6/1　私立115組

和が▨の倍数 ⇒ あまりで分類
Type分け.

積が▨の倍数 ⇒ 素因数に着目

例 異なるn個のサイコロを投げる

(1) 積が2の倍数となるのは何通りか。

(2) 積が6の倍数となるのは何通りか。

(3) 積が4の倍数となるのは何通りか。

第12講　場合の数(2)

1 **組合せ**

n 個の異なるものから r 個を取り出して1組にしたものを **n 個のものから r 個取り出した組合せ** といい，その総数は，

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

2 **基本的な公式**

(i) ${}_n\mathrm{P}_r = r!\,{}_n\mathrm{C}_r$

(ii) ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$

(iii) ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

(iv) $k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

3 **同じものを含む順列**

n 個のもののうち，p 個，q 個，r 個，$\cdots$ がそれぞれ同じものであるとき，この n 個のものを並べてできる順列の総数は，

$$ \frac{n!}{p!q!r!\cdots} $$

$$ (p+q+r+\cdots=n) $$

89 A

男子３人，女子４人について，次のような方法は何通りあるか.

(1)　７人から３人を選んで一列に並べる方法.

(2)　７人から３人を選ぶ方法.

(3)　女子２人，男子１人を選んで一列に並べる方法.

$\boxed{\text{８９A}}$　(1)　210通り　(2)　35通り　(3)　108通り

【解法】組み合わせ

90 A

次の問に答えよ.

(1)　a，a，a，b，b，b，b，cの８文字を一列に並べる順列は何通りあるか.

(2)　FUJIGAKUINのすべての文字を使ってできる順列のうち，どのUも，どのIより左側にあるものは何通りあるか.

$\boxed{\text{９０A}}$　(1)　280通り　(2)　151200通り

【解法】(1)同じものを含む順列，(2)順番Keep問題

91 A

平面上の10本の直線が，どの２本も平行ではなく，どの３本も１点で交わらないとき，交点はいくつあるか．また，三角形はいくつできるか.

$\boxed{\text{９１A}}$　交点45個，三角形120個

【解法】対応関係（組み合わせ利用）

92 B

生徒9人を次の3つのグループに分ける方法は何通りあるか.

(1) 4人，3人，2人の3つのグループに分ける.

(2) 3人ずつ，3つのグループ，A，B，Cに分ける.

(3) 3人ずつ，3つのグループに分ける.

(4) 2人，2人，5人の3つのグループに分ける.

$\boxed{92B}$ (1) 1260通り (2) 1680通り (3) 280通り (4) 378通り

【解法】組分け問題

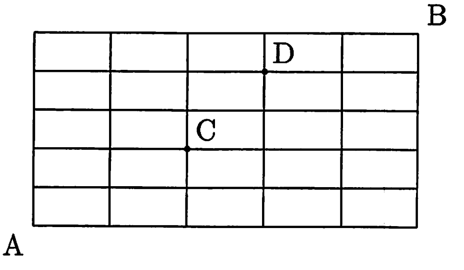
93 B

図のような道路において，最短経路でAからBに行く道順を考える.

(1) 道順は全部で何通りあるか.

(2) CもDも通る道順は何通りあるか.

(3) CもDも通らない道順は何通りあるか.



$\boxed{93B}$ (1) 252通り (2) 54通り (3) 81通り

【解法】最短経路，ベン図

94 B

5個の数字1，2，3，4，5から異なる3個の数字を選ぶとき，最小の数字が2以下で，最大の数字が4以上である3個の数字の選び方の総数を求めよ.

$\boxed{94B}$ 8通り

【解法】数え上げ または くり抜き

2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】１２講

$\boxed{８９A}$ (1)　210 通り　(2)　35 通り　(3)　108 通り

【解法】組み合わせ

$\boxed{９０A}$ (1)　280 通り　(2)　151200 通り

【解法】(1)同じものを含む順列，(2)順番 Keep 問題

$\boxed{９１A}$ 交点 45 個，三角形 120 個

【解法】対応関係（組み合わせ利用）

$\boxed{９２B}$ (1)　1260 通り　(2)　1680 通り　(3)　280 通り　(4)　378 通り

【解法】組分け問題

$\boxed{９３B}$ (1)　252 通り　(2)　54 通り　(3)　81 通り

【解法】最短経路，ベン図

$\boxed{９４B}$ 8 通り

【解法】数え上げ　または　くり抜き

95 C

白玉 1 個，赤玉 2 個，青玉 4 個がある．

(1) これらを円形に並べる方法は何通りあるか．

(2) これらで何通りのネックレスができるか．

96 C

円周上に n 個の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_n があり，これらを結ぶ異なる 2 本の弦の組を考える．ただし $n \geqq 4$ とする．1 つの端点を共有する 2 本の弦の組の個数を a_n，共有点のない 2 本の弦の組の個数を b_n とするとき，$a_n = b_n$ となるような n の値を求めよ．

入試問題にチャレンジ (12)

生徒 14 人から 2 人ずつの組を n 組 ($n = 1$，2，3，$\cdots$，7) 作る作り方を S_n とする．

(1) S_n を n の式で表せ．

(2) S_n を最大にする n をすべて求めよ．

(2005・神戸大学)

n 個の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_n から 3 個の点を選び，その 3 点を結んで得られる三角形 T について考える．

ここで，三角形 T の 3 辺のうち，2 辺を選ぶと 1 つの端点を共有する 2 本の弦ができる．

したがって，

$$\begin{aligned} a_n &= {}_n\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_2 \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)(n-2). \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

さらに，n 個の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_n から 4 個の点を選び，その 4 点を結んで得られる四角形 S について考える。

ここで，四角形 S において，共有点をもたない 2 辺の組合せは 2 通りある．

したがって，

$$\begin{aligned} b_n &= {}_n\mathrm{C}_4 \times 2 \\ &= \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3). \qquad \cdots ② \end{aligned}$$

①，②より，$a_n = b_n$ が成り立つ条件は，

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2) = \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

なので，$n \geqq 4$ より，

$$n - 3 = 6.$$

よって，求める n の値は，

$$n = 9.$$

入試問題にチャレンジ (12)

生徒14人から2人ずつの組をn組 ($n=1, 2, 3, \cdots, 7$) 作る作り方をS_nとする.

(1) S_nをnの式で表せ.

(2) S_nを最大にするnをすべて求めよ.

(2005・神戸大学)

(1) S_n の定め方より,

$$\begin{aligned} S_n &= {}_{14}\mathrm{C}_2 \cdot {}_{12}\mathrm{C}_2 \cdots {}_{14-2(n-1)}\mathrm{C}_2 \div n! \\ &= \frac{14 \cdot 13 \cdots (16-2n)(15-2n)}{2^n \cdot n!} \\ &= \frac{14!}{2^n \cdot n!(14-2n)!}. \end{aligned}$$

(2) $I_n = 2^n \cdot n!(14-2n)!$ とすると, (1) の結果より,

$$S_n\text{が最大} \iff I_n\text{ が最小}$$

が成り立つ.

また, $1 \leqq n \leqq 6$ のとき,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= 2^{n+1}(n+1)!(12-2n)! - 2^n \cdot n!(14-2n)! \\ &= 2^n \cdot n!(12-2n)!\{2(n+1) - (14-2n)(13-2n)\} \\ &= 2^n \cdot n!(12-2n)!(-4n^2+56n-180) \\ &= 2^n \cdot n!(12-2n)!\{-4(n-5)(n-9)\} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{cases} 1 \leqq n \leqq 4 \text{ のとき}, & I_{n+1} - I_n < 0, \\ n = 5 \text{ のとき}, & I_{n+1} - I_n = 0, \\ n = 6 \text{ のとき}, & I_{n+1} - I_n > 0. \end{cases}$$

これより,

$$\begin{cases} I_1 > I_2 > I_3 > I_4 > I_5, \\ I_5 = I_6, \\ I_6 < I_7 \end{cases}$$

であるから, I_n は $n=5, 6$ のとき, 最小となる.

したがって, S_n を最大にする n の値は,

$$n = 5, \quad 6.$$

第13講　　場合の数(3)

1 **二項定理**

$(a+b)^n$ を展開することを**二項展開**といい，正の整数 n については，

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

と展開できる．この展開公式を**二項定理**，${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$ を展開式の**一般項**という．係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ は**二項係数**という．

2 **多項定理**

一般に，$(a+b+c)^n$ を展開したときの項

$$a^p b^q c^r \quad (p+q+r=n)$$

の係数は，

$$\frac{n!}{p!q!r!}$$

3 **重複組合せ**

異なる n 種類のものから重複を許して r 個取り出す組合せを**重複組合せ**といい，${}_n\mathrm{H}_r$ と書く．ここで，

$${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

が成り立つ．

97 A

$(x+y)^{10}$ の展開式における x^4y^6 の係数を求めよ.

$\boxed{97\text{A}}$ 210

98 A

11^{11} を 100 で割ったときの余りを求めよ.

$\boxed{98\text{A}}$ 11

99 A

等式 $6\cdot{}_n\mathrm{C}_3 - n\cdot{}_n\mathrm{P}_2 + 144 = 0$ を満たす 3 以上の整数 n の値を求めよ.

$\boxed{99\text{A}}$ $n=9$

$${}_n\mathrm{P}_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

100 B

(1) $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$ の展開式における定数項を求めよ.

(2) $(x^2+x+1)^5$ の展開式における x^5 の係数を求めよ.

$\boxed{\text{100B}}$ (1) 60 (2) 51

101 B

次の条件を満たす整数 x, y, z の組は何通りあるか.

(1) $x+y+z=10$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$

(2) $x+y+z=10$, $x>0$, $y>0$, $z>0$

$\boxed{\text{101B}}$ (1) 66 (2) 36

102 B

1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚のカードがある. 次の条件を満たすように左から右に n 枚を並べる場合の数を $C(n)$ とする.

(条件) 1 から n までのすべての自然数 k について, 左から k 番目に番号 k のカードがこない.

(1) $C(4)$ を求めよ.

(2) $C(6)$ を求めよ.

(3) $n \geqq 3$ を満たす自然数 n に対して, $C(n+2)=(n+1)\{C(n)+C(n+1)\}$ が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{\text{102B}}$ (1) $C(4)=9$ (2) $C(6)=265$ (3) 略

2019年度　FG　数学IAIIB　【解答】１３講

$\boxed{97\mathrm{A}}$　210

【解法】

$\boxed{98\mathrm{A}}$　11

【解法】

$\boxed{99\mathrm{A}}$　$n=9$

【解法】

$\boxed{100\mathrm{B}}$　(1)　60　(2)　51

【解法】

$\boxed{101\mathrm{B}}$　(1)　66　(2)　36

【解法】

$\boxed{102\mathrm{B}}$　(1)　$C(4)=9$　(2)　$C(6)=265$　(3)　略

【解法】

103 C

(1) $n \geqq 2$, $1 \leqq k \leqq n-1$ のとき，等式 ${}_n\mathrm{C}_k = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_k$ が成り立つことを証明せよ.

(2) 等式 $k{}_n\mathrm{C}_k = n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ ($k = 1$, 2, 3, $\cdots$, n) が成り立つことを証明せよ.

(3) 自然数 n に対して，等式 ${}_n\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 3 \cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n = 2^{n-1} \cdot n$ が成り立つことを証明せよ.

104 C

自然数 n をそれより小さい自然数の和として表すことを考える．ただし，$1+2+1$ と $1+1+2$ のように和の順序が異なるものは別の表し方とする．例えば，自然数 2 は $1+1$ の 1 通りの表し方ができ，自然数 3 は，

$$2+1, \qquad 1+2, \qquad 1+1+1$$

の 3 通りの表し方ができる．2 以上の自然数 n の表し方は何通りか.

入試問題にチャレンジ (13)

$\left(x - \dfrac{x^2}{2} + y^2 - 2y^3\right)^{10}$ を展開して得られる x，y の多項式について，次数が 12 である項の係数の和を求めよ.

(2009・群馬大学)

13コマのあとの補足

第 8 章　二項定理

《学習項目》

・

A問題

〜〜

A 8 - 1

(1) ${}_{n}\mathrm{C}_{r}+{}_{n}\mathrm{C}_{r+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$ を証明せよ。

(2) $k\cdot{}_{n}\mathrm{C}_{k}=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ を証明せよ。

A 8 - 2

次の式の展開式における，[　] 内に指定した項の係数を求めよ。

(1) $\left(x^3+\dfrac{2}{x}\right)^7$ $[x^5]$

(2) $\left(2x^3-\dfrac{1}{3x^2}\right)^5$ [定数項]

A 8 - 3

$(x-y+3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の項の係数を求めよ。

A 8 - 4

次の式を簡単にせよ。

(1) ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+\cdots\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{r}+\cdots\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}$

(2) ${}_{n}\mathrm{C}_{0}-{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}-\cdots\cdots+(-1)^r{}_{n}\mathrm{C}_{r}+\cdots\cdots+(-1)^n{}_{n}\mathrm{C}_{n}$

B問題

〜〜〜

B 8 - 1

次の式を簡単にせよ。

(1) ${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_4+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2r}+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$

(2) ${}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+{}_{2n}\mathrm{C}_5+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2r-1}+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$

B 8 - 2

${}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2+3{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n{}_n\mathrm{C}_n$ を計算せよ。

B 8 - 3

次の式を計算せよ。 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$

C問題

〜〜〜

C 8 - 1

二項定理を用いて，次の不等式が成り立つことを証明せよ。ただし，n は 2 以上の整数とする。

(1) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>2$

(2) $(1+x)^n\geqq 1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$ $(x>0)$

(1) 積が2の倍数 = 2の倍数が少なくとも1回出る

2,4,6

→1回, 2回, …, n回

=(全体)−(2の倍数が0回)

$=6^n-3^n$ 通り

(2) 積が6の倍数 ← ($6=2\times3$)

=(2の倍数が1回以上) かつ (3の倍数が1回以上)

余事象 だが かつ → または

1 2 3 … n

同時に → 順に

宿 異なるn個のサイコロを投

(1) 積が2の倍数となるのは何

(2) 積が6の倍数 〃

(3) 積が4の倍数 〃

積 ⇒ 素因数

(3) 積が4の倍数 $4=2^2$

サッカー部山下

=(素因数2が2回以上)

=(全体)−(素因数2が0または1)

$A=\{1,3,5\}$

$B=\{2,6\}$ Yellow

$C=\{4\}$ Red.

$=6^n-\left(3^n+{}_nC_1\times2^1\times3^{n-1}\right)$

Aがn回　Bが1回, Aが(n−1)回

$=6^n-(1+2n)\cdot3^{n-1}$

積が4の倍数 ⇒ サッカーのカード

(4) 積が12の倍数ではどうか?

(国立向け)

(1) 積が2の倍数 = 2の倍数が少なくとも1回出る

2,4,6

→1回, 2回, …, n回

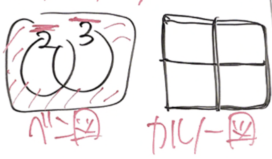
=(全体)−(2の倍数が0回)

$=6^n-3^n$ 通り

(2) 積が6の倍数 ← ($6=2\times3$)

=(2の倍数が1回以上) かつ (3の倍数が1回以上)

余事象 だが かつ → または



	3の倍数	〃でない
2の倍数		4^n-2^n
〃でない	3^n-2^n	2^n

1245のみ　6^n-3^n

1,3,5のみ　6^n-4^n

3^n　4^n

1,5のみ

全体 6^n

求めるものは

$6^n-3^n-4^n+2^n$ //

12講

89 組み合わせ $_nC_r$ 利用

90 (1) 区別なし ⇒ 個数の階乗でわる

(2) 順番keep問題 ⇒ 場所確保

合コンに遅れて来るウザイ女子

91 交点 ⟷ 2直線

三角形 ⟷ 3直線

交点 $_{10}C_2$, 三角形 $_{10}C_3$

90 (2) F,U,J,I,G,A,K,U,I,N

U,U,I,I がこの順に並ぶ

F□J□GAK□□N

同じものとみなす

$$\frac{10!}{4!} = 151200\text{通り}$$

$6! = 40320$

92 組分け

区別のできない同数の組であればその組数の階乗でわりざん

(4) 9人 → 2人, 2人, 5人

$$\frac{_9C_2\times{}_7C_2\times{}_5C_5}{2!} = 378\text{通り}$$

93 最短経路の公式

94 1,2,3,4,5 → 3つ

(最小) ≦ 2 かつ (最大) ≧ 4

1*4 2つ
1*5 3つ
2*4 1つ
2*5 2つ 8通り

11講

87 1000～9999 (9000個)

0でNG

(1) 1あり = (全体) − (1なし)　余

少なくとも1つ　$= 9000 - 8\times9^3 = 3168$

(2) (1かつ2あり) = (全体) − (1なしまたは2なし)　余

$= 9000 - (2\times 8\times9^3 - 7\times8^3)$

1なし=2なし　1なしかつ2なし

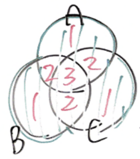
1なし　2なし

(3) (1かつ2かつ3あり)

= (全体) − (1なしまたは2なしまたは3…)

なく…

A: 1なし　B: 2なし　C: 3なし



$n(A\cup B\cup C)$
$= n(A)+n(B)+n(C)$
$- n(A\cap B) - n(B\cap C) - n(C\cap A)$
$+ n(A\cap B\cap C)$

88 樹形図 (1) 983番 (2) 1572

チャレ(11) 答 (1) 1728 (2) 8695

集合S: 正整数で各ケタは異なり、どの2つのケタの和も9にならない

犬猿の仲

~~余事象~~

{0,9}, {1,8}, {2,7}, {3,6}, {4,5}

は共存しない ⇒

千	百	十	一

0でNG

(1) 4ケタ $9\times8\times6\times4 = 1728$
　　千 百 十 一

(2) 小さい方から2000番目は ?

(i) 1ケタ 1～9 の9通り　~~0はダメ~~

(ii) 2ケタ 9×8 72通り

(iii) 3ケタ $9\times8\times6$ 432通り　513

(iv) 4ケタ $9\times8\times6\times4 = 1728$通り　2000番目

(1)より (4ケタで小さい方から1487番目 → 樹形図で整理)

基本は流れ作業
⇓
ダメなら場合分け

やっといけ!!

4ケタで大きい方から 242 番目

4ケタ全体 2241個
植木算

9*** $8\times6\times4=192$コ 残り 50

89** $6\times4=24$ 〃 26

87** $6\times4=24$ 〃 2

8697

8695

(1) 4ケタ $9\times8\times6\times4=1728$
千 百 十 一

(2) 小さい方から 2000番目は ?

(i) 1ケタ 1〜9 の9通り。 0はダメ

(ii) 2ケタ 9×8 72通り　513

(iii) 3ケタ $9\times8\times6$ 432通り　2000番目

(iv) 4ケタ $9\times8\times6\times4=1728$通り

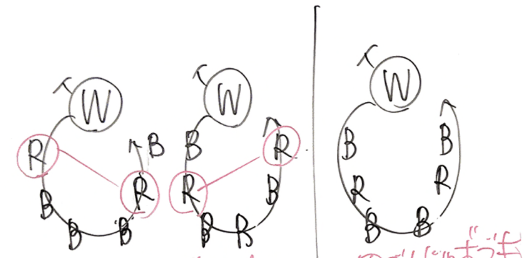
(i)より (4ケタで小さい方から 1487番目
→ 樹形図で整理)

やっといて!!

基本は流れ作業
⇓
ダメなら場合分け

類題 (1) 白1, 赤3, 青4 のじゅず ⇒ □通り

(2) 白1, 赤3, 青5 のじゅず ⇒ □通り



円では2通り. じゅずでは1通り

円でもじゅずでも1通り

95 (1) 円順列 ⇨ 固定　浮気禁止　W1, R2, B4

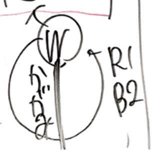
W固定, 残り R2, B4を一列に並べる

$$\frac{(2+4)!}{2!\times4!} = {}_6C_2 = 15\text{通り}$$

(2) 15÷2

(2) じゅず順列 → ひっくり返せる
円順列 → ひっくり返せない
~~÷2~~

~~じゅず = 円/2~~



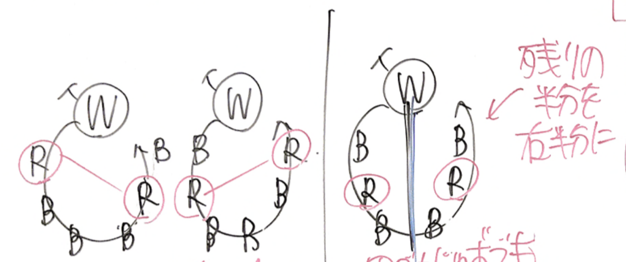
左右非対称 + 左右対称

$$\frac{15-3}{2} + 3$$

= 9通り

類題 (1) 白1, 赤3, 青4 のじゅず ⇒ □通り

(2) 白1, 赤3, 青5 のじゅず ⇒ □通り



残りの半分を左右半分に

円では2通り. じゅずでは1通り

円でもじゅずでも1通り

(1) 円だと $\frac{(3+4)!}{3!4!}=35$

対称

奇数個のRをWの向かいにおき
残りの半分R1, B2を左右半分に

じゅずだと

$$\frac{35-3}{2} + 3 = 19$$

非対称

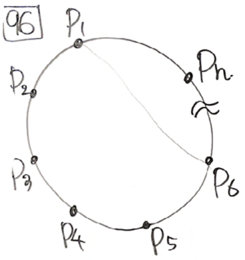
(2) 円だと $\frac{(3+5)!}{3!\times5!}=56$

(対称のものは無い
奇数個が2種.)

じゅずだと

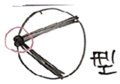
$56\div2=28$

96



円周上のn個の点.

2本の弦 $_{{}_nC_2}C_2$

a_n:  型　　b_n:  型

基本は流れ作業

$\boxed{a_n}$ まず三角形

次に 2本

$a_n = {}_nC_3 \times {}_3C_2$

$= \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$

$\boxed{b_n}$ まず四角形

次に 2本 

$b_n = {}_nC_4 \times 2$

$= \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3)$

$a_n = b_n$ を解くと

$n=9$

重要 チャレ(12)

102B 難

〜102まで

重要 チャレ(12)

102B 難

〜102まで