5/26 私立115組 (木)

宿
・データの分析 Bまで
・センター セレクション

第9講　三角比 (3)

1　**四角形の面積**

四角形ABCDの面積 S は，対角線AC，BDのなす角を θ とすると，

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\sin\theta$$

2　**円に内接する四角形の対角の和**

四角形ABCDが円に内接する必要十分条件は，対角の和が $180°$ である．すなわち，

$$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{D} = 180°$$

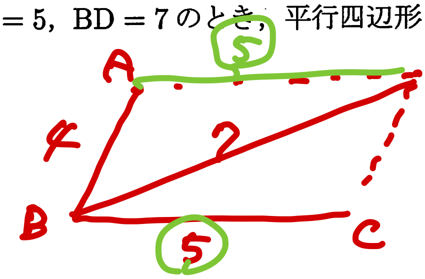
3　**球の体積と表面積**

半径 r の球の体積を V，表面積を S とすると，

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,\quad S = 4\pi r^2$$

65 A

平行四辺形 ABCD において，AB = 4，BC = 5，BD = 7 のとき，平行四辺形 ABCD の面積を求めよ．



$\boxed{65\text{A}}$　$S = 8\sqrt{6}$

【解法】平行四辺形の性質

①平行四辺形の対角線は互いに他を二等分する，②2 対辺の長さが等しい，

③2 対角の大きさが等しい，④対辺の長さが等しく，かつ平行。

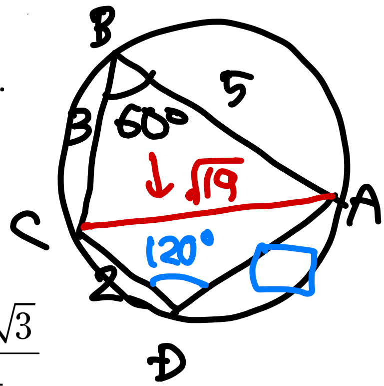
66 A

円 K に内接する四角形 ABCD において，AB = 5，BC = 3，CD = 2，∠ABC = 60° とする．

(1) 対角線 AC の長さを求めよ．さらに，円 K の半径を求めよ．

(2) 辺 DA の長さを求めよ．

(3) 四角形 ABCD の面積を求めよ．



余

AC=√19.　正

$\boxed{66\text{A}}$　(1)　$R = \dfrac{\sqrt{57}}{3}$　(2)　DA = 3　(3)　$S = \dfrac{21\sqrt{3}}{4}$

【解法】円の内接四角形の性質　&　二辺夾角

対角の和=180°

67 A

次の問に答えよ．

(1) 半径 1 の円に内接する正六角形の面積を求めよ．

(2) 半径 1 の円に外接する正六角形の面積を求めよ．

$\boxed{67\text{A}}$　(1)　$S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　(2)　$S = 2\sqrt{3}$

【解法】正 n 角形⇒中心角 n 等分して二等辺三角形へ。

2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】 9 講

$\boxed{6\ 5\text{A}}$ $S = 8\sqrt{6}$

【解法】平行四辺形の性質

①平行四辺形の対角線は互いに他を二等分する，②２対辺の長さが等しい，

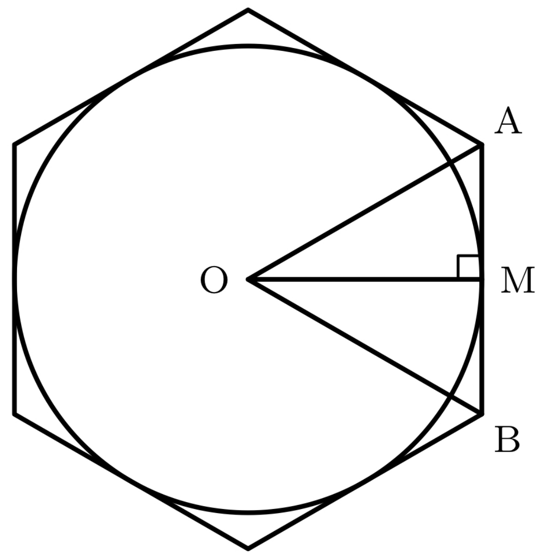
③２対角の大きさが等しい，④対辺の長さが等しく，かつ平行。

$\boxed{6\ 6\text{A}}$ （1）$R = \dfrac{\sqrt{57}}{3}$ （2） $\text{DA} = 3$ （3） $S = \dfrac{21\sqrt{3}}{4}$

【解法】円の内接四角形の性質　＆　二辺夾角

$\boxed{6\ 7\text{A}}$ （1） $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ （2） $S = 2\sqrt{3}$

【解法】正 n 角形⇒中心角 n 等分して二等辺三角形へ。



$\boxed{6\ 8\text{B}}$ $S = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{6\ 9\text{B}}$ （1） $\cos\theta = \dfrac{1}{5}$ （2） $S = 2\sqrt{6}$

【解法】円の内接四角形の性質　＆　二辺夾角

$\boxed{7\ 0\text{B}}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

【解法】正四面体の基本情報

（1）　（2）　（3）

68 B

四角形 ABCD の 2 つの対角線の長さが $\mathrm{AC} = 1$，$\mathrm{BD} = 2$ であり，それらが交点をもち，なす角が $30°$ であるとき，四角形 ABCD の面積を求めよ．

69 B

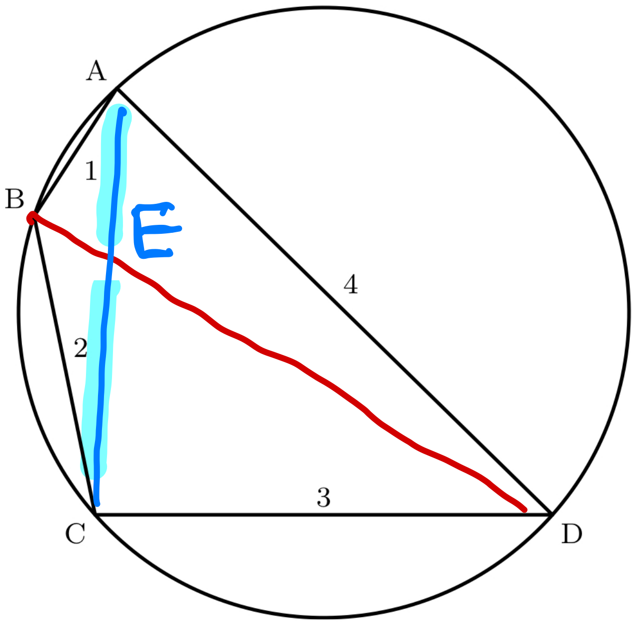
円に内接する四角形 ABCD において，$\mathrm{AB} = 1$，$\mathrm{BC} = 2$，$\mathrm{CD} = 3$，$\mathrm{DA} = 4$ であり，$\angle\mathrm{DAB} = \theta$ とする．

(1) $\cos\theta$ の値，および，対角線 BD の長さを求めよ．

(2) 四角形 ABCD の面積を求めよ．

70 B

一辺の長さが 1 の正四面体の体積を求めよ．



(1)(2) $BD=\sqrt{\frac{77}{5}}$

(3) $\boxed{\text{Quiz}}$ ACを求めよ!!

トレミーの定理

円の内接四角形ABCDで

$AB\times CD + AD\times BC = AC\times BD$

$1\times3+4\times2=\sqrt{\frac{77}{5}}\times AC$

$AC=11\times\sqrt{\frac{5}{77}}=\sqrt{\frac{55}{7}}$ //

(4) 対角線の交点をEとおく.

AE:ECを求めよ

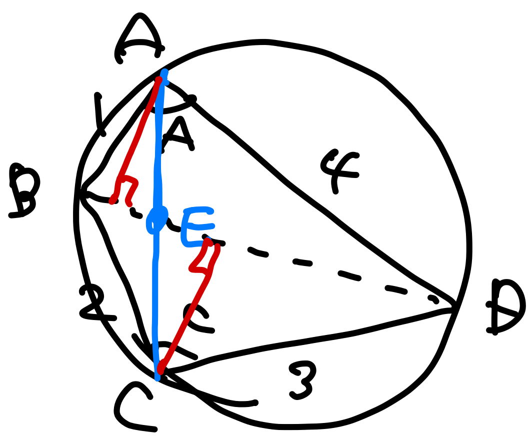
$=\triangle ABD:\triangle BCD$

底辺BD
高さの比

$=\frac{1}{2}\times1\times4\sin A:\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin C$

$=2:3$

$\sin C=\sin(180^\circ-A)=\sin A$



$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

一辺の長さが1の正四面体の体積を求めよ.

空間

① できるだけ平面に帰着.

ある面, 断面, 展開図

射影

② 別の図形に埋めこむ

一般論

正四面体

一辺の長さを a とすると

高さ $h = \boxed{\sqrt{\frac{2}{3}}}\,a$

内接球半径 $r = \boxed{\frac{1}{4}}\,h$

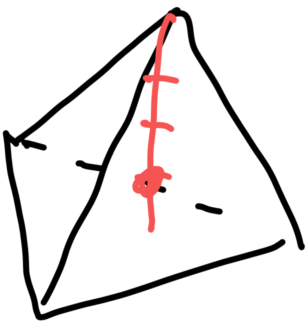
外接球半径 $R = \boxed{\frac{3}{4}}\,h$

呼吸商 $\frac{CO_2}{O_2}$

$a=1$ より

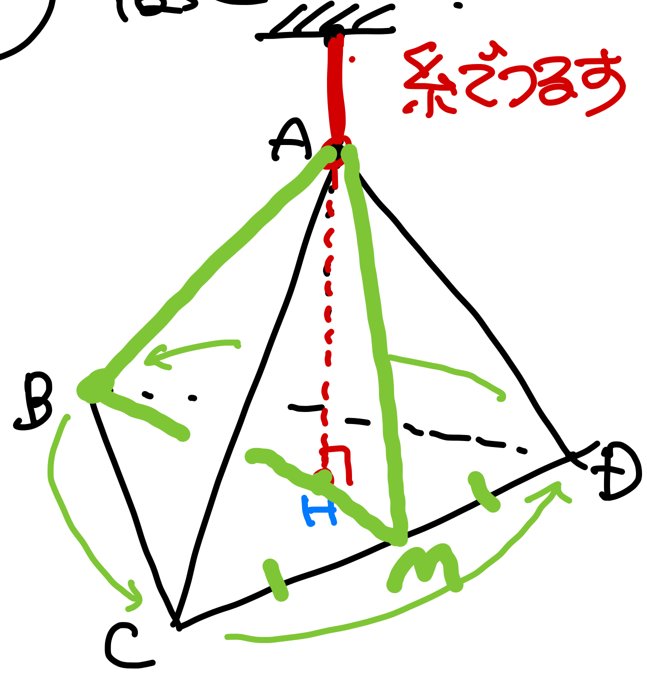
$h = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$

体積 $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{\sqrt{2}}{12}$ //

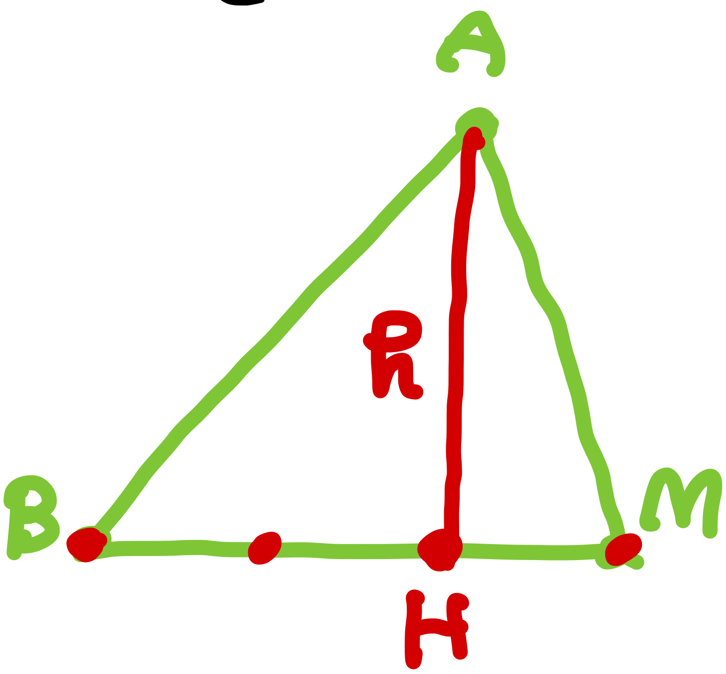


① 高さ

内, 外, 垂, 重



回転対称性より
垂線の足Hは、
△BCDの外心
△BCDは正三角形だから
Hは△BCDの重心

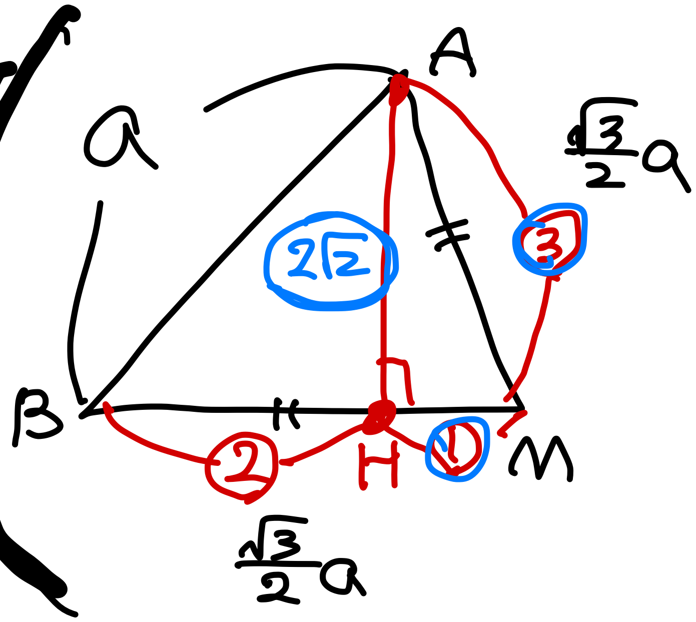


$$AM = BM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$HM = \frac{1}{3}BM = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$h = AH = \sqrt{AM^2 - HM^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\,a$$

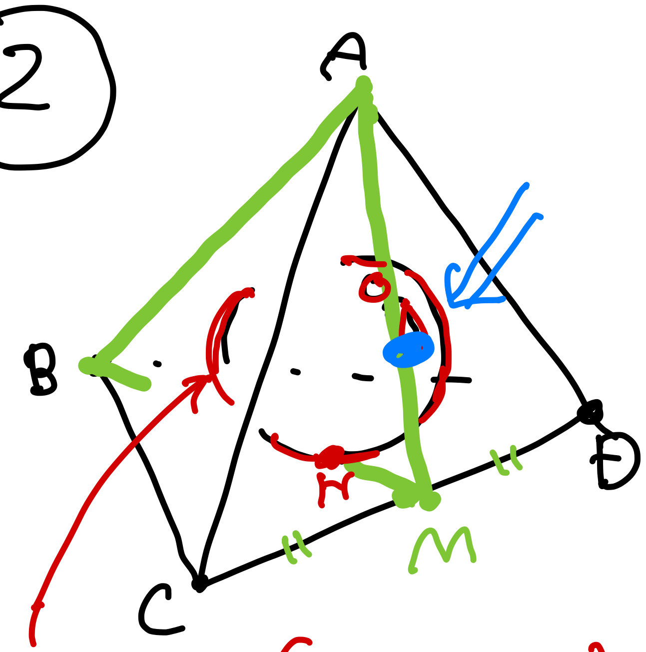


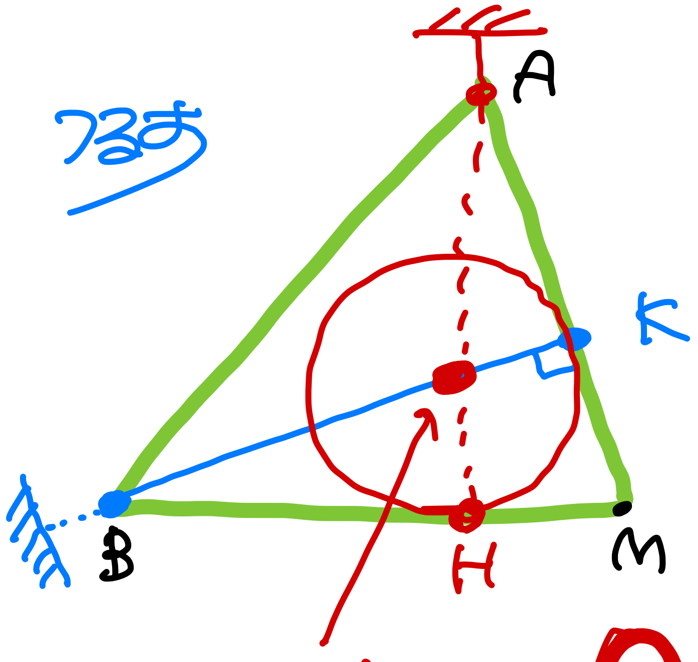
$\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$h = AH = \frac{2\sqrt{2}}{3}AM$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\,a$$

②

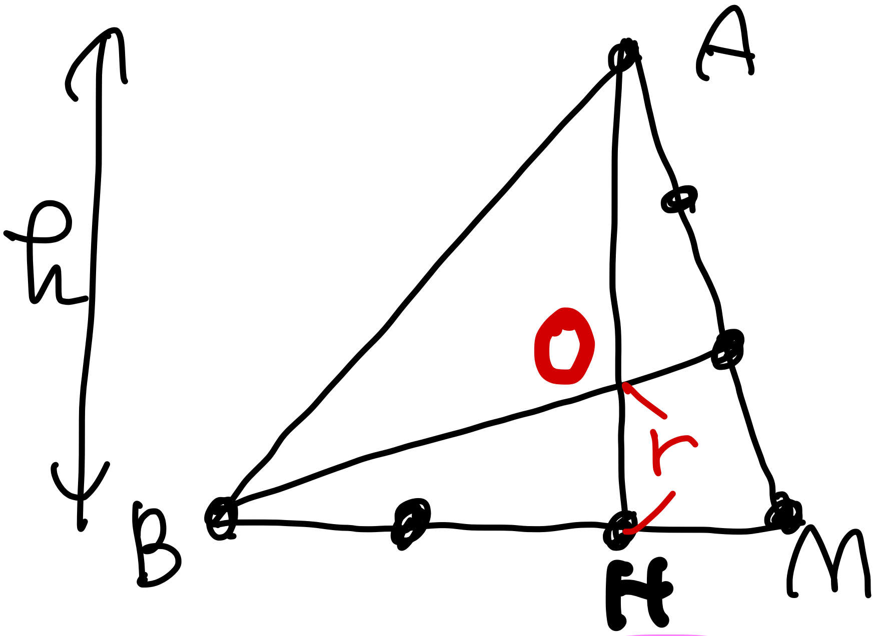




内接球（面で接する）

正△の中心で接する

内接球中心 O



メネラウスまたは相似より

AO:OH=3:1

内接球半径

$r=OH=\frac{1}{4}h$

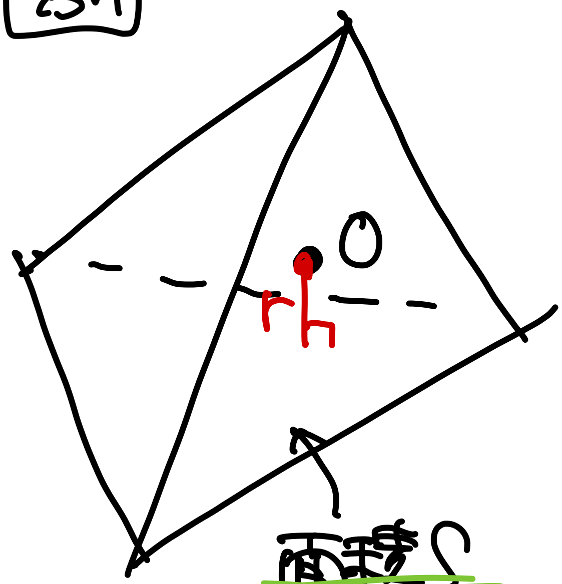
$$\boxed{r=\frac{1}{4}h}$$

別証

3D　内接球半径 ⇒ 体積 四分割

2D　内接円半径 ⇒ 面積 三分割

別



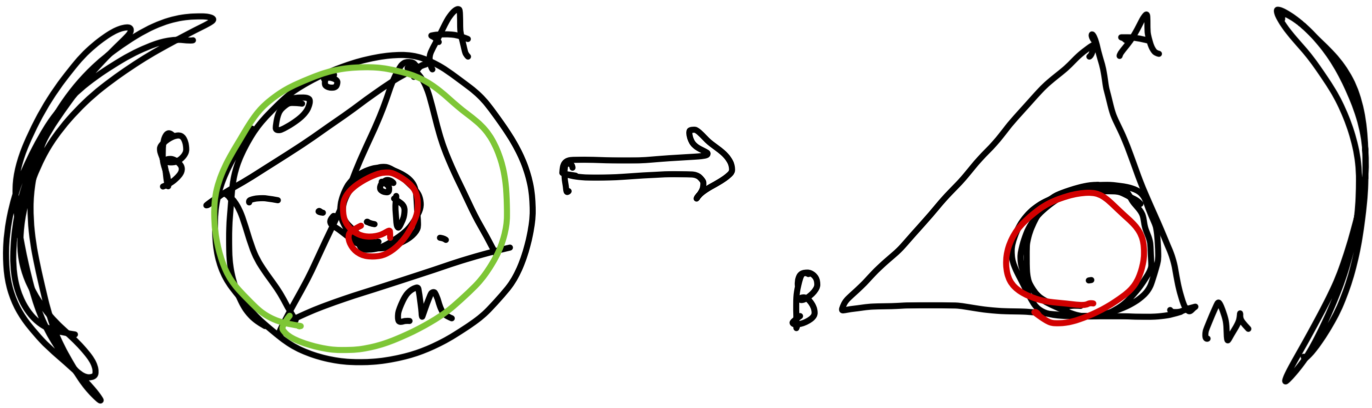
体積

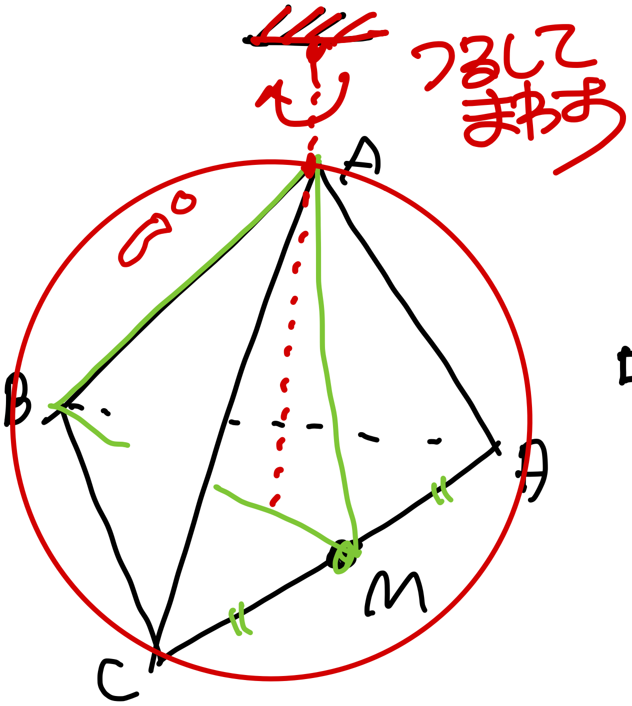
$$h\begin{cases} V = \frac{1}{3}Sh \\ V = \left(\frac{1}{3}Sr\right)\times 4 \end{cases}$$

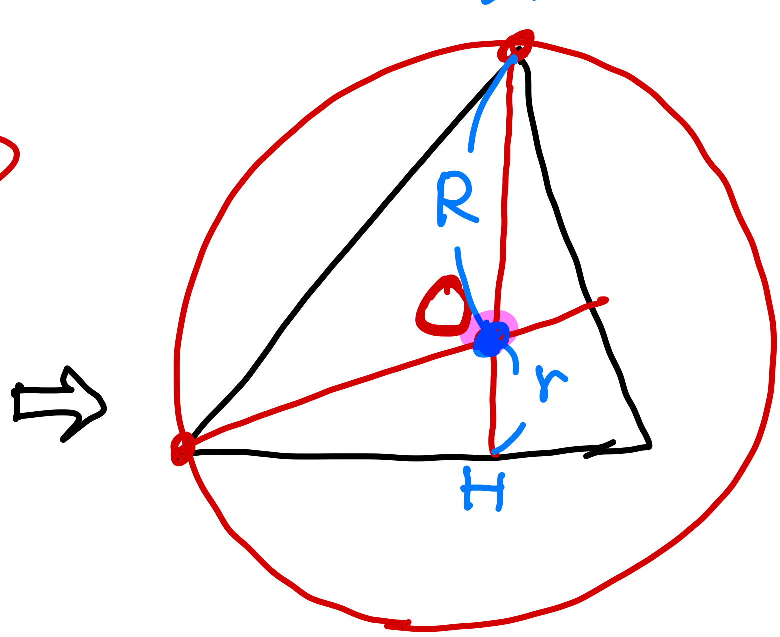
より　$r = \frac{1}{4}h$

2次元 → 3次元

内接円半径 ⇒ 面積3分割
内接球半径 ⇒ 体積4分割







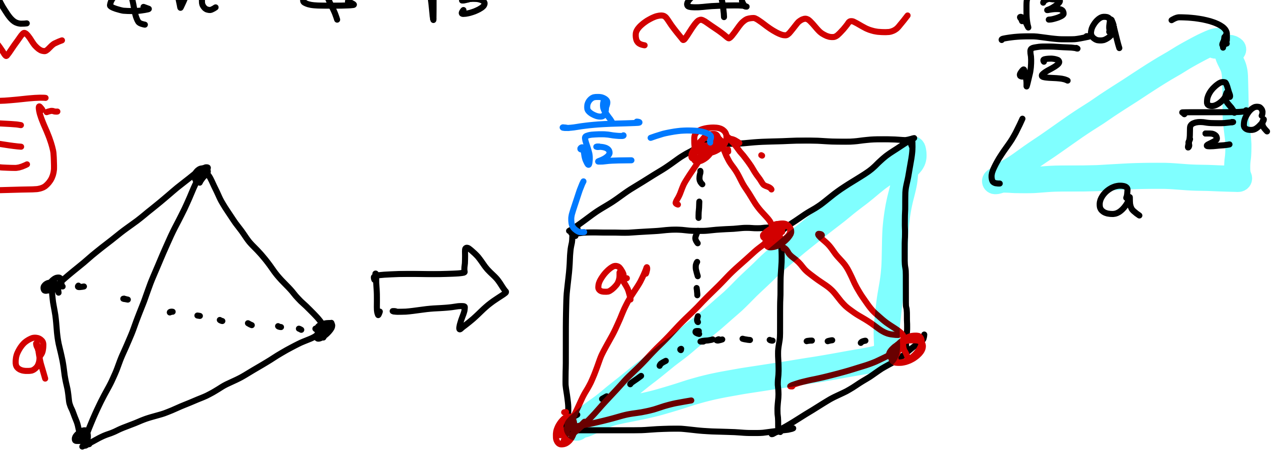
$R + r = h$ より

$$\boxed{R = \frac{3}{4}h}$$

内接球と外接球の中心は共通

$$R = \frac{3}{4}h = \frac{3}{4} \times \sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

別解



正四面体を立方体にうめこむ

一辺 a　　一辺 $\frac{a}{\sqrt{2}}$

その外接球は共通。(半径 R とする)

外接球直径 ＝ 立方体の対角線

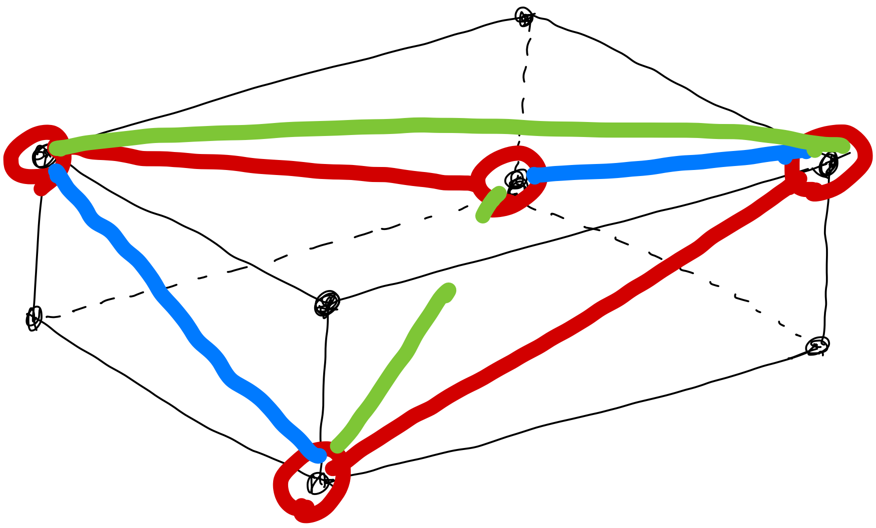
$$2R = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

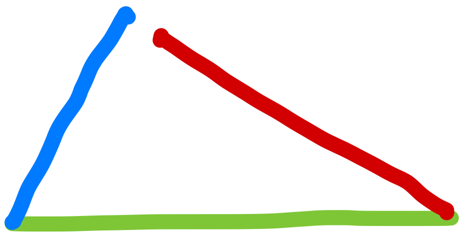
正四面体 → 立方体にうめこむ

等面四面体 → 直方体にうめこむ

範囲外



全ての面が合同



71 C

$n \geqq 3$, $r > 0$ とする.

(1) 半径 r の円に内接する正 n 角形の面積を r と n を用いて表せ.

(2) 半径 r の円に外接する正 n 角形の面積を r と n を用いて表せ.

72 C

半径 r の球面上に異なる 4 点 A, B, C, D がある.

$$\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = \sqrt{2}, \quad \mathrm{AC} = \mathrm{AD} = \mathrm{BC} = \mathrm{BD} = \sqrt{5}$$

であるとき, r の値を求めよ.

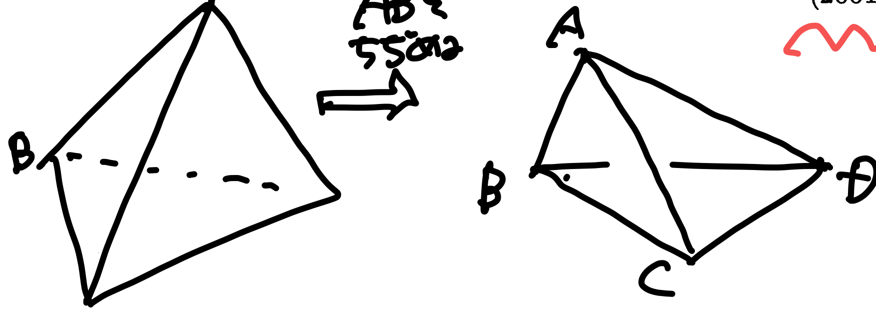
入試問題にチャレンジ (9) hint：対称性に着目し、断面をとる。

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある. 四面体 ABCD の各辺の長さは,

$$\mathrm{AB} = \sqrt{3}, \qquad \mathrm{AC} = \mathrm{AD} = \mathrm{BC} = \mathrm{BD} = \mathrm{CD} = 2$$

を満たしている. このとき, r の値を求めよ.

(2001・東京大学)



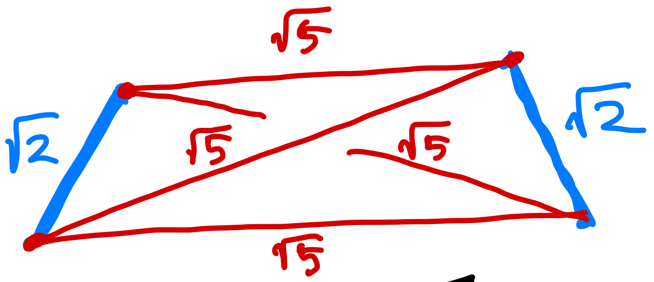
72 C

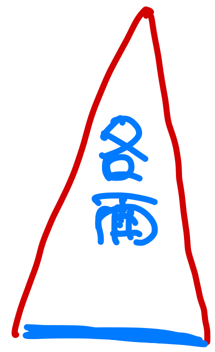
半径 r の球面上に異なる 4 点 A，B，C，D がある．

$$AB = CD = \sqrt{2},\quad AC = AD = BC = BD = \sqrt{5}$$

であるとき，r の値を求めよ．

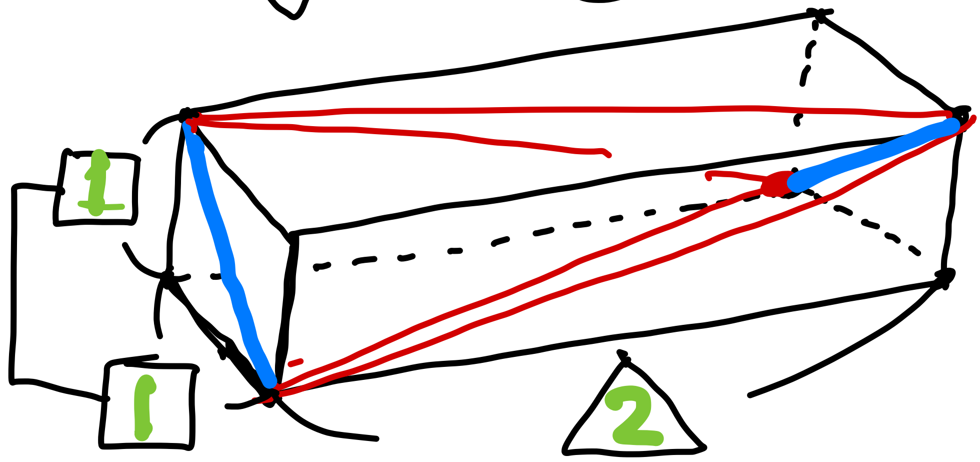
四面体ABCDの 外接球





等面四面体

直方体にうめこむ

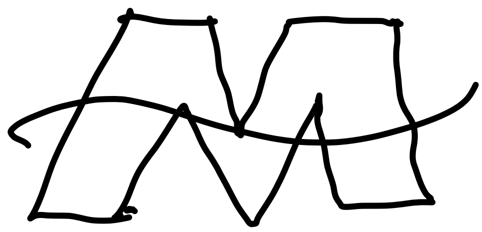


外接球は 共通

その直径 ＝ 直方体の対角線

$$2r = \sqrt{1^2+1^2+2^2}$$

$$r = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

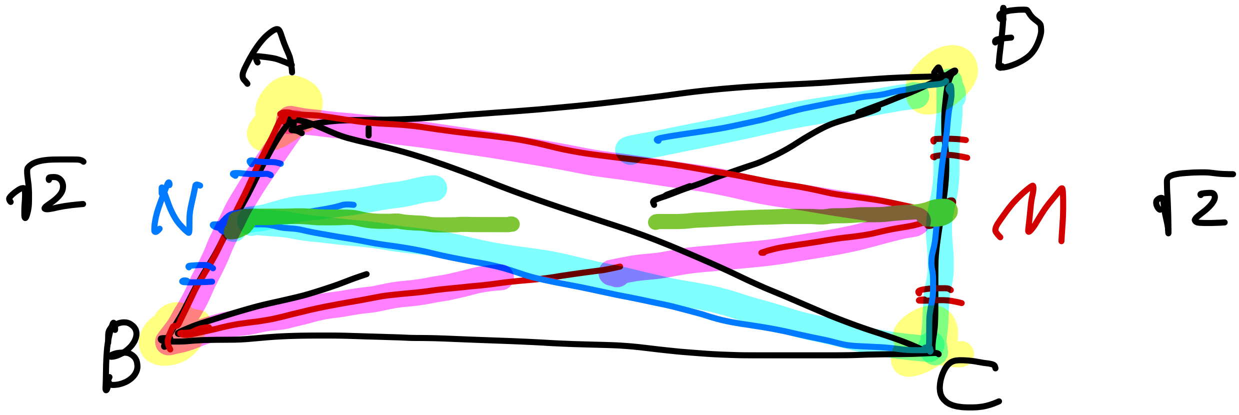


半径 r の球面上に異なる 4 点 A，B，C，D がある．

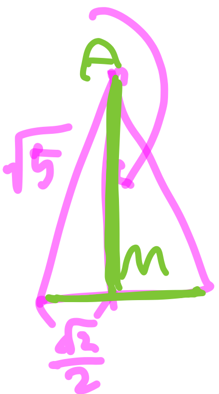
$$AB = CD = \sqrt{2},\quad AC = AD = BC = BD = \sqrt{5}$$

であるとき，r の値を求めよ．

等面四面体に気づかなければ.



対称性に着目して断面をとる



$AM = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $MN = 2$

$OM = ON = 1$ 　 $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$

AB, CDの中点をN, Mとすると その中点が外接球中心O

ON, AN ⟹ OA
r

(正四面体)

過去問めぐり「空間図形」

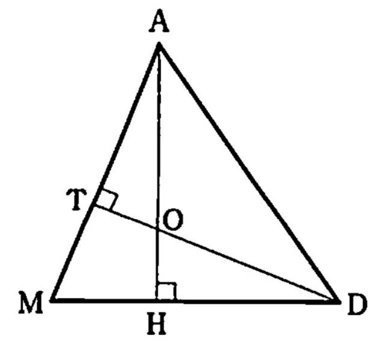
【３】2009 昭和大学 1/25,選抜Ⅰ期(第１次) 医

(3)　半径 r の 4 個の小球が互に外接している。次の各問に答えよ。

(3－1)　各小球の中心を 4 つの頂点とする正三角錐の体積を求めよ。

(3－2)　4 個の小球が内接する球の半径を求めよ。

(3 - 2)点 D から線分 AM に下ろした垂線の足を T とする。線分 TD と線分 AH の交点を O とする。このとき，OA＝OD となり，図形の対称性から，点 O は正四面体 ABCD の外接球の中心である。これが求める球の中心と一致して，求める球の半径は OD$+r$ となる。



次に，OD の長さを求める。

∠DTM＝∠DHO＝90°，∠TDM＝∠HDO より

$$\triangle DTM \backsim \triangle DHO$$

ゆえに　　DT : DM＝DH : OD

$$OD=\frac{DM \cdot DH}{DT}$$

$DM=\sqrt{3}r$，$DH=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$，$DT=AH=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r$ を代入して

$$OD=\sqrt{3}r \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}r}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}r=\frac{\sqrt{6}}{2}r$$

したがって，求める円の半径は

$$OD+r=\frac{2+\sqrt{6}}{2}r$$

センター試験・数列セレクション

【１】1999 追試(配点　20)

(1)　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ に対して，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。このとき

$$S_{10} = \boxed{\text{ア}}(\boxed{\text{イ}}a + \boxed{\text{ウ}}d)$$

である。ここで

$$S_{10} = -5,\quad S_{16} = 8$$

が成り立つとき

$$a = \boxed{\text{エオ}},\quad d = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

であり，また，S_1，S_2，……，S_{100} の中で最小の値は $\boxed{\text{クケ}}$ である。

(2)　初項 15，公比 2 の等比数列を $\{b_n\}$ とし，正の整数 n を 4 で割ったときの余りを c_n とする。このとき

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_{40} = \boxed{\text{コサ}}$$

$$b_1c_1 + b_2c_2 + \cdots + b_{40}c_{40} = \boxed{\text{シス}}(2^{\boxed{\text{セソ}}} - 1)$$

である。

【２】1998 本試(配点　20)

正の偶数を小さいものから順に並べた数列

2，4，6，8，……

について考える。

(1)　連続して並ぶ 5 項のうち，初めの 3 項の和が次の 2 項の和に等しければ，5 項のうちの中央の項は $\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2)　連続して並ぶ $2n+1$ 項のうち，初めの $n+1$ 項の和が次の n 項の和に等しければ，$2n+1$ 項のうちの中央の項は

$$\boxed{\text{ウ}}n^2 + \boxed{\text{エ}}n$$

である。

(3)　連続して並ぶ 5 項のうち，初めの 3 項の 2 乗の和が次の 2 項の 2 乗の和に等しければ，5 項のうちの中央の項は $\boxed{\text{オカ}}$ である。

(4)　連続して並ぶ $2n+1$ 項のうち，初めの $n+1$ 項の 2 乗の和が次の n 項の 2 乗の和に等しければ，$2n+1$ 項のうちの中央の項は

$$\boxed{\text{キ}}n^2 + \boxed{\text{ク}}n$$

である。