5/29 数ゼミ 私立11S組.

答 1問 東大.

(センター総復習
コメントだけ)

次回
補充-11 への修正
11講, 12講 (A, B) C, チャレンジ中心

[第13講の公式の確認]

センター試験・数列セレクション

【１】1999 追試(配点　20)

(1)　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ に対して，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。このとき

$$S_{10}=\boxed{\text{ア}}\left(\boxed{\text{イ}}a+\boxed{\text{ウ}}d\right)$$

である。ここで

$$S_{10}=-5,\quad S_{16}=8$$

が成り立つとき

$$a=\boxed{\text{エオ}},\quad d=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

であり，また，S_1，S_2，……，S_{100} の中で最小の値は $\boxed{\text{クケ}}$ である。

(2)　初項 15，公比 2 の等比数列を $\{b_n\}$ とし，正の整数 n を 4 で割ったときの余りを c_n とする。このとき

$$c_1+c_2+\cdots+c_{40}=\boxed{\text{コサ}}$$

$$b_1c_1+b_2c_2+\cdots+b_{40}c_{40}=\boxed{\text{シス}}\left(2^{\boxed{\text{セソ}}}-1\right)$$

である。

【２】1998 本試(配点　20)

正の偶数を小さいものから順に並べた数列

2，4，6，8，……

について考える。

(1)　連続して並ぶ 5 項のうち，初めの 3 項の和が次の 2 項の和に等しければ，5 項のうちの中央の項は $\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2)　連続して並ぶ $2n+1$ 項のうち，初めの $n+1$ 項の和が次の n 項の和に等しければ，$2n+1$ 項のうちの中央の項は

$$\boxed{\text{ウ}}n^2+\boxed{\text{エ}}n$$

である。

(3)　連続して並ぶ 5 項のうち，初めの 3 項の 2 乗の和が次の 2 項の 2 乗の和に等しければ，5 項のうちの中央の項は $\boxed{\text{オカ}}$ である。

(4)　連続して並ぶ $2n+1$ 項のうち，初めの $n+1$ 項の 2 乗の和が次の n 項の 2 乗の和に等しければ，$2n+1$ 項のうちの中央の項は

$$\boxed{\text{キ}}n^2+\boxed{\text{ク}}n$$

である。

問題演習（発展篇）

【例題 38】

異なる 9 冊の本を 3 冊ずつ 3 組に分ける分け方は何通りあるか。

【例題 39】

(1) A，B，C の 3 つの部屋に，5 人を分ける分け方は何通りあるか。
(2) A，B，C の 3 つの部屋に，n 人を分ける分け方は何通りあるか。
ただし，(1)(2)ともに，空き部屋があってはならないものとする。

【例題 40】

赤球 4 個，白球 2 個，黒球 1 個をつないでブレスレットを作る。作り方は何通りあるか。

（発展篇）

【例題 41】

n を正の整数とし，n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える。ただし，1 個のボールも入らない箱があってもよいものとする。以下に述べる 4 つの場合について，それぞれ相異なる入れ方の総数を求めよ。

(1) 1 から n までの異なる番号のついた n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合。
(2) 互いに区別のつかない n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合。
(3) 1 から n までの異なる番号のついた n 個のボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合
(4) n が 6 の倍数 $6m$ であるとき，n 個の互いに区別がつかないボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合。

（東京大）

空箱許す

【例題 41】

n を正の整数とし，n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える。ただし，1 個のボールも入らない箱があってもよいものとする。以下に述べる 4 つの場合について，それぞれ相異なる入れ方の総数を求めよ。

(1) 1 から n までの異なる番号のついた n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合。

(2) 互いに区別のつかない n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合。

(3) 1 から n までの異なる番号のついた n 個のボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合

(4) n が 6 の倍数 $6m$ であるとき，n 個の互いに区別がつかないボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合。

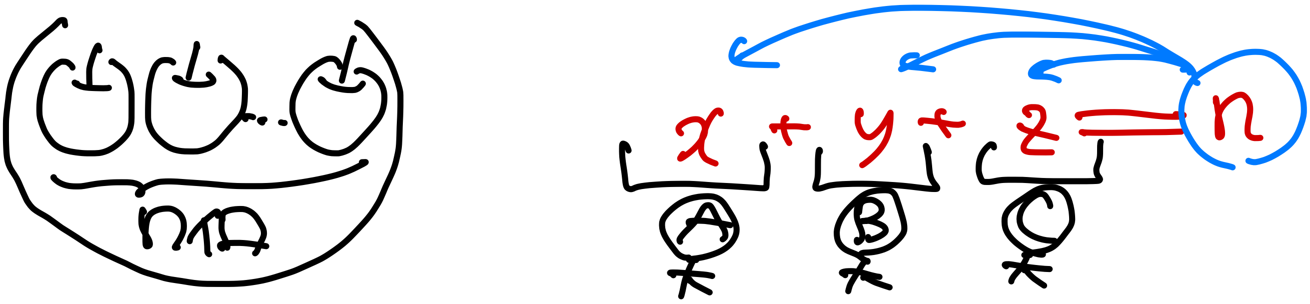
テーマ　区別

	(1)	(2)	(3)	(4)
玉	あり	なし	あり	なし
箱	あり	あり	なし	なし

(1) 1 から n までの異なる番号のついた n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合。

3^n 通り

(2) 互いに区別のつかない n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合。



n個のりんごを3人に分ける。

2が何で仕切る

$$\frac{(n+2)!}{n!\times 2!} = {}_{n+2}C_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

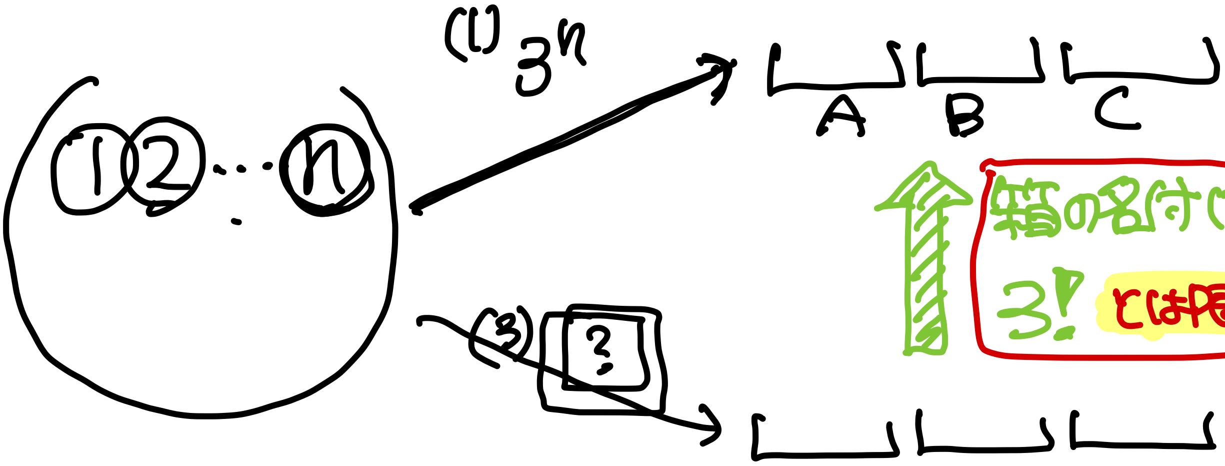
(通り)

	(1)	(2)	(3)	(4)
玉	あり	なし	あり	なし
箱	あり	あり	なし	なし

積の法則.　　りんご　重複組合せ

(3)　1からnまでの異なる番号のついたn個のボールを，区別のつかない3つの箱に入れる場合

(1) 3^n

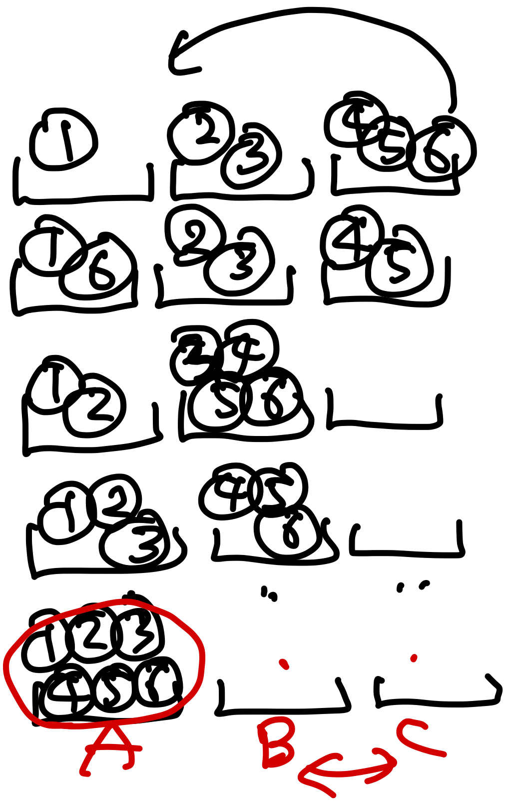


箱の名付け方 3! とは限らない

$$\therefore \frac{3^n}{3!} = \cancel{\frac{3^{n-1}}{2}\text{通り}}$$

整数ではない.

$n=6$

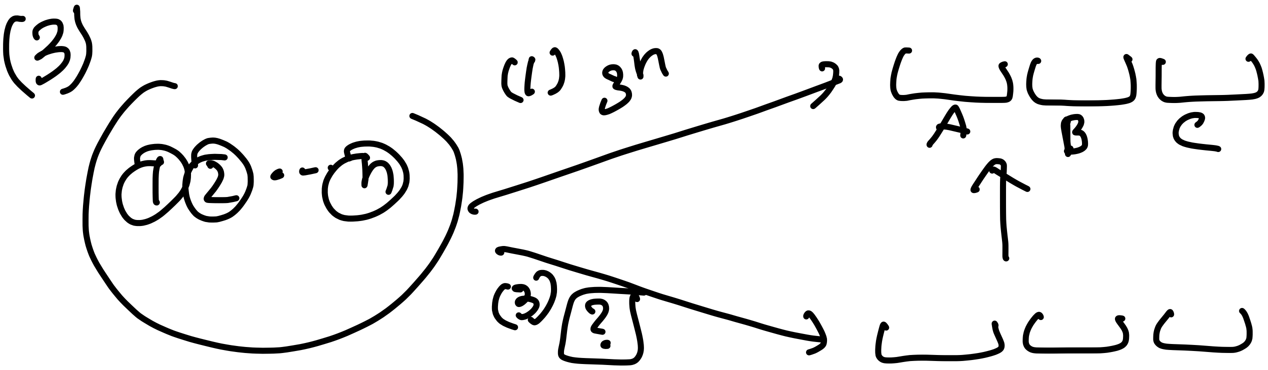


名付け方 = $\boxed{\text{重複度}}$

3!
3!
3!
3!　空1以下.

3　空2つ.

(3)



(1) 箱区別あり　　　(3) なし

$$3^n \begin{cases} \xrightarrow{\text{空}0,1} 3^n-3 \xrightarrow{\div 3!} \dfrac{3^n-3}{6} \\ \xrightarrow{\text{空}2} \boxed{3} \xrightarrow{3} \boxed{1} \end{cases}$$

$$\frac{3^n-3}{6} + 1 = $$

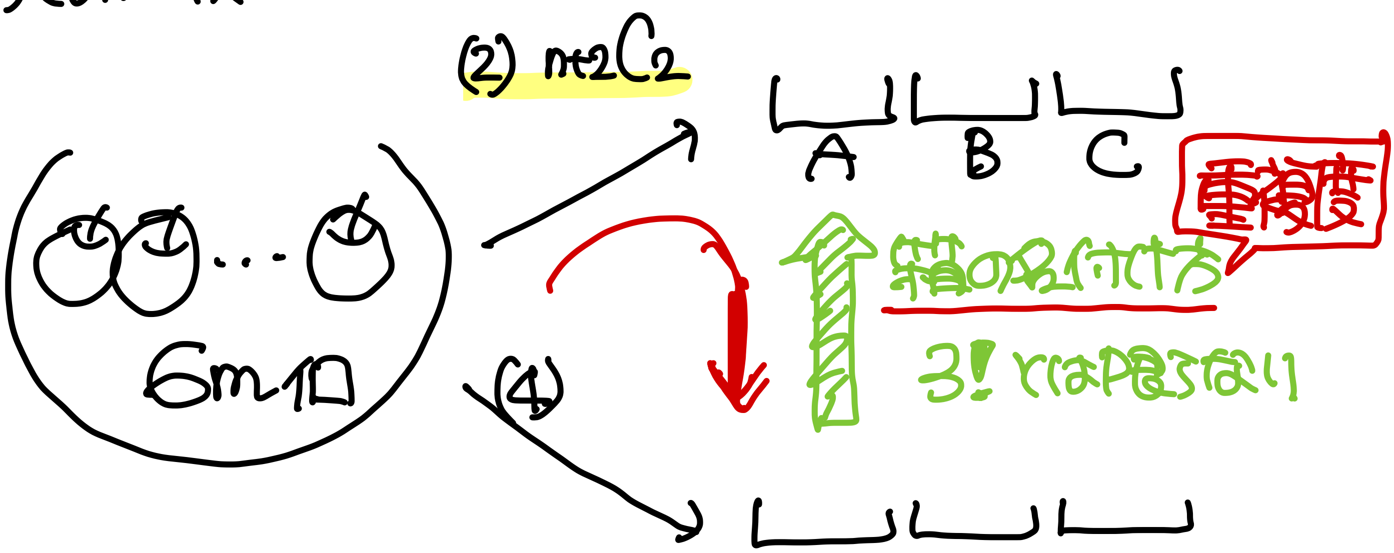
$$\therefore \frac{3^n-3}{6} + \frac{3}{3} = \frac{3^{n-1}-1}{2} + 1 = \frac{3^{n-1}+1}{2}$$

//

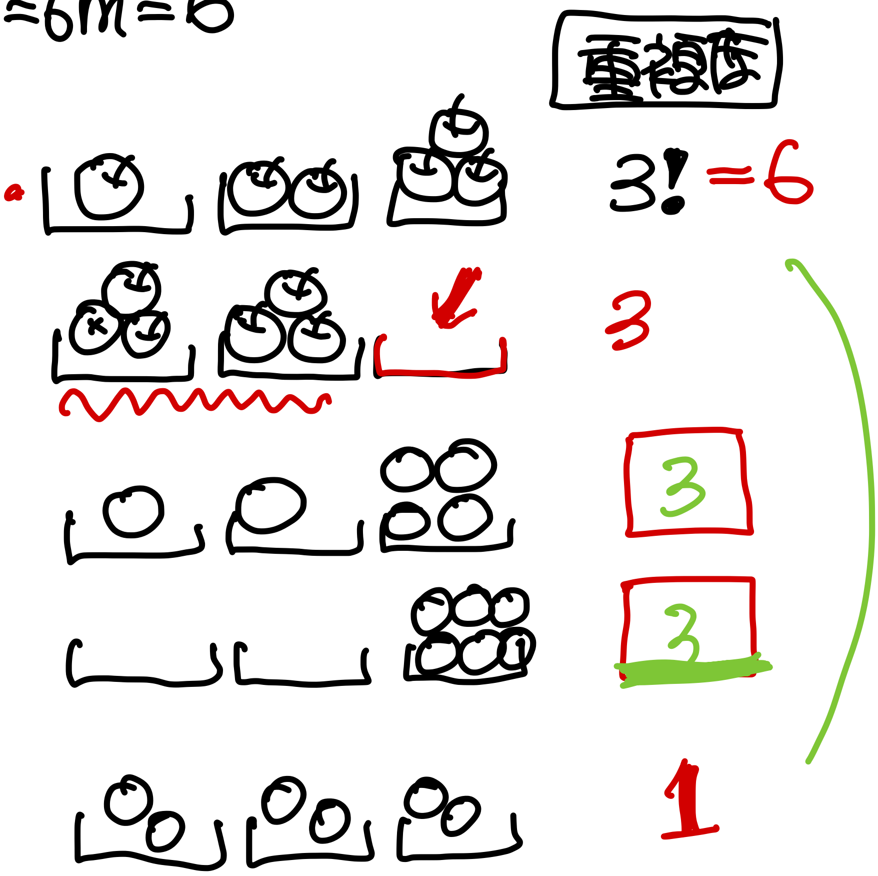
(4) n が 6 の倍数 $6m$ であるとき，n 個の互いに区別がつかないボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合。

$n = 6m$

(2)との比較



$n=6m=6$



(2)だと $\;_{n+2}C_2=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2} \longleftarrow n=6m$

$=(3m+1)(6m+1)$

$=18m^2+9m+1$ 通り

(2) 箱に区別あり　　　　　　　(4) なし

$$18m^2+9m+1 \begin{cases} \xrightarrow{\boxed{6}} \boxed{18m^2} \xrightarrow{\div 3!} \boxed{3m^2} \\ \xrightarrow{\boxed{3}} \boxed{9m} \xrightarrow{\div 3} \boxed{3m} \\ \xrightarrow{\boxed{1}} \boxed{1} \xrightarrow{\div 1} \boxed{1} \end{cases}$$

$3m^2 + 3m + 1$

(a,a,a)型
重複度 $\boxed{1}$　$(2m, 2m, 2m)$

重複度 $\boxed{3}$
(a,a,$\boxed{b}$)型

$$\left.\begin{array}{l} (0, 0, 6m) \\ (1, 1, 6m-2) \\ (2, 2, 6m-4) \\ \quad\vdots \\ \cancel{(2m, 2m, 2m)} \\ (3m, 3m, 0) \end{array}\right\} 3m+\cancel{1}$$

$$\therefore\ 3m^2+3m+1$$

第11講　場合の数(1)

[1] 場合の数，和の法則，積の法則

ある事柄の起こり方の総数を**場合の数**という．

2つの事柄 A，B があり，これらは**ともに起こること**はないとする．

さらに，A の起こり方が m 通り，B の起こり方が n 通りならば，

A または B のいずれかが起こる場合の数は $m+n$ 通り．

また，2つの事柄 A，B があり，A の起こり方が m 通りあり，そのそれぞれに対して B の起こり方が n 通りあるならば，

A と B がともに起こる場合の数は mn 通り．

[2] 順列

いくつかの異なるものを順序をつけて並べたものを**順列**という．特に，**n 個の異なるものから r 個取って作った順列** の総数は，

$$ {}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (\text{ただし，} 0! = 1 \text{とする}) $$

[3] 重複順列

n 個の異なるものから，同じものを繰り返し取ることを許して r 個取って1列に並べたものを **n 個のものから r 個取る重複順列** といい，その総数は n^r である．

[4] 円順列

異なる n 個のものの円順列の総数は，

$$(n-1)!$$

81 A

全体集合を U，その部分集合を A，B とする．また，

$$n(U)=50,\quad n(A\cup B)=42,\quad n(A\cap B)=3,\quad n(\overline{A}\cap B)=15$$

である．このとき，次のものを求めよ．

(1) $n(\overline{A}\cap\overline{B})$ $= n(\overline{A\cup B}) = n(U) - n(A\cup B) = 8$

かつ　または

(2) $n(B)$

(3) $n(A\cap\overline{B})$

(4) $n(A)$

$\boxed{8\ 1\,\mathrm{A}}$　(1)　8　(2)　18　(3)　24　(4)　27

【解法】集合の個数，ベン図，ド・モルガンの法則

82 A

1 から 100 までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ．

(1) 3 の倍数かつ 5 の倍数の個数．

(2) 3 の倍数または 5 の倍数の個数．

(3) 3 の倍数であって 5 の倍数ではないものの個数．

$\boxed{8\ 2\,\mathrm{A}}$　(1)　6　(2)　47　(3)　27

【解法】集合の個数，ベン図

83 A 出題ミス？

偶＋偶，奇＋奇

異なる

(1) 2 個のさいころを振るとき，2 つのさいころの目の和が偶数となる目の出方は何通りあるか．

異なる

(2) 3 個のさいころを振るとき，3 つのさいころの目の積が偶数となる目の出方は何通りあるか．

少なくとも1コ偶数

$\boxed{8\ 3\,\mathrm{A}}$　(1)　18 通り　(2)　189 通り

【解法】積の法則，和の法則，補集合

84 B

5040 の正の約数の個数を求めよ．さらに，5040 の正の約数の総和を求めよ．

$\boxed{84\text{B}}$ 60 個，総和は 19344

【解法】約数の個数・和の求め方

85 B

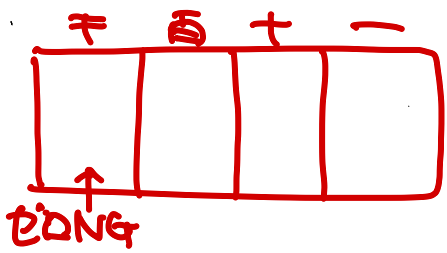
7 個の数字 0，1，2，3，4，5，6 から異なる 4 個の数字を選んで，4 桁の整数を作る．

(1) 全部で何個できるか．

(2) 偶数は何個できるか． 一の位

(3) 3 の倍数は何個できるか．

各位の和．



$\boxed{85\text{B}}$ (1) 720 個 (2) 420 個 (3) 264 個

【解法】順列

86 B

×B↑B↑B↑B↑B×

男子 5 人，女子 3 人の合計 8 人が次のように並ぶときの並び方の総数を求めよ．

(1) 一列に並ぶとき． $8!$

(2) 両端が男子であるように並ぶとき． ${}_5P_2 \times 4!$ $5! \times {}_4P_3$

(3) (2) の並び方のうち，どの 3 人の女子も隣り合わないように並ぶとき．

(4) 円形に並ぶとき． $(8-1)!$ $(5-1)! \times {}_5P_3$

(5) (4) の並び方のうち，どの 3 人の女子も隣り合わないように並ぶとき．

$\boxed{86\text{B}}$ (1) 40320 通り (2) 14400 通り (3) 2880 通り

(4) 5040 通り (5) 1440 通り

全体−(隣り合う) (3人でも，2人だけ)

(3)

(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) →

千	百	十	一
0はNG.			

(I) 和が3の倍数の4つの数

(II) ○ △ □ ▽

ココを全部書き出す△

⇓ 工夫.

和が$\boxed{3}$の倍数 ⇒ あまりに着目.

$A = \{0, 3, 6\}$

$B = \{1, 4\}$

$C = \{2, 5\}$

Aのコスウ

4 ~~AAAA~~

3 ~~AAAB~~

2 AABC型

1 ~~ABBB~~

1 ~~ACCC~~

0 BBCC型

		(Step I)		(Step II)
0あり	AABC型	$(2\times2\times2)$	$\times$	$(3\times3\times2\times1)$
0なし	AABC型	$(1\times2\times2)$	$\times$	$4!$
	BBCC型	1	$\times$	$4!$

264通り

和が▨の倍数 ⇨ あまりで分類
Type分け.

積が▨の倍数 ⇨ 素因数に着目

$\boxed{\text{例}}$ 異なるn個のサイコロを投げる

(1) 積が2の倍数となるのは何通りか。

(2) 積が6の倍数となるのは何通りか。

(3) 積が4の倍数となるのは何通りか。

0~4　0~2　0,1.　0,1

$2^{\bullet}3^{\blacktriangle}\cdot 5^{\blacksquare}\cdot 7^{\blacktriangledown}$

5040 を素因数分解すると，

$$5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$

であるから，5040 の正の約数の個数は，

$$(4 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 60 \text{ 個}.$$

さらに，5040 の正の約数の総和は，

$$(\underset{=2^0}{1} + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(\underset{=3^0}{1} + 3 + 3^2)(\underset{=5^0}{1} + 5^1)(\underset{=7^0}{1} + 7^1) = 19344.$$

(項数　$5 \times 3 \times 2 \times 2 = 60$ こ)

11講 補充-2

G，O，U，K，A，K，U の7文字を1列に並べるとき，同じ文字が隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

隣り合わない

① 全体ー隣り合う.

② スキマ・両端

GOUKAKUの7文字を一列に並べるとき、同じ文字が隣り合わない並べ方は、何通りあるか？

誤答例　スキマ・両端.　GUOAU

(Step I) G, O, A を並べる.　$3! = 6$

(Step II) そのスキマ両端にUUを入れる

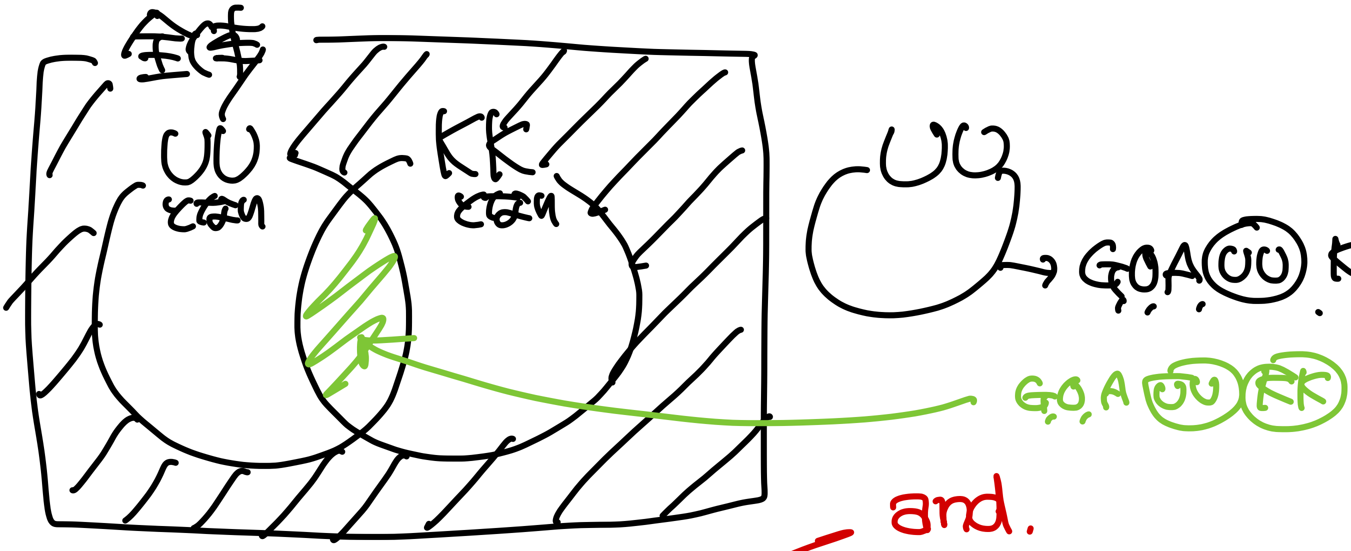
$$_4C_2 = 6$$

(Step III) さらにスキマ両端に KK を入れる

$$_6C_2 = 15$$

GOUUA などがモレ

540通り ~~答~~



and.

UUもKKもともに隣り合わない

or.

$=$(全体)$-$(UUが隣り合う または KKが隣り合う)

$$=\frac{7!}{2!2!}-\left\{\frac{6!}{2!}+\frac{6!}{2!}-5!\right\}$$

$=1260-720+120$

$=660$ 通り

隣り合わない

① 全体$-$隣り合う → 3コ以上は(注)

② スキマ・両端 → 2種以上は(注)

2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】１１講

$\boxed{\text{８１A}}$　(1)　8　(2)　18　(3)　24　(4)　27

【解法】集合の個数，ベン図，ド・モルガンの法則

$\boxed{\text{８２A}}$　(1)　6　(2)　47　(3)　27

【解法】集合の個数，ベン図

$\boxed{\text{８３A}}$　(1)　18 通り　(2)　189 通り

【解法】積の法則，和の法則，補集合

$\boxed{\text{８４B}}$　60 個，総和は 19344

【解法】約数の個数・和の求め方

$\boxed{\text{８５B}}$　(1)　720 個　(2)　420 個　(3)　264 個

【解法】順列

$\boxed{\text{８６B}}$　(1)　40320 通り　(2)　14400 通り　(3)　2880 通り　(4)　5040 通り　(5)　1440 通り

【解法】順列

87 C

1000 から 9999 までの 4 桁の自然数について，次の問に答えよ．

(1) 1 が使われているものはいくつあるか．

(2) 1，2 の両方が使われているものはいくつあるか．

(3) 1，2，3 のすべてが使われているものはいくつあるか．

88 C

1，2，3，4，5，6，7，8 の 8 つの数字から異なる 4 個の数字を用いてできる 4 桁の整数を小さい順に並べた．

(1) 5673 は何番目の整数か．

(2) 111 番目の整数は何か．

入試問題にチャレンジ (11)

次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく．

「各桁の数字は互いに異なり，どの 2 つの桁の数字の和も 9 にならない．」

ただし，S の要素は 10 進法で表す．また，1 桁の正の整数は S に含まれるとする．

(1) S の要素でちょうど 4 桁のものは何通りあるか．

(2) 小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ．

(1) 1728コ，(2) 8695

(2000・東京大学)

2つ 共存しない

次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく.

「各桁の数字は互いに異なり, $\boxed{\text{どの 2 つの桁の数字の和も 9 にならない}}$」

ただし, S の要素は 10 進法で表す. また, 1 桁の正の整数は S に含まれるとする.

(1) S の要素でちょうど 4 桁のものは何通りあるか.

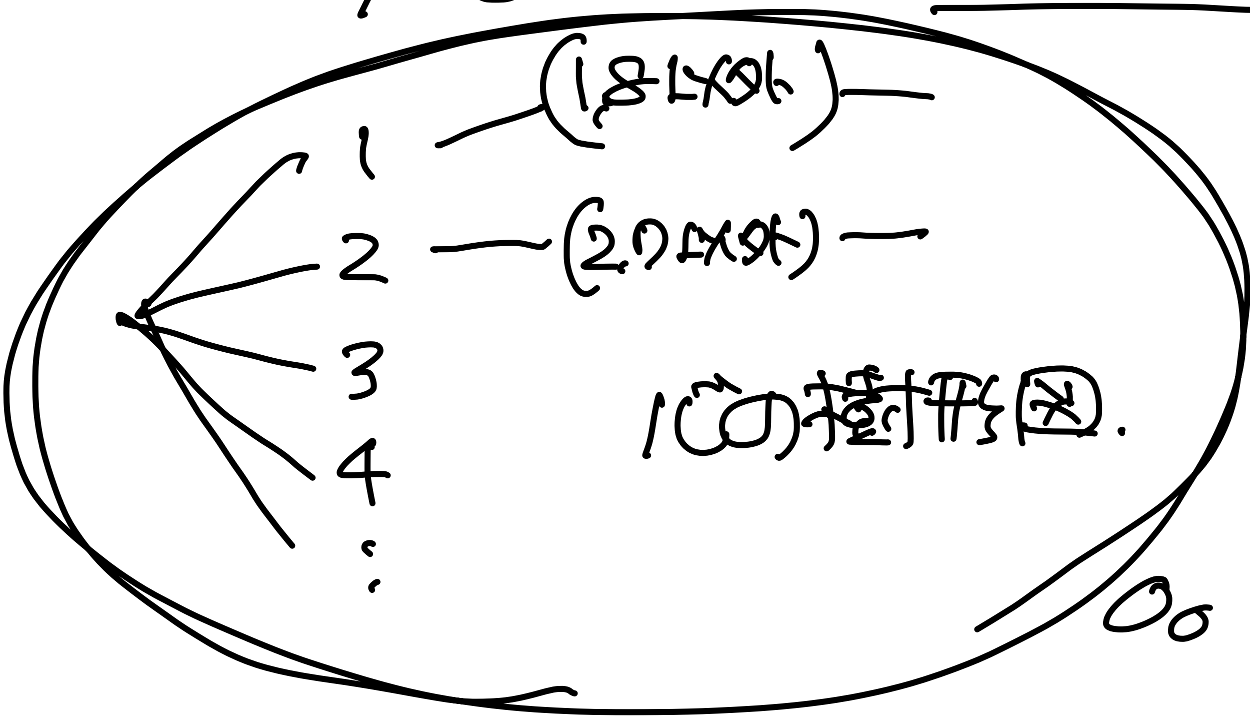
使う数字は $\underset{A}{\{0,9\}}$, $\underset{B}{\{1,8\}}$, $\underset{C}{\{2,7\}}$, $\underset{D}{\{3,6\}}$, $\underset{E}{\{4,5\}}$

のそれぞれから多くて1個

(1)

ゼロNG			

$9\times8\times6\times4 = 1728$(通り)



(2) 小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ.

1ケタ.	$\cancel{0}$, 1〜9	9通り	
2ケタ	9×8	72通り	
3ケタ	9×8×6	432通り	2000番目
4ケタ	9×8×6×4	1728通り	

小さい方から数えて 2000番目

||

4ケタでいうと　2000−(9+72+432)=1487番目

⋮

4ケタで大きい方から数えると　番目

$(9+72+432+1728) - 2000 + 1 = 242$

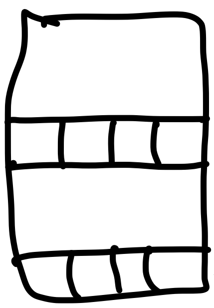
大　小

1ケタ

2 〃

3 〃

4 〃



← 2000番目　242番目

← 2241番目　1番目

検算力

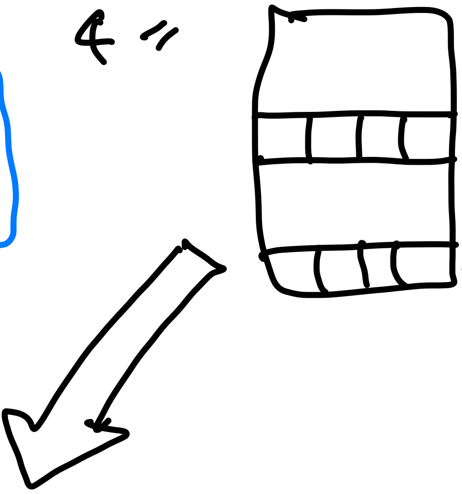
1 桁

2 〃

3 〃

4 〃

検算力



2000番目

2241番目

$\boxed{242}$番目

1番目

87□□ $6 \times 24 = 24$

89□□ $6 \times 4 = 24$

9□□□ $8 \times 6 \times 4 = 192$

1000 から 9999 までの 4 桁の自然数について，次の問に答えよ．

(1)　1 が使われているものはいくつあるか．

(2)　1，2 の両方が使われているものはいくつあるか．

(3)　1，2，3 のすべてが使われているものはいくつあるか．

【解答】

1000 から 9999 までの 4 桁の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合のうち，

1 が使われていない自然数の集合を A,

2 が使われていない自然数の集合を B,

3 が使われていない自然数の集合を C

とする．また，集合 X の要素の個数を $n(X)$ と表すことにする．

このとき，

$$n(U) = 9000,$$
$$n(A) = n(B) = n(C) = 8 \times 9^3 = 5832,$$
$$n(A \cap B) = n(B \cap C) = n(C \cap A) = 7 \times 8^3 = 3584,$$
$$n(A \cap B \cap C) = 6 \times 7^3 = 2058.$$

(1)　U の部分集合のうち，1 が使われている自然数の集合は $\overline{A}$ と表されるから，求める個数は，

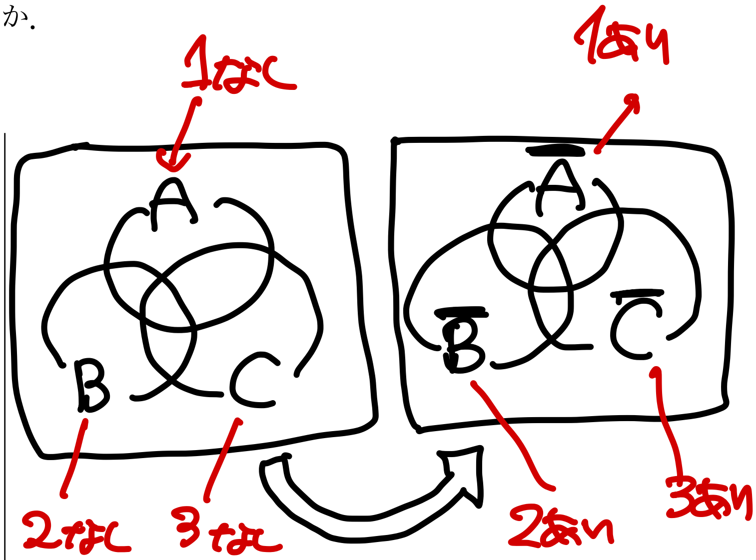
$$\begin{aligned} n(\overline{A}) &= n(U) - n(A) \\ &= 9000 - 5832 \\ &= 3168 \text{ 個}. \end{aligned}$$

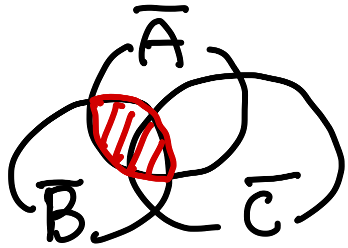
(2)　U の部分集合のうち，1，2 の両方が使われている自然数の集合は $\overline{A} \cap \overline{B}$ と表されるから，求める個数は，

$$\begin{aligned} n(\overline{A} \cap \overline{B}) &= n(\overline{A \cup B}) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \\ &= 9000 - (5832 \times 2 - 3584) \\ &= 920 \text{ 個}. \end{aligned}$$

(3)　U の部分集合のうち，1，2，3 のすべてが使われている自然数の集合は $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ と表されるから，求める個数は，

$$\begin{aligned} n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) &= n(\overline{A \cup B \cup C}) \\ &= n(U) - n(A \cup B \cup C) \\ &= n(U) - \{n(A) + n(B) + n(C) \\ &\qquad - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\ &\qquad + n(A \cap B \cap C)\} \\ &= 9000 - (5832 \times 3 - 3584 \times 3 + 2058) \\ &= 198 \text{ 個}. \end{aligned}$$





(1) 3168

(2) 920

(3) 198 //

1，2，3，4，5，6，7，8 の 8 つの数字から異なる 4 個の数字を用いてできる 4 桁の整数を小さい順に並べた．

(1) 5673 は何番目の整数か． 983

(2) 111 番目の整数は何か． 1572

【解答】

(1) 千の位が 1，2，3，4 であるものはそれぞれ，${}_7\mathrm{P}_3 = 210$ 個ある．

したがって，千の位が 5 である整数の最小のもの，5123 は初めから数えると，

$$210 \times 4 + 1 = 841 \text{ 番目．}$$

さらに，千の位が 5 で，百の位が 1，2，3，4 である整数はそれぞれ，${}_6\mathrm{P}_2 = 30$ 個ある．

したがって，千の位が 5，百の位が 6 である整数の最小のもの，5612 は初めから数えると，

$$210 \times 4 + 30 \times 4 + 1 = 961 \text{ 番目．}$$

また，千の位が 5，百の位が 6 で，十の位が 1，2，3，4 である整数はそれぞれ，${}_5\mathrm{P}_1 = 5$ 個ある．

したがって，千の位が 5，百の位が 6，十の位が 7 である整数の最小のもの，5671 は初めから数えると，

$$210 \times 4 + 30 \times 4 + 5 \times 4 + 1 = 981 \text{ 番目．}$$

ここから順に数えると，5673 は，

983 番目の整数．

(2) 111 番目の整数を N とする．

千の位が 1 である整数は全部で，210 個あるので，N の千の位の数は 1．

さらに，千の位が 1 で，百の位が 2，3，4 である整数はそれぞれ，30 個あるので，N の百の位の数は 5．

また，千の位が 1，百の位が 5，十の位が 2，3，4，6 である整数はそれぞれ，5 個あるので，N の十の位の数は 7．

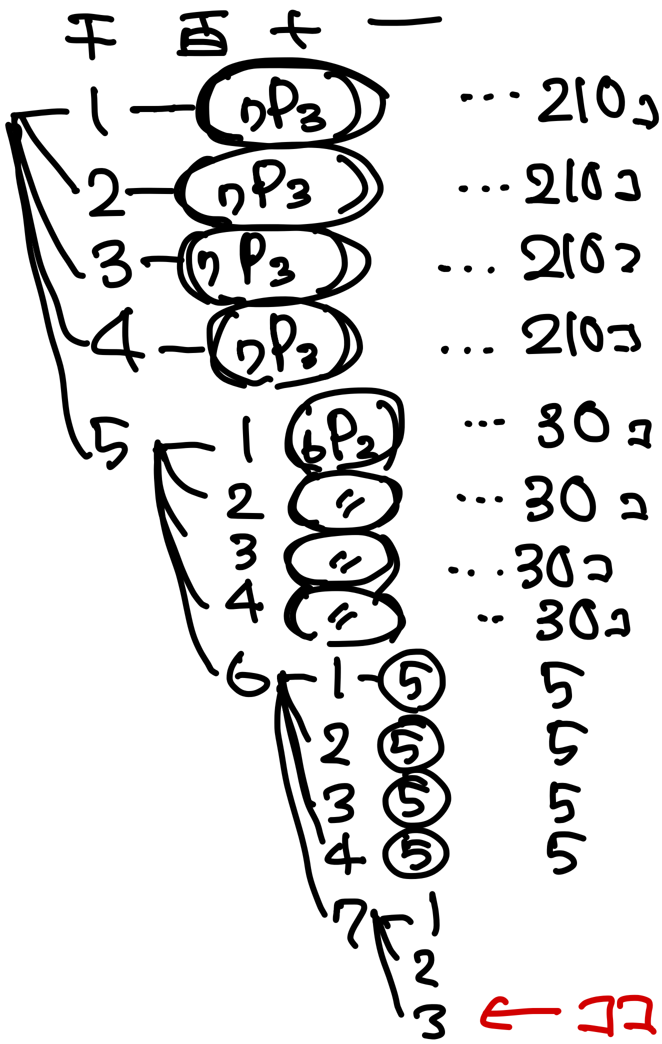
したがって，1572 を初めから数えると，

$$30 \times 3 + 5 \times 4 + 1 = 111 \text{ 番目の整数}$$

であるから，

$$N = 1572.$$

樹形図



入試問題にチャレンジ (11)

次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく．

「各桁の数字は互いに異なり，どの 2 つの桁の数字の和も 9 にならない．」

ただし，S の要素は 10 進法で表す．また，1 桁の正の整数は S に含まれるとする．

(1) S の要素でちょうど 4 桁のものは何通りあるか．

(2) 小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ．

【解答】 (2000・東京大学)

和が 9 になる 2 つの数字の組は，

$$\{0,\ 9\},\ \{1,\ 8\},\ \{2,\ 7\},\ \{3,\ 6\},\ \{4,\ 5\}$$

である．各組から 1 つずつ数を選んで得られる正の整数が S の要素である．

(1) S の要素でちょうど 4 桁のものの千，百，十，一の位の数をそれぞれ a，b，c，d とする．

a は 0 以外の数であるから，

9 通り．

そのそれぞれに対して，b は a と $9-a$ 以外の数であるから，

8 通り．

そのそれぞれに対して，c は a と $9-a$，b と $9-b$ 以外の数であるから，

6 通り．

そのそれぞれに対して，d は a と $9-a$，b と $9-b$，c と $9-c$ 以外の数であるから，

4 通り．

したがって，S の要素でちょうど 4 桁のものの個数は，

$9 \times 8 \times 6 \times 4 = 1728$ 個．

(2) (1) と同様にして，S の要素で 1 桁，2 桁，3 桁のものの個数を数えることにする．

(ⅰ) 1 桁のもの

9 個．

(ⅱ) 2 桁のもの

$9 \times 8 = 72$ 個

(ⅲ) 3 桁のもの

$9 \times 8 \times 6 = 432$ 個

以上より，S の要素で 3 桁以下のものの個数は，

$9 + 72 + 432 = 513$ 個

であるから，S の要素で 4 桁以下のものの個数は，

$513 + 1728 = 2241$ 個．

したがって，小さい方から数えて 2000 番目のものは 4 桁で，4 桁の中で大きい方から数えると，

$2241 - 2000 + 1 = 242$ 番目．

ここで，4 けたの S の要素で，

$9\times\times\times$ の形のものは $8 \times 6 \times 4 = 192$ 個，

$89\times\times$ の形のものは $6 \times 4 = 24$ 個，

$87\times\times$ の形のものは 24 個

あるから，8703 が大きい方から数えると，

$192 + 24 + 24 = 240$ 番目．

さらに，大きい順に並べていくと，

$8697,\ 8695,\ \cdots$

であるから，小さい方から数えて 2000 番目の S の要素は，

8695．

第12講　　場合の数(2)

1 **組合せ**

n 個の異なるものから r 個を取り出して1組にしたものを **n 個のものから r 個取り出した組合せ** といい，その総数は，

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

2 **基本的な公式**

(i) ${}_n\mathrm{P}_r = r!\,{}_n\mathrm{C}_r$

(ii) ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$

(iii) ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

(iv) $k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

3 **同じものを含む順列**

n 個のもののうち，p 個，q 個，r 個，$\cdots$ がそれぞれ同じものであるとき，この n 個のものを並べてできる順列の総数は，

$$ \frac{n!}{p!q!r!\cdots} $$
$$ (p+q+r+\cdots=n) $$

89 A

男子３人，女子４人について，次のような方法は何通りあるか．

(1)　７人から３人を選んで一列に並べる方法．

(2)　７人から３人を選ぶ方法．

(3)　女子２人，男子１人を選んで一列に並べる方法．

$\boxed{89\text{A}}$　(1)　210通り　(2)　35通り　(3)　108通り

【解法】組み合わせ

90 A

次の問に答えよ．

(1)　a，a，a，b，b，b，b，cの８文字を一列に並べる順列は何通りあるか．

(2)　FUJIGAKUINのすべての文字を使ってできる順列のうち，どのＵも，どのＩより左側にあるものは何通りあるか．

$\boxed{90\text{A}}$　(1)　280通り　(2)　151200通り

【解法】(1)同じものを含む順列，(2)順番Keep問題

91 A

平面上の10本の直線が，どの２本も平行ではなく，どの３本も１点で交わらないとき，交点はいくつあるか．また，三角形はいくつできるか．

$\boxed{91\text{A}}$　交点45個，三角形120個

【解法】対応関係（組み合わせ利用）

92 B

生徒9人を次の3つのグループに分ける方法は何通りあるか.

(1) 4人, 3人, 2人の3つのグループに分ける.

(2) 3人ずつ, 3つのグループ, A, B, Cに分ける.

(3) 3人ずつ, 3つのグループに分ける.

(4) 2人, 2人, 5人の3つのグループに分ける.

$\boxed{92B}$ (1) 1260通り (2) 1680通り (3) 280通り (4) 378通り

【解法】組分け問題

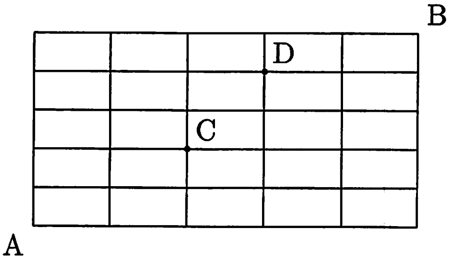
93 B

図のような道路において, 最短経路でAからBに行く道順を考える.

(1) 道順は全部で何通りあるか.

(2) CもDも通る道順は何通りあるか.

(3) CもDも通らない道順は何通りあるか.



$\boxed{93B}$ (1) 252通り (2) 54通り (3) 81通り

【解法】最短経路, ベン図

94 B

5個の数字1, 2, 3, 4, 5から異なる3個の数字を選ぶとき, 最小の数字が2以下で, 最大の数字が4以上である3個の数字の選び方の総数を求めよ.

$\boxed{94B}$ 8通り

【解法】数え上げ または くり抜き

2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】１２講

$\boxed{\text{８９A}}$　(1)　210 通り　(2)　35 通り　(3)　108 通り

【解法】組み合わせ

$\boxed{\text{９０A}}$　(1)　280 通り　(2)　151200 通り

【解法】(1)同じものを含む順列，(2)順番 Keep 問題

$\boxed{\text{９１A}}$　交点 45 個，三角形 120 個

【解法】対応関係（組み合わせ利用）

$\boxed{\text{９２B}}$　(1)　1260 通り　(2)　1680 通り　(3)　280 通り　(4)　378 通り

【解法】組分け問題

$\boxed{\text{９３B}}$　(1)　252 通り　(2)　54 通り　(3)　81 通り

【解法】最短経路，ベン図

$\boxed{\text{９４B}}$　8 通り

【解法】数え上げ　または　くり抜き

95 C

白玉1個，赤玉2個，青玉4個がある．

(1) これらを円形に並べる方法は何通りあるか．

(2) これらで何通りのネックレスができるか．

96 C

円周上にn個の点P_1，P_2，$\cdots$，P_nがあり，これらを結ぶ異なる2本の弦の組を考える．ただし$n \geqq 4$とする．1つの端点を共有する2本の弦の組の個数をa_n，共有点のない2本の弦の組の個数をb_nとするとき，$a_n = b_n$となるようなnの値を求めよ．

入試問題にチャレンジ (12)

生徒14人から2人ずつの組をn組 ($n = 1, 2, 3, \cdots, 7$) 作る作り方をS_nとする．

(1) S_nをnの式で表せ．

(2) S_nを最大にするnをすべて求めよ．

(2005・神戸大学)

n 個の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_n から 3 個の点を選び，その 3 点を結んで得られる三角形 T について考える．

ここで，三角形 T の 3 辺のうち，2 辺を選ぶと 1 つの端点を共有する 2 本の弦ができる．

したがって，

$$\begin{aligned} a_n &= {}_n\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_2 \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)(n-2). \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

さらに，n 個の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_n から 4 個の点を選び，その 4 点を結んで得られる四角形 S について考える。

ここで，四角形 S において，共有点をもたない 2 辺の組合せは 2 通りある．

したがって，

$$\begin{aligned} b_n &= {}_n\mathrm{C}_4 \times 2 \\ &= \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3). \qquad \cdots ② \end{aligned}$$

①，②より，$a_n = b_n$ が成り立つ条件は，

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2) = \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

なので，$n \geqq 4$ より，

$$n-3=6.$$

よって，求める n の値は，

$$n=9.$$

入試問題にチャレンジ (12)

生徒 14 人から 2 人ずつの組を n 組 $(n=1, 2, 3, \cdots, 7)$ 作る作り方を S_n とする.

(1) S_n を n の式で表せ.

(2) S_n を最大にする n をすべて求めよ.

(2005・神戸大学)

(1) S_n の定め方より,

$$S_n = {}_{14}\mathrm{C}_2 \cdot {}_{12}\mathrm{C}_2 \cdots {}_{14-2(n-1)}\mathrm{C}_2 \div n!$$
$$= \frac{14 \cdot 13 \cdots (16-2n)(15-2n)}{2^n \cdot n!}$$
$$= \frac{14!}{2^n \cdot n!(14-2n)!}.$$

(2) $I_n = 2^n \cdot n!(14-2n)!$ とすると, (1) の結果より,

$$S_n \text{が最大} \iff I_n \text{が最小}$$

が成り立つ.

また, $1 \leqq n \leqq 6$ のとき,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= 2^{n+1}(n+1)!(12-2n)! - 2^n \cdot n!(14-2n)! \\ &= 2^n \cdot n!(12-2n)!\{2(n+1) - (14-2n)(13-2n)\} \\ &= 2^n \cdot n!(12-2n)!(-4n^2 + 56n - 180) \\ &= 2^n \cdot n!(12-2n)!\{-4(n-5)(n-9)\} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{cases} 1 \leqq n \leqq 4 \text{のとき}, & I_{n+1} - I_n < 0, \\ n = 5 \text{のとき}, & I_{n+1} - I_n = 0, \\ n = 6 \text{のとき}, & I_{n+1} - I_n > 0. \end{cases}$$

これより,

$$\begin{cases} I_1 > I_2 > I_3 > I_4 > I_5, \\ I_5 = I_6, \\ I_6 < I_7 \end{cases}$$

であるから, I_n は $n=5$, 6 のとき, 最小となる.

したがって, S_n を最大にする n の値は,

$$n = 5, \quad 6.$$

第 8 章　二項定理

《学習項目》

・

A問題

〜〜

A 8 - 1

(1) ${}_n\mathrm{C}_r+{}_n\mathrm{C}_{r+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$ を証明せよ。

(2) $k\cdot{}_n\mathrm{C}_k=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ を証明せよ。

A 8 - 2

次の式の展開式における，[　] 内に指定した項の係数を求めよ。

(1) $\left(x^3+\dfrac{2}{x}\right)^7$ [x^5]

(2) $\left(2x^3-\dfrac{1}{3x^2}\right)^5$ [定数項]

A 8 - 3

$(x-y+3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の項の係数を求めよ。

A 8 - 4

次の式を簡単にせよ。

(1) ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$

(2) ${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+(-1)^r{}_n\mathrm{C}_r+\cdots\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n$

B問題

〜〜

B 8 - 1

次の式を簡単にせよ。

(1)　${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_4+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2r}+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$

(2)　${}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+{}_{2n}\mathrm{C}_5+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2r-1}+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$

B 8 - 2

${}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2+3{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n{}_n\mathrm{C}_n$を計算せよ。

B 8 - 3

次の式を計算せよ。　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$

C問題

〜〜

C 8 - 1

二項定理を用いて，次の不等式が成り立つことを証明せよ。ただし，n は 2 以上の整数とする。

(1)　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>2$

(2)　$(1+x)^n \geqq 1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$　$(x>0)$