sqrt{143}\,i}{2}$

【解法】因数定理（＆解の公式）

$\boxed{\text{１７９A}}$　(1)　順に$1, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}$　(2)　-2　(3)　-5

【解法】解と係数の関係＆対称式の変形　(3)は「三乗三積」の公式 or 次数下げ

180 B

多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 2，$x-2$ で割ると余りが 3 である．このとき，$f(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りを求めよ．

181 B

実数を係数とする 3 次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $3+2i$ を解にもつとする．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 係数 a，b の値を求めよ．さらに，他の 2 つの解を求めよ．

(2) 3 つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ の値を求めよ．

182 B

方程式

$$2x^4-9x^3-x^2-9x+2=0 \qquad \cdots (*)$$

について，次の問に答えよ．

(1) $t=x+\dfrac{1}{x}$ とおいて，$(*)$ を t の方程式で表せ．

(2) $(*)$ を解け．

183 C

多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 5，$(x+2)^2$ で割ると余りが $-23x-35$ である．このとき，$f(x)$ を $(x-1)(x+2)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

184 C

1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，

$$\omega^{2n}+\omega^n+1$$

の値を求めよ．ただし，n は自然数とする．

入試問題にチャレンジ (23)

多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか．

(2003・京都大学)

2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】２３講

$\boxed{１７７A}$　$a=4$

【解法】剰余の定理　←　「除法の原理」

$\boxed{１７８A}$　(1)　$x=1,-2$　(2)　$x=-\dfrac{1}{2}, 2\pm\sqrt{2}$　(3)　$x=9, \dfrac{-3\pm\sqrt{143}\,i}{2}$

【解法】因数定理（＆解の公式）

$\boxed{１７９A}$　(1)　順に $1, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}$　(2)　-2　(3)　-5

【解法】解と係数の関係＆対称式の変形　(3)は「三乗三積」の公式 or 次数下げ

$\boxed{１８０B}$　$x+1$

【解法】　剰余の定理，2 次で割った余りは 1 次以下を $ax+b$ とおき除法の原理

$\boxed{１８１B}$　(1)　$a=7, b=13$　他の解は $3-2i, -1$　(2)　-1195

【解法】(1)共役解からの，①KKK，②文字設定して係数比較，　$3+2i$ を代入してもよい。

(2)1 解簡単　⇒　2 文字の対称式変形　（一般化して漸化式を立式してもよい）

$\boxed{１８２B}$　(1)　$2t^2-9t-5=0$　(2)　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}, \dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

【解法】相反方程式

(1) x^2 で割って置き換え（対称式の変形），(2)2 段階に 2 次方程式を解く。

談話室マロニエ♪ 過去問めぐり・整式の割り算

【１】2011 岩手医科大学

x の整式 $\mathrm{P}(x)$ を x^2+1，x^2+2 で割ったときの余りをそれぞれ $4x+4$，$4x+8$ とするとき，以下の設問に答えよ。

(1)　$\mathrm{P}(x)$ を $(x^2+1)(x^2+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

(2)　$\mathrm{P}(x)$ を 5 次の多項式として，$\mathrm{P}(0)=-2$，$\mathrm{P}(1)=6$ とするとき，$\mathrm{P}(x)$ を求めよ。

【２】2011 慶應義塾大学 2/21, 1次 医

以下の文章の空欄に適切な**数または式**を入れて文章を完成させなさい。

(1)　n は 3 以上の奇数として，多項式 $P(x)=x^n-ax^2-bx+2$ を考える。$P(x)$ が x^2-4 で割り切れるときは $a=\boxed{\text{(あ)}}$，$b=\boxed{\text{(い)}}$ であり，$(x+1)^2$ で割り切れるときは $a=\boxed{\text{(う)}}$，$b=\boxed{\text{(え)}}$ である。

【解答１】

2 **解答** (1) $P(x)$ を x^2+1, x^2+2 で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ とすると, 与えられた条件から

$$P(x)=(x^2+1)Q_1(x)+4x+4 \quad \cdots\cdots ①$$

$$P(x)=(x^2+2)Q_2(x)+4x+8 \quad \cdots\cdots ②$$

と表せる。

さらに, $P(x)$ を 4 次式 $(x^2+1)(x^2+2)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$ とし, 余りを ax^3+bx^2+cx+d とすると

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+ax^3+bx^2+cx+d \quad \cdots\cdots ③$$

と表せる。

ここで, ax^3+bx^2+cx+d を x^2+1 で割ることにより③を変形すると

$$\begin{aligned} P(x)&=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+(ax+b)(x^2+1)+(c-a)x+(d-b) \\ &=(x^2+1)\{(x^2+2)Q_3(x)+(ax+b)\}+(c-a)x+(d-b) \end{aligned}$$

よって, ①より $(c-a)x+(d-b)$ と $4x+4$ は一致するから

$$c-a=4 \quad \cdots\cdots ④$$

$$d-b=4 \quad \cdots\cdots ⑤$$

また, ax^3+bx^2+cx+d を x^2+2 で割ることにより③を変形すると

$$\begin{aligned} P(x)&=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+(ax+b)(x^2+2) \\ &\qquad +(c-2a)x+(d-2b) \\ &=(x^2+2)\{(x^2+1)Q_3(x)+(ax+b)\}+(c-2a)x+(d-2b) \end{aligned}$$

よって, ②より $(c-2a)x+(d-2b)$ と $4x+8$ は一致するから

$$c-2a=4 \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$d-2b=8 \quad \cdots\cdots ⑦$$

④, ⑥より　$a=0$, $c=4$

⑤, ⑦より　$b=-4$, $d=0$

したがって, 求める余りは

$$-4x^2+4x \quad \cdots\cdots (答)$$

参考　①, ②, ③に $x=i$, $\sqrt{2}i$ を代入することにより求めることもできる。

そのために③を次のようにしておく。

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)+ax^3+bx^2+cx+d \quad \cdots\cdots ③$$

（ただし，a，b，c，d は実数の定数とする）

①，③に $x=i$ をそれぞれ代入すると

$$(P(i)=)4i+4=ai^3+bi^2+ci+d$$

$$(d-b)+(c-a)i=4+4i$$

a，b，c，d は実数より

$$d-b=4 \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$c-a=4 \quad \cdots\cdots ④$$

また，②，③に $x=\sqrt{2}i$ をそれぞれ代入すると

$$(P(\sqrt{2}i)=)4\sqrt{2}i+8=a(\sqrt{2}i)^3+b(\sqrt{2}i)^2+c(\sqrt{2}i)+d$$

$$(d-2b)+\sqrt{2}(c-2a)i=8+4\sqrt{2}i$$

a，b，c，d は実数より

$$d-2b=8 \quad \cdots\cdots ⑦$$

$$c-2a=4 \quad \cdots\cdots ⑥$$

となり，以下，〔解答〕と同様。

(2) (1)の結果より

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q_3(x)-4x^2+4x$$

$P(x)$ が 5 次の多項式であるとき，$Q_3(x)$ は $px+q$ $(p\neq 0)$ と表せるから，$P(x)$ は次のようになる。

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)(px+q)-4x^2+4x \quad \cdots\cdots ⑧$$

$P(0)=-2$ より

$$2q=-2 \qquad \therefore \quad q=-1 \quad \cdots\cdots ⑨$$

$P(1)=6$ より

$$6(p+q)=6 \qquad \therefore \quad p+q=1 \quad \cdots\cdots ⑩$$

⑨，⑩より　　$p=2$，$q=-1$

したがって，求める $P(x)$ は，これらを⑧に代入すると

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+2)(2x-1)-4x^2+4x$$

$$=2x^5-x^4+6x^3-7x^2+8x-2 \quad \cdots\cdots (答)$$

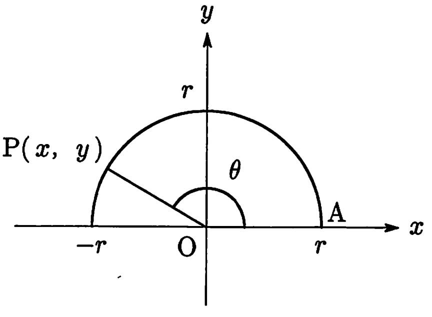
【解答２】2011 慶應義塾大学

(1)　(あ)　$\frac{1}{2}$　　(い)　2^{n-1}　　(う)　$-n-1$　　(え)　$-n-2$

第7講　三角比(1)

1　三角比の定義

O を原点とする座標平面上で A$(r,\ 0)$ $(r>0)$ とし，半円周 $x^2+y^2=r^2$ $(y \geqq 0)$ 上にある点 P$(x,\ y)$ を考える。



$\angle \mathrm{POA}=\theta$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とするとき，

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

と定義する．$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ をそれぞれ θ の**正弦**，**余弦**，**正接**という．

2　三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

3　$90^\circ-\theta$ の三角比

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$$

4　$180^\circ-\theta$ の三角比

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$$

49 A

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする.

(1) $\cos\theta = \dfrac{2}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ.

(2) $\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ.

50 A

次の式を簡単にせよ.

(1) $\sin(90^\circ - \theta) + \sin(180^\circ - \theta) - \cos(90^\circ - \theta) + \cos(180^\circ - \theta)$

(2) $\sin 10^\circ \cos 80^\circ - \sin 100^\circ \cos 170^\circ$

51 A

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の方程式を解け.

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

$\boxed{4\ 9\,\mathrm{A}}$ (1) $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$, $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ (2) $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

【解法】三角関数の相互関係 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\boxed{5\ 0\,\mathrm{A}}$ (1) 0 (2) 1

【解法】三角関数の変換公式 $90°-\theta, 180°-\theta$

$\boxed{5\ 1\,\mathrm{A}}$ (1) $\theta=45°$, $135°$ (2) $\theta=150°$ (3) $\theta=120°$

【解法】三角関数の方程式

52 B

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする.

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ.

(2) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{23}{17}$ のとき，$\sin\theta$ の値を求めよ.

(3) $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ.

53 B

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の方程式を解け.

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

(2) $2\cos^2\theta = 1$

(3) $\tan^2\theta - (\sqrt{3} - 1)\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

54 B

三角形 ABC の ∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とするとき，

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

が成り立つことを示せ.

2019年度　FG　数学IAIIB　【解答】7講

$\boxed{49A}$ (1)　$\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{5}$,　$\tan\theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$　(2)　$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$,　$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

【解法】三角関数の相互関係 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\boxed{50A}$ (1)　0　(2)　1

【解法】三角関数の変換公式　$90° - \theta, 180° - \theta$

$\boxed{51A}$ (1)　$\theta = 45°$,　$135°$　(2)　$\theta = 150°$　(3)　$\theta = 120°$

【解法】三角関数の方程式

$\boxed{52B}$ (1)　$\cos\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$,　$\tan\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$　(2)　$\sin\theta = \frac{8}{17}$,　$\frac{5}{17}$

(3)　$\tan\theta = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

【解法】三角関数の相互関係

$\boxed{53B}$ (1)　$\theta = 30°$,　$150°$　(2)　$\theta = 45°$,　$135°$　(3)　$\theta = 60°$,　$135°$

【解法】三角関数の方程式

$\boxed{54B}$ 方針：$A + B + C = 180°$ を利用，変換公式へ。

55 C

$0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ とする．$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 9$ のとき，$\sin\theta - \cos\theta$ の値を求めよ．

56 C

正五角形 ABCDE において，対角線 AC と BE の交点を F，対角線 AD と BE の交点を G とする．

(1) 三角形 ABG と三角形 GAF は相似であることを証明せよ．

(2) $\mathrm{BF} = 1$ のとき，辺 AB の長さを求めよ．

(3) $\cos 36^\circ$ の値を求めよ．

入試問題にチャレンジ (7)

$0^\circ < \theta < 45^\circ$ のとき，縦と横の長さがそれぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$ の長方形がある．この長方形を半分に折ってできる長方形がもとの長方形と相似であるとき，もとの長方形の面積はいくらか．また，もとの長方形の縦と横の長さの比はいくらか．

(2000・藤田保健衛生大学)