6/2 私立いちくみ.

チャレ(12)
102B.まで
二項定理補充.

95 C

白玉1個，赤玉2個，青玉4個がある．

(1) これらを円形に並べる方法は何通りあるか．

(2) これらで何通りのネックレスができるか．

96 C

円周上に n 個の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_n があり，これらを結ぶ異なる2本の弦の組を考える．ただし $n \geqq 4$ とする．1つの端点を共有する2本の弦の組の個数を a_n，共有点のない2本の弦の組の個数を b_n とするとき，$a_n = b_n$ となるような n の値を求めよ．

入試問題にチャレンジ (12)

生徒14人から2人ずつの組を n 組 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7)$ 作る作り方を S_n とする．

(1) S_n を n の式で表せ．

(2) S_n を最大にする n をすべて求めよ．

(2005・神戸大学)

n 個の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_n から 3 個の点を選び，その 3 点を結んで得られる三角形 T について考える．

ここで，三角形 T の 3 辺のうち，2 辺を選ぶと 1 つの端点を共有する 2 本の弦ができる．

したがって，

$$\begin{aligned} a_n &= {}_n\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_2 \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)(n-2). \end{aligned} \qquad \cdots ①$$

さらに，n 個の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_n から 4 個の点を選び，その 4 点を結んで得られる四角形 S について考える。

ここで，四角形 S において，共有点をもたない 2 辺の組合せは 2 通りある．

したがって，

$$\begin{aligned} b_n &= {}_n\mathrm{C}_4 \times 2 \\ &= \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3). \end{aligned} \qquad \cdots ②$$

①，②より，$a_n = b_n$ が成り立つ条件は，

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2) = \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

なので，$n \geqq 4$ より，

$$n - 3 = 6.$$

よって，求める n の値は，

$$n = 9.$$

入試問題にチャレンジ (12)

生徒14人から2人ずつの組をn組 ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$) 作る作り方をS_nとする.

(1) S_nをnの式で表せ.

(2) S_nを最大にするnをすべて求めよ.

(2005・神戸大学)

(1) S_n の定め方より,

$$\begin{aligned} S_n &= {}_{14}\mathrm{C}_2 \cdot {}_{12}\mathrm{C}_2 \cdots {}_{14-2(n-1)}\mathrm{C}_2 \div n! \\ &= \frac{14 \cdot 13 \cdots (16-2n)(15-2n)}{2^n \cdot n!} \\ &= \frac{14!}{2^n \cdot n!(14-2n)!}. \end{aligned}$$

(2) $I_n = 2^n \cdot n!(14-2n)!$ とすると, (1) の結果より,

$$S_n\text{が最大} \iff I_n\text{ が最小}$$

が成り立つ.

また, $1 \leqq n \leqq 6$ のとき,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= 2^{n+1}(n+1)!(12-2n)! - 2^n \cdot n!(14-2n)! \\ &= 2^n \cdot n!(12-2n)!\{2(n+1) - (14-2n)(13-2n)\} \\ &= 2^n \cdot n!(12-2n)!(-4n^2+56n-180) \\ &= 2^n \cdot n!(12-2n)!\{-4(n-5)(n-9)\} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{cases} 1 \leqq n \leqq 4\text{のとき}, & I_{n+1} - I_n < 0, \\ n = 5\text{のとき}, & I_{n+1} - I_n = 0, \\ n = 6\text{のとき}, & I_{n+1} - I_n > 0. \end{cases}$$

これより,

$$\begin{cases} I_1 > I_2 > I_3 > I_4 > I_5, \\ I_5 = I_6, \\ I_6 < I_7 \end{cases}$$

であるから, I_n は $n=5,\ 6$ のとき, 最小となる.

したがって, S_n を最大にする n の値は,

$$n = 5,\quad 6.$$

第13講　　場合の数(3)

1 二項定理

$(a+b)^n$ を展開することを**二項展開**といい，正の整数 n については，

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

と展開できる．この展開公式を**二項定理**，${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$ を展開式の**一般項**という．係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ は**二項係数**という．

2 多項定理

一般に，$(a+b+c)^n$ を展開したときの項

$$a^p b^q c^r \quad (p+q+r=n)$$

の係数は，

$$\frac{n!}{p!q!r!}$$

3 重複組合せ

異なる n 種類のものから重複を許して r 個取り出す組合せを**重複組合せ**といい，${}_n\mathrm{H}_r$ と書く．ここで，

$$ {}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

が成り立つ．

97 A

$(x+y)^{10}$ の展開式における x^4y^6 の係数を求めよ.

$\boxed{97\text{A}}$ 210

98 A

11^{11} を 100 で割ったときの余りを求めよ.

$\boxed{98\text{A}}$ 11

99 A

等式 $6 \cdot {}_nC_3 - n \cdot {}_nP_2 + 144 = 0$ を満たす 3 以上の整数 n の値を求めよ.

$\boxed{99\text{A}}$ $n = 9$

$${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

100 B

(1) $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$ の展開式における定数項を求めよ．

(2) $(x^2+x+1)^5$ の展開式における x^5 の係数を求めよ．

$\boxed{\text{100B}}$ (1) 60 (2) 51

101 B

次の条件を満たす整数 x，y，z の組は何通りあるか．

(1) $x+y+z=10$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$

(2) $x+y+z=10$，$x>0$，$y>0$，$z>0$

$\boxed{\text{101B}}$ (1) 66 (2) 36

102 B

1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚のカードがある．次の条件を満たすように左から右に n 枚を並べる場合の数を $C(n)$ とする．

(条件) 1 から n までのすべての自然数 k について，左から k 番目に番号 k のカードがこない．

(1) $C(4)$ を求めよ．

(2) $C(6)$ を求めよ．

(3) $n\geqq 3$ を満たす自然数 n に対して，$C(n+2)=(n+1)\{C(n)+C(n+1)\}$ が成り立つことを証明せよ．

$\boxed{\text{102B}}$ (1) $C(4)=9$ (2) $C(6)=265$ (3) 略

2019 年度　FG　数学 IAIIB　【解答】１３講

$\boxed{97A}$　210

【解法】

$\boxed{98A}$　11

【解法】

$\boxed{99A}$　$n=9$

【解法】

$\boxed{100B}$　(1)　60　(2)　51

【解法】

$\boxed{101B}$　(1)　66　(2)　36

【解法】

$\boxed{102B}$　(1)　$C(4)=9$　(2)　$C(6)=265$　(3)　略

【解法】

103 C

(1) $n \geqq 2$，$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき，等式 ${}_n\mathrm{C}_k = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_k$ が成り立つことを証明せよ．

(2) 等式 $k{}_n\mathrm{C}_k = n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$) が成り立つことを証明せよ．

(3) 自然数 n に対して，等式 ${}_n\mathrm{C}_1 + 2\cdot{}_n\mathrm{C}_2 + 3\cdot{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n\cdot{}_n\mathrm{C}_n = 2^{n-1}\cdot n$ が成り立つことを証明せよ．

104 C

自然数 n をそれより小さい自然数の和として表すことを考える．ただし，$1+2+1$ と $1+1+2$ のように和の順序が異なるものは別の表し方とする．例えば，自然数 2 は $1+1$ の 1 通りの表し方ができ，自然数 3 は，

$$2+1, \qquad 1+2, \qquad 1+1+1$$

の 3 通りの表し方ができる．2 以上の自然数 n の表し方は何通りか．

入試問題にチャレンジ (13)

$\left(x - \dfrac{x^2}{2} + y^2 - 2y^3\right)^{10}$ を展開して得られる x，y の多項式について，次数が 12 である項の係数の和を求めよ．

(2009・群馬大学)

13コ♪のあとの補足

第 8 章　二項定理

《学習項目》

・

A問題

〜〜

A 8 - 1

(1) ${}_nC_r + {}_nC_{r+1} = {}_{n+1}C_{r+1}$ を証明せよ。

(2) $k \cdot {}_nC_k = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$ を証明せよ。

A 8 - 2

次の式の展開式における，[　] 内に指定した項の係数を求めよ。

(1) $\left(x^3 + \dfrac{2}{x}\right)^7$ $[x^5]$

(2) $\left(2x^3 - \dfrac{1}{3x^2}\right)^5$ [定数項]

A 8 - 3

$(x - y + 3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の項の係数を求めよ。

A 8 - 4

次の式を簡単にせよ。

(1) ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots\cdots + {}_nC_r + \cdots\cdots + {}_nC_n$

(2) ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots\cdots + (-1)^r {}_nC_r + \cdots\cdots + (-1)^n {}_nC_n$

B問題

B 8 - 1

次の式を簡単にせよ。

(1)　${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_4+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2r}+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$

(2)　${}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+{}_{2n}\mathrm{C}_5+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2r-1}+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$

B 8 - 2

${}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2+3{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n{}_n\mathrm{C}_n$を計算せよ。

B 8 - 3

次の式を計算せよ。　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$

C問題

C 8 - 1

二項定理を用いて，次の不等式が成り立つことを証明せよ。ただし，n は 2 以上の整数とする。

(1)　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>2$

(2)　$(1+x)^n\geqq 1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$　$(x>0)$

二項定理

$(a+b)^n$ を展開したときの一般項は,

$${}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k}$$

ただし, k は $0 \leqq k \leqq n$ なる整数とする。

（注） $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k$ 　と表せる。

［例］ $(a+b)^5$ を展開したときの, a^2b^3 の係数

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

$$\left.\begin{array}{l} aabbb = a^2b^3 \\ ababb = a^2b^3 \\ \quad\vdots \\ bbbaa = a^2b^3 \end{array}\right\} {}_5C_2 \text{ コ}$$

《補足》 $a = x,\ b = 1$ とおくと,

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot x^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot x^k$$

$$\therefore \quad (x+1)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + {}_n\mathrm{C}_3 x^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n x^n$$

多項定理

$(a+b+c)^n$ を展開したときの一般項は,

$$\frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$$

ただし, $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=n & \leftarrow \text{合計}n\text{乗} \\ 0\leqq\alpha,\ \beta,\ \gamma\leqq n & \leftarrow \text{ゼロ乗から}n\text{乗まで}\end{cases}$

【証明】

$$\begin{aligned}(a+b+c)^n &= \{a+(b+c)\}^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^k (b+c)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^k \left(\sum_{l=0}^{n-k} {}_{n-k}\mathrm{C}_l b^l c^{(n-k)-l}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{n-k} {}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_{n-k}\mathrm{C}_l \cdot a^k b^l c^{n-k-l}\right)\end{aligned}$$

ここで, $k=\alpha,\ l=\beta,\ n-k-l=\gamma$ とおくと, $0\leqq k\leqq n,\ 0\leqq l\leqq n-k$ より

$$\alpha+\beta+\gamma=n,\ 0\leqq\alpha,\beta,\gamma\leqq n$$

および,

$$a^k b^l c^{n-k-l} = a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$$

$${}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_{n-k}\mathrm{C}_l = \frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$$

が成り立つので, これで証明できたことになります。■

Ａ８・１　次の等式を証明せよ。

（１）　${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{r}$

（注）　${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$　，　${}_{n}\mathrm{P}_{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

$\boxed{n!=n\cdot(n-1)!}$

${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\cdot\{(n-1)-(r-1)\}!}+\dfrac{(n-1)!}{r!\cdot\{(n-1)-r\}!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\cdot(n-r)!}+\dfrac{(n-1)!}{r!\cdot(n-r-1)!}$

$=\dfrac{r\cdot(n-1)!}{r!\cdot(n-r)!}+\dfrac{(n-r)\cdot(n-1)!}{r!\cdot(n-r)!}$　$\leftarrow(n-r)!=(n-r)\times(n-r-1)!$　，　$r!=r\times(r-1)!$

$=\dfrac{(n-1)!\cdot\{r+(n-r)\}}{r!\cdot(n-r)!}$

$=\dfrac{(n-1)!\cdot n}{r!\cdot(n-r)!}$

$=\dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

$={}_{n}\mathrm{C}_{r}$ ■

Ａ８・４ 次の和を求めよ。

（１）${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$

（２）${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots+(-1)^n\,{}_n\mathrm{C}_n$

［${}_n\mathrm{C}_\blacktriangle$ の和⇒$(x+1)^n$ 利用］

二項定理より

$$(x+1)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\,x+{}_n\mathrm{C}_2\,x^2+{}_n\mathrm{C}_3\,x^3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\,x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n\,x^n\cdots（＊）$$

（＊）に $x=1$ を代入して

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n=(1+1)^n=2^n$$
…(1)の答

（＊）に $x=-1$ を代入して

$${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+(-1)^{n-1}\,{}_n\mathrm{C}_{n-1}+(-1)^n\,{}_n\mathrm{C}_n=(-1+1)^n=0$$

…(2)の答

Ｂ８・１ 次の和を求めよ。

（１） ${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$

（２） ${}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+{}_{2n}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$

［${}_{2n}\mathrm{C}_{\blacktriangle}$の和⇒$(x+1)^{2n}$利用］

二項定理より

$$\underline{(x+1)^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_1x+{}_{2n}\mathrm{C}_2x^2+{}_{2n}\mathrm{C}_3x^3+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}x^{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}x^{2n}}\cdots（＊）$$

（＊）に$x=1$を代入して

$${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}=(1+1)^{2n}=2^{2n}\qquad\cdots①$$

（＊）に$x=-1$を代入して

$${}_{2n}\mathrm{C}_0-{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2-{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots-{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}=(-1+1)^{2n}=0\qquad\cdots②$$

（１）${}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + {}_{2n}\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$ を求める［偶数のみ］

$\{①+②\}\times\dfrac{1}{2}$ より［奇数を消去］

$${}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + {}_{2n}\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} = \frac{1}{2}\times(2^{2n}+0) = \frac{1}{2}\times 2^{2n} = \mathbf{2^{2n-1}} \cdots（答）$$

（２）${}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_3 + {}_{2n}\mathrm{C}_5 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$ を求める［奇数のみ］

$\{①-②\}\times\dfrac{1}{2}$ より［偶数を消去］

$${}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_3 + {}_{2n}\mathrm{C}_5 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1} = \frac{1}{2}\times(2^{2n}-0) = \frac{1}{2}\times 2^{2n} = \mathbf{2^{2n-1}} \cdots（答）$$

Ｂ８・２次の和を求めよ。

（１）$1\cdot {}_n\mathrm{C}_1 + 2\cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 3\cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n\cdot {}_n\mathrm{C}_n$

［${}_n\mathrm{C}_{\blacktriangle}$の和⇒$(x+1)^n$利用］

二項定理より

$$(x+1)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1\,x + {}_n\mathrm{C}_2\,x^2 + {}_n\mathrm{C}_3\,x^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\,x^n \cdots（＊）$$

（１）

（＊）の両辺をxで微分して，

$$n\cdot(x+1)^{n-1} = 0 + {}_n\mathrm{C}_1\cdot 1 + {}_n\mathrm{C}_2\cdot 2x + {}_n\mathrm{C}_3\cdot 3x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\cdot n\,x^{n-1}$$

$x=1$を代入して，

$$n\cdot(1+1)^{n-1} = 0 + {}_n\mathrm{C}_1\cdot 1 + {}_n\mathrm{C}_2\cdot 2\cdot 1 + {}_n\mathrm{C}_3\cdot 3\cdot 1^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\cdot n\cdot 1^{n-1}$$

$$\therefore\quad 1\cdot {}_n\mathrm{C}_1 + 2\cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 3\cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n\cdot {}_n\mathrm{C}_n = \underline{n\cdot 2^{n-1}}$$

Ｂ８・３ 次の和を求めよ。

（２） $\dfrac{{}_n\mathrm{C}_0}{1}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{3}+\cdots+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_n}{n+1}$

（２）

（＊）の両辺を $x=0$ から $x=1$ で定積分して，

$$\int_0^1 (x+1)^n dx$$
$$={}_n\mathrm{C}_0\int_0^1 dx+{}_n\mathrm{C}_1\int_0^1 x dx+{}_n\mathrm{C}_2\int_0^1 x^2 dx+{}_n\mathrm{C}_3\int_0^1 x^3 dx+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\int_0^1 x^n dx$$

$$\left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1={}_n\mathrm{C}_0\left[\frac{x^1}{1}\right]_0^1+{}_n\mathrm{C}_1\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+{}_n\mathrm{C}_2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+{}_n\mathrm{C}_3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\frac{2^{n+1}-1^{n+1}}{n+1}={}_n\mathrm{C}_0\cdot\frac{1}{1}+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{2}+{}_n\mathrm{C}_2\cdot\frac{1}{3}+{}_n\mathrm{C}_3\cdot\frac{1}{4}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore\ \frac{{}_n\mathrm{C}_0}{1}+\frac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{3}+\cdots+\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{n+1}=\underline{\frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$$

$\boxed{\text{A 8 − 1}}$

(1) ${}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$ を証明せよ。

(2) $k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$を証明せよ。

(1)　二項定理により

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_r x^r + {}_n\mathrm{C}_{r+1} x^{r+1} + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$$

よって，$(1+x)^n(1+x)$ の展開式における x^{r+1} の項の係数は

$${}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r+1}$$

また，二項定理により

$$(1+x)^{n+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{n+1}\mathrm{C}_1 x + \cdots\cdots + {}_{n+1}\mathrm{C}_r x^r + {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} x^{r+1} + \cdots\cdots + {}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} x^{n+1}$$

ゆえに，$(1+x)^{n+1}$ の展開式における x^{r+1} の係数は

$${}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$$

$(1+x)^n(1+x) = (1+x)^{n+1}$ であるから，両辺の展開式における x^{r+1} の項の係数は等しい。

よって　　${}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$

チャレ(12).　(2) $n=$　← 区別なし

(1) S_n：生徒14人から2人ずつn組作る方法 $(n=1,2,\cdots,7)$

$$S_n = {}_{14}C_2 \times {}_{12}C_2 \times \cdots \times {}_{14-2(n-1)}C_2 \div n!$$

$$= \frac{14\times13}{2} \times \frac{12\times11}{2} \times \cdots \times \frac{(16-2n)(15-2n)}{2} \times \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{2^n \cdot n!} \times \frac{14\times13\times\cdots\times(15-2n)(14-2n)\times\cdots\times3\times2\times1}{(14-2n)\times\cdots\times3\times2\times1}$$

$$= \frac{14!}{2^n \times n!\,(14-2n)!} \quad \cdots(1)$$

(2) S_nが最大となるのは $n=\boxed{?}$ のとき

数列 $\{S_n\}$ の増減に着目

$\boxed{S_n < S_{n+1}\ (増加)\ となるとき}$

差 $S_{n+1} - S_n > 0$ を計算　　比 $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} > 1$ を計算

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{14!/\{2^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot(14-2(n+1))!\}}{14!/\{2^n\cdot n!\cdot(14-2n)!\}}$$

$$= \frac{2^n \cdot n!\,(14-2n)!}{2^{n+1}(n+1)!\,(12-2n)!}$$

$$= \frac{(14-2n)(13-2n)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{(7-n)(13-2n)}{n+1}$$

$\boxed{(n+1)! = (n+1)\times n!}$

$10! = 10\times 9!$

$S_n < S_{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{(7-n)(13-2n)}{n+1} > 1$

増加

$\Leftrightarrow n^2 - 14n + 45 > 0$

$\Leftrightarrow (n-5)(n-9) > 0$

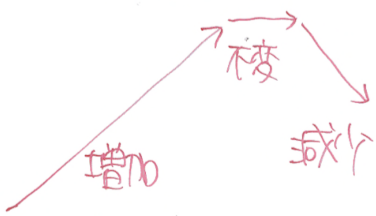
$\Leftrightarrow n<5,\ \cancel{n>9} \Leftrightarrow n=1,2,3,4$

同様に $S_n = S_{n+1} \Leftrightarrow n=5$　不変

$S_n > S_{n+1} \Leftrightarrow n=6$ のみ　減少

よって S_n は $n=\boxed{5,6}$ のときに最大

$S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ S_5 = S_6 > S_7$



((注) 比をとるのは $S_n>0$ だから)

5

13講 二項定理 (22)

$\boxed{97}$ 210

$\boxed{98}$ 11　　$(10+1)^{11} = \cdots + {}_{11}C_0 \cdot 10^0 \cdot 1^0 + 1$（${}_{11}C_0$）

$\boxed{99}$ $n=9$

$\boxed{100}$ (1) 60　(2) 51（3パターン）

Basic Income 1コずつ渡す

$\boxed{101}$ (1) 66　(2) 36 ← 重複組合せ

$\boxed{102}$ (1) 9, (2) 265　$\boxed{\text{テーマ}}$ モンモール数　完全順列　撹乱順列

11^{11} を100でわったあまり（合同式でもよい）

$11^{11} = (10+1)^{11} = \left(10^{11} + {}_{11}C_1 \cdot 10^{10} \cdot 1 + \cdots + 10^2\text{まで}\right)$

$+ {}_{11}C_{10} \cdot 10^1 \times 1^{10} + {}_{11}C_{11} \cdot 10^0 \cdot 1^{11}$

$= 100N + 110 + 1$

$= 100(N+1) + 11$

100でわったあまりは 11

$\boxed{100}$ (2) $(x^2+x+1)^5 \Rightarrow \boxed{?}\,x^5$

2	1	2
1	3	1
0	5	0

$\boxed{{}_5C_2 \times {}_3C_1}(x^2)^2 \cdot x^1 \cdot 1^2$　　$\dfrac{5!}{2!\,1!\,2!}$

$+ \boxed{{}_5C_1 \times {}_4C_3}(x^2)^1 \times x^3 \cdot 1^1$　　$\dfrac{5!}{1!\,3!\,1!}$

$+ \boxed{{}_5C_5}(x^2)^0 \cdot x^5 \cdot 1^0$　　$\dfrac{5!}{0!\,5!\,0!}$

$= (30+20+1)x^5 = 51x^5$

《別》一般項は

$\dfrac{5!}{p!\,q!\,r!}(x^2)^p \times x^q \times 1^r$　　x^{2p+q}

$(p+q+r=5,\ 0 \leqq p, q, r \leqq 5)$

$2p+q=5$ より $(p, q) = (2,1), (1,3), (0,5)$

以下同様

二項定理

$(a+b)^{n}$ $\xrightarrow{\text{展開}}$ $\boxed{{}_nC_k}\,a^k b^{n-k}$

(kは $0\leqq k\leqq n$ の整数)

n個の因数 $(a+b)$ から aを k個えらぶ方法 $\boxed{{}_nC_k}$ 通り

↕

aをk個, bを$(n-k)$個 並べる方法

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

多項定理

$(a+b+c)^{n}$ $\xrightarrow{\text{展開}}$ $\boxed{?}\,a^p b^q c^r$

① = ②

※ (p, q, rは $\begin{cases} p+q+r=n \\ 0\leqq p, q, r\leqq n \end{cases}$ をみたす整数)

n個の因数 $(a+b+c)$ から aをp個, bをq個, cをr個えらぶ方法

$${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_{\underset{r}{n-p-q}}C_r = 1$$

①

aをp個, bをq個, cをr個 並べる方法

(計n個)

② $\dfrac{n!}{p!q!r!}$

《補足》

※は重複組み合わせ。これをみたす (p, q, r) の組は ${}_{n+2}C_2$ 組ある

これは $(a+b+c)^n$ の 展開したときの 同類項の種類 を表す

伏線

補充プリント 二項定理

$\boxed{A84}$ (1) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=\boxed{?}$

(2) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n=\boxed{?}$

${}_nC_\triangle$の和 ⇓ $(x+1)^n$利用

$$(x+1)^{n}=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k x^k={}_nC_0+{}_nC_1 x^1+{}_nC_2 x^2+\cdots+{}_nC_n x^n$$

$x=1$を代入 $2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$

$x=-1$を代入 $0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n$

交代和

$\boxed{B\text{-}8\text{-}1}$ (1) ${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=?$

(2) ${}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=?$

右:偶のみ

右:奇のみ

$2n$ △ ⇓ $(x+1)^{2n}$

$$(x+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}C_k x^k={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1 x^1+{}_{2n}C_2 x^2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}x^{2n}$$

$x=1$代入 ${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n}$ —①

$x=-1$代入 ${}_{2n}C_0-{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2-\cdots-{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}=0$ —②

(1) $\dfrac{①+②}{2}=\dfrac{2^{2n}}{2}=2^{2n-1}$ //

(2) $\dfrac{①-②}{2}=2^{2n-1}$ //

$\boxed{B\text{-}8\text{-}2}$ $\boxed{103}$(3)と同一だが 別解として扱う。

$1\,{}_nC_1+2\,{}_nC_2+3\,{}_nC_3+\cdots+n\,{}_nC_n=\boxed{?}$

$$(x+1)^n={}_nC_0+{}_nC_1 x^1+{}_nC_2 x^2+{}_nC_3 x^3+\cdots+{}_nC_n x^n \quad —※$$

微分

$$n(x+1)^{n-1}={}_nC_1+{}_nC_2\cdot 2x+{}_nC_3\cdot 3x^2+\cdots+{}_nC_n\cdot nx^{n-1}$$

$x=1$代入

$$n\cdot 2^{n-1}={}_nC_1+2\cdot{}_nC_2+3\cdot{}_nC_3+\cdots+n\cdot{}_nC_n$$

(答) //

$\boxed{B\text{-}8\text{-}3}$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{k+1}=\frac{{}_nC_0}{1}+\frac{{}_nC_1}{2}+\frac{{}_nC_2}{3}+\frac{{}_nC_3}{4}+\cdots+\frac{{}_nC_n}{n+1}$$

※を積分 (不定積分 or 定積分 $\boxed{\text{区間は?}}$)

$\leqq x\leqq$

$0\leqq x\leqq 1$

積分区間 $0\leqq x\leqq 1$

$$(\text{左辺})=\int_0^1 (x+1)^n dx=\left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

$$(\text{右辺})=\left[{}_nC_0\cdot x+{}_nC_1\cdot\frac{x^2}{2}+{}_nC_2\cdot\frac{x^3}{3}+\cdots+{}_nC_n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$={}_nC_0+\frac{{}_nC_1}{2}+\frac{{}_nC_2}{3}+\cdots+\frac{{}_nC_n}{n+1}$$

より与式は

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$ //

フジテキ 103

(1) ${}_nC_k = {}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k$ を証明

$\boxed{n \times (n-1)! = n!}$

$10 \times 9! \quad 10!$

(左辺): $\boxed{{}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$ 公式

(右辺) ${}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

くくる

$$= \boxed{\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}} \times \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \times \frac{n}{k(n-k)}$$

$$= \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$ より

成立

《補足》 $\boxed{{}_nC_k = {}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k}$

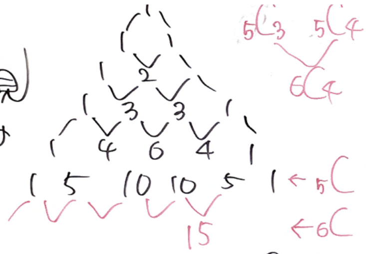
① Pascalの三角形の中に出現

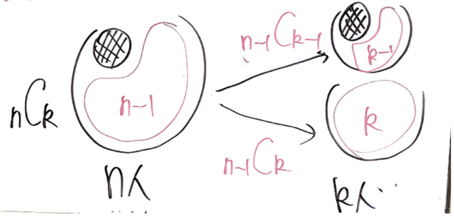
$(x+1)^n$ の係数を並べたもの

② 意味を考えれば明らか

好きな人はいますか？

含まれて



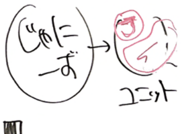


(2) $k \cdot {}_nC_k = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$ を証明 $\begin{pmatrix} n \geq 1 \\ k \geq 1 \end{pmatrix}$

$$(\text{左辺}) = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}$$

$$(\text{右辺}) = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$ ▥

Tokio



《補足》 $\boxed{k \cdot {}_nC_k = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}}$

(代表1人を含む k人のメンバー)

意味 ＝ 代表者つき. 組み合わせ

(左辺) $= {}_nC_k \times {}_kC_1$ 　先 メンバ　後 リーダー

(右辺) $= {}_nC_1 \times {}_{n-1}C_{k-1}$ 　先 リーダー　後 メンバー

(3) ${}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_2 + 3 \cdot {}_nC_3 + \cdots + n \cdot {}_nC_n = 2^{n-1} \cdot n$ を証明 → (別) 微分利

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_nC_k \quad \leftarrow (2)\text{利用}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$$

古い k $$= n \cdot \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1}$$ ズレ

$$= n \cdot \sum_{l=1}^{n} {}_{n-1}C_l \quad \leftarrow \left(\begin{array}{l} l = k-1 \\ \text{代入} \end{array}\right.$$

新しい k $$= n \cdot \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_{k-1}}$$

$(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k x^k$ 利用

ズレ

$x = 1$ 代入

$$2^{n-1} = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k}$$

よって

(左辺) $= n \cdot 2^{n-1}$ ▥