4/9

$\boxed{\text{テスト}}$ （・原則1回 ・60分）

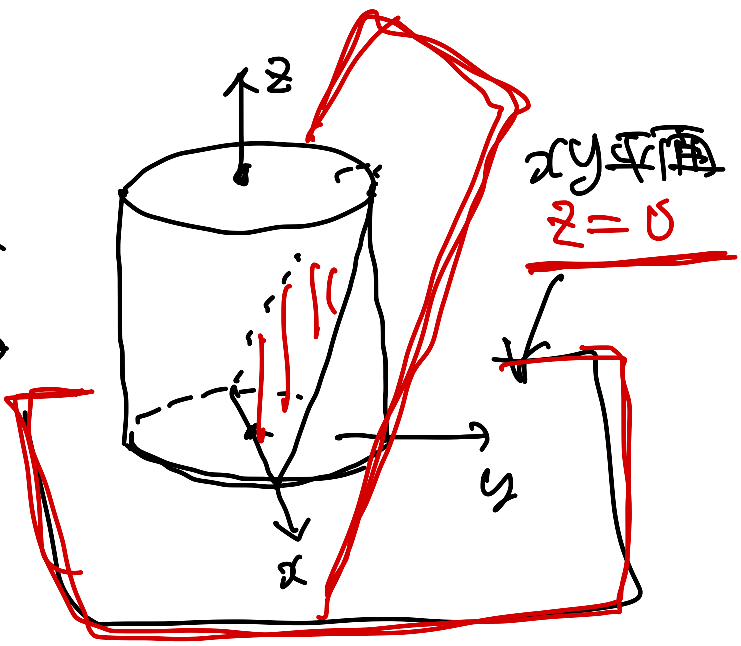
- $\boxed{\text{B-33-13}}$ x軸 version, ごやる.
- $\boxed{\text{C-33}}$ つづき
- ネコ CAFE

Topic, さとこ, ネコ派に寝返る?!!

B-33-13

凍らせる

起こす



(このままだとタイヘン)

推奨 xyz空間内で

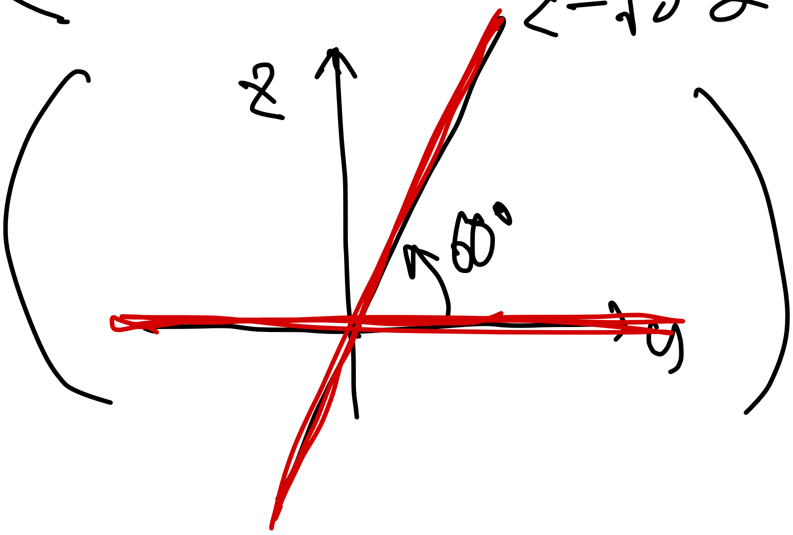
$r=10$とおく

$$x^2+y^2 \leqq r^2$$ (円柱)を表す

[xy平面だと円板]

$$0 \leqq z \leqq \sqrt{3}y$$ (二平面の間)で表す

$z=\sqrt{3}y$



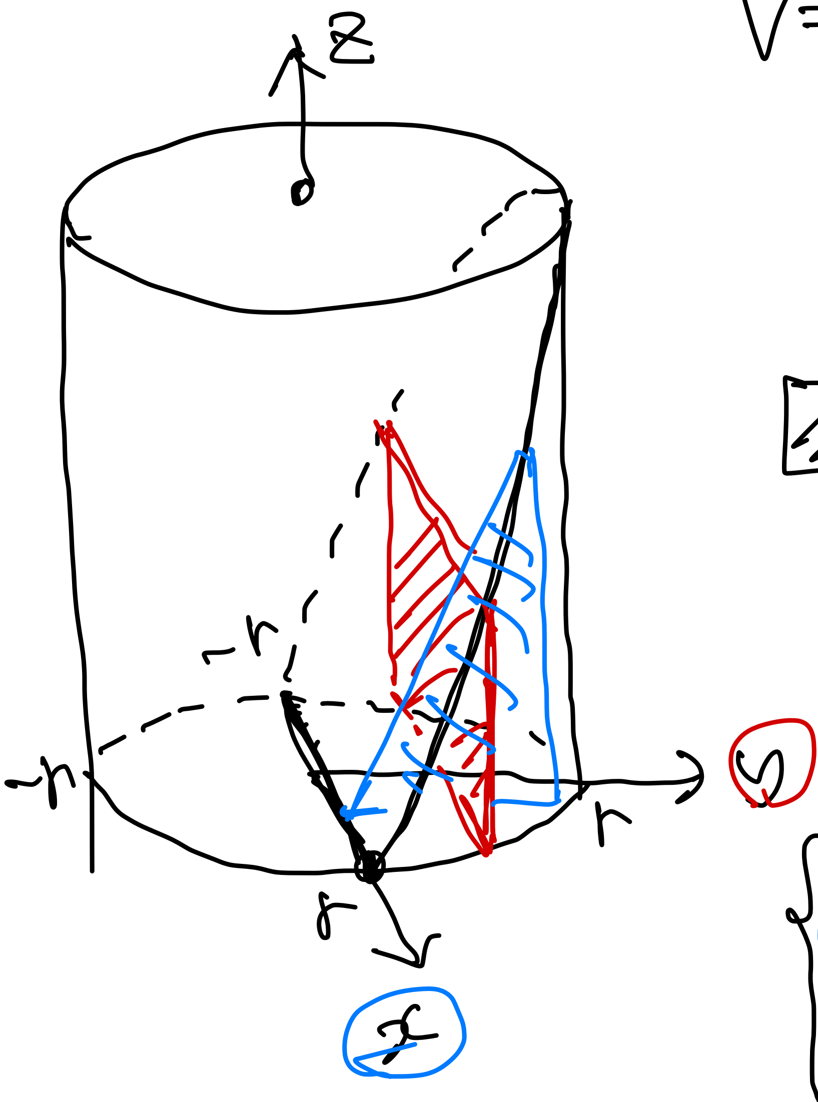
前から

xyz空間内で $(r=10)$

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq r^2 \\ 0 \leqq z \leqq \sqrt{3}\,y \end{cases}$$

で表される立体の体積Vを求めよ

と問われることもある.



$$V=\int_a^b \underbrace{S(t)}_{\text{断面積}}\,d\underbrace{t}_{\text{垂直方向}}$$

$\Downarrow$

$\boxed{}$ 軸に垂直な平面で切る

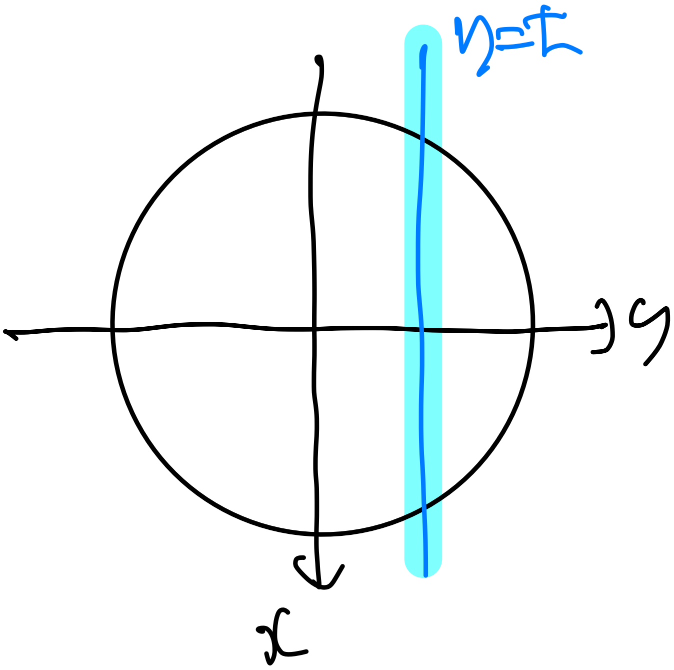
~~$\boxed{z} \Longrightarrow$~~

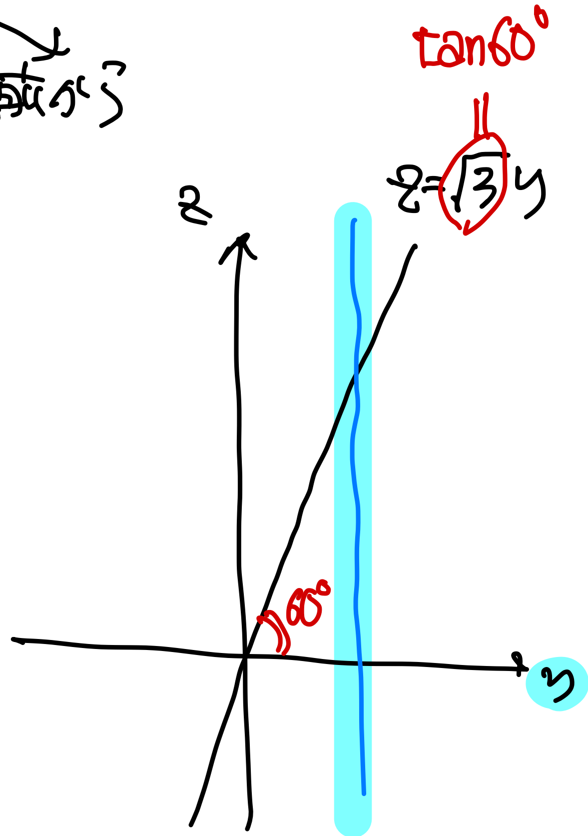
$\boxed{x} \Longrightarrow$ 直角△

$\boxed{y} \Longrightarrow$ 長方形

$\boxed{4}$ 平面 $y=t$ で切り、
断面積 $S(t)$ を求める

上から　　　　前から





ヨコ $2\sqrt{r^2-t^2}$　　　タテ $\sqrt{3}t$

$\boxed{\text{断面積}}$ $S(t)=2\sqrt{r^2-t^2}\times\sqrt{3}t$　　$r=10$

$=2\sqrt{3}\cdot t\sqrt{r^2-t^2}$

求める体積Vは ($0\leqq t\leqq r$ より)

$V=\int_0^r S(t)\,dt$

$$V = 2\sqrt{3}\int_0^{r} \underbrace{t}_{1次}\sqrt{\underbrace{r^2 - t^2}_{2次}}\,dt \quad (r=10)$$

$$2\sqrt{3}\int_0^{10} \underbrace{t}_{1次}\sqrt{\underbrace{100 - t^2}_{2次}}\,dt$$

上半円

$y = \sqrt{r^2 - t^2}$ 型

$\Rightarrow t = r\cdot\sin\theta$

$$\begin{cases} t: 0 \longrightarrow r \\ \sin\theta: 0 \longrightarrow 1 \\ \theta: 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = r\cdot\cos\theta$$

$$V = 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cdot\sin\theta \times \sqrt{r^2(1-\sin^2\theta)} \times r\cos\theta\, d\theta$$

$1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$

$$= 2\sqrt{3}r^3 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin\theta}_{f'} \cos^{2}\theta\, d\theta$$

$$\begin{cases} u = \cos\theta \\ \dfrac{du}{d\theta} = -\sin\theta \\ \sin\theta\, d\theta = -du \end{cases} \quad \begin{cases} \theta: 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2} \\ u: 1 \longrightarrow 0 \end{cases}$$

$$V = 2\sqrt{3}r^3 \cdot \int_1^0 u^2\cdot(-du)$$

$$= 2\sqrt{3}r^3 \cdot \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}r^3 = \frac{2000\sqrt{3}}{3}$$

$u = \underbrace{r^2 - t^2}_{2次式}$ とおく

$$\frac{du}{dt} = -2\underbrace{t}_{1次}\, dt \qquad \begin{cases} t: 0 \to r \\ u: r^2 \to 0 \end{cases}$$

$$t\cdot dt = -\frac{1}{2}du$$

$$V = 2\sqrt{3}\int_{r^2}^{0} \sqrt{u} \times \left(-\frac{1}{2}du\right)$$

$$= \sqrt{3}\int_0^{r^2} u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \sqrt{3}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{r^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(r^3 - 0^3\right) \leftarrow r=10$$

$$= \frac{2000\sqrt{3}}{3}$$

《解説》 $r=10$

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq r^2 \\ 0 \leqq z \leqq \sqrt{3}y \end{cases}$$ を表わす

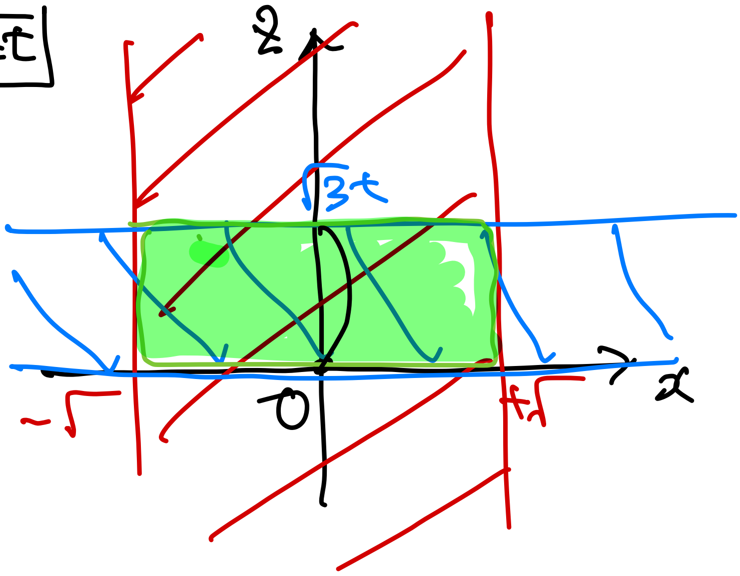
変 定
$y=t$ で切る

$x^2 \leqq r^2-t^2$

$r=10$

$$\begin{cases} -\sqrt{r^2-t^2} \leqq x \leqq \sqrt{r^2-t^2} & \text{—— ①} \\ 0 \leqq z \leqq \sqrt{3}t & \text{—— ②} \end{cases}$$

$\boxed{y=t}$



断面積 $S(t)=2\sqrt{r^2-t^2} \times \sqrt{3}t$
ヨコ タテ

不等式で表してから解く
のも有効

$\boxed{\text{C-33-1}}$

$5x^2+2xy+y^2=16$ ← $y=f(x)$型でない 陰関数

$y=f(x)$型に直す

$(y+x)^2 = 16-4x^2$

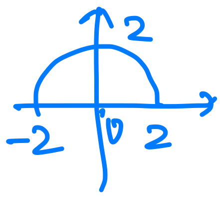
平方完成

$y+x = \pm\sqrt{4(4-x^2)}$

解の公式

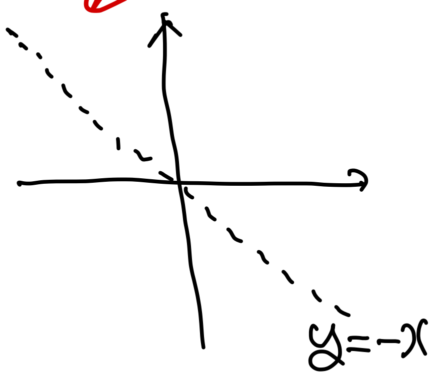
$\therefore\ y = -x \pm 2\sqrt{4-x^2}$

$y=\sqrt{4-x^2}$

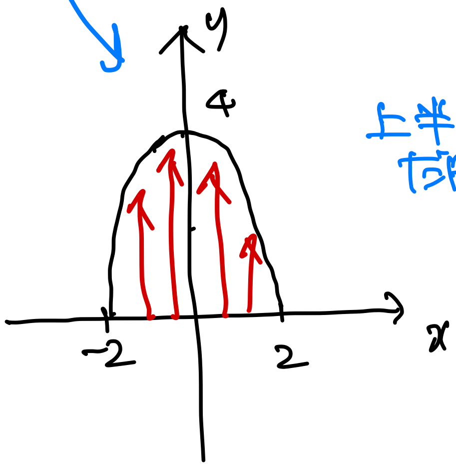


考察

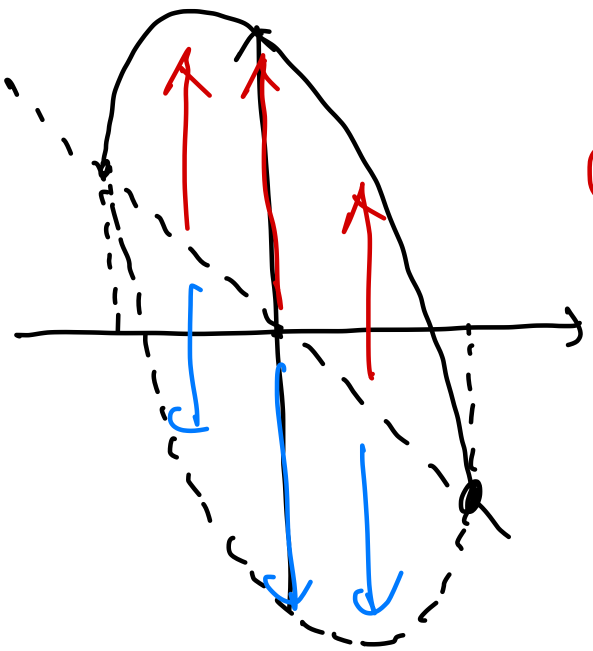
$y=-x$ に $y=2\sqrt{4-x^2}$ をのせる たす.



+



上半楕円



のせる

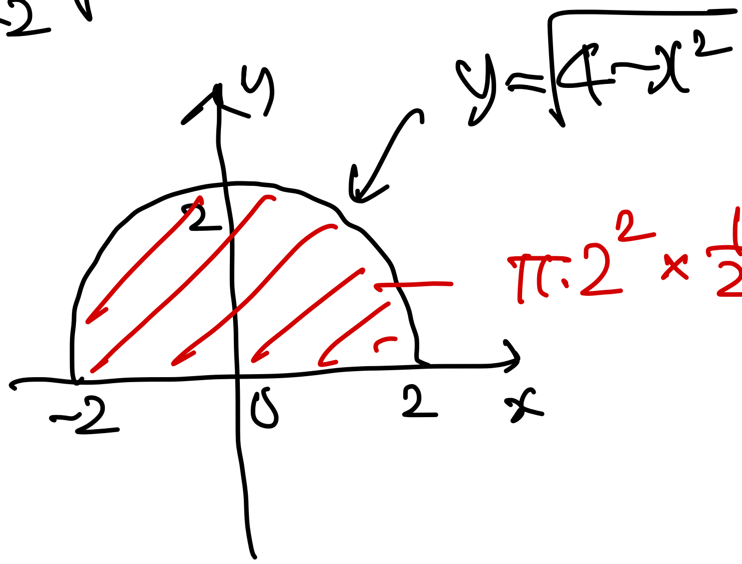
けある

⋮ 中略

$$S = 2\int_{-2}^{2}\sqrt{4(4-x^2)}\,dx \quad \leftarrow \text{上半楕円}$$

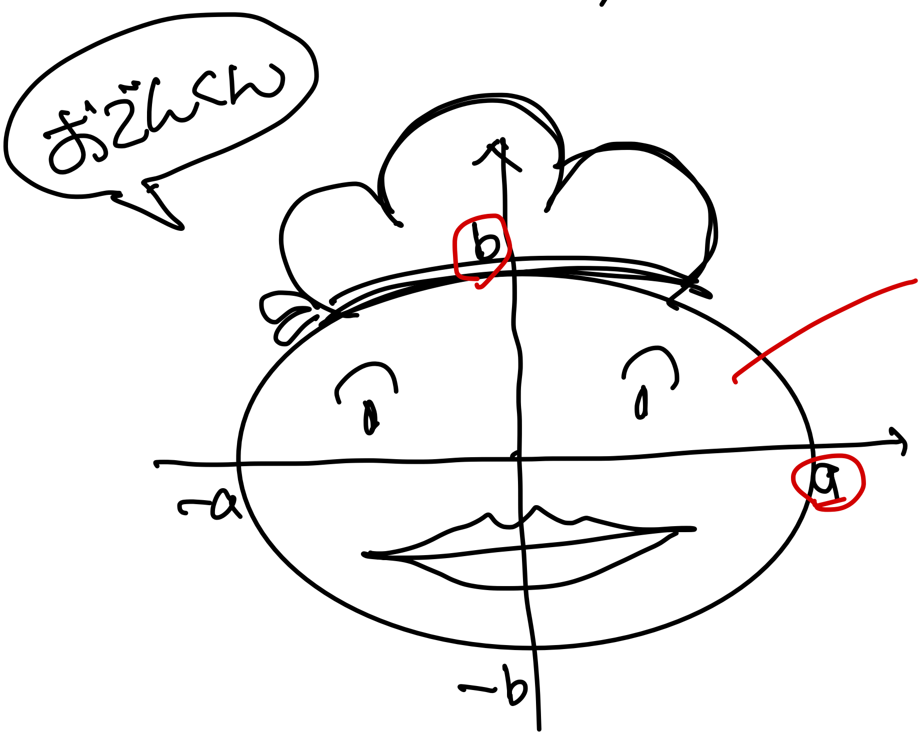
$$= 4\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx \quad \leftarrow \text{上半円}$$

$$= 4 \times$$



$$\pi \cdot 2^2 \times \frac{1}{2} = 2\pi$$

$$= \underline{8\pi}$$



面積 $\boxed{\pi ab}$

(i) (ii) (iii) より

(i) (iii) (ii)

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$\log\frac{e+1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(a)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$F(a)$	↘		↘		↗		↗

恒等式 ⇒ 係数比較 or 数値代入

①**1-A-8**

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$x^3+1=(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c$

(2)　$\dfrac{1}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

解1．展開して係数比較

解2　$t=x-2$ とおきかえ

解3．数値代入

$x=2$ 代入　　$a=c$

$x=3$ 代入　　$28=1+a+b+c$

$\therefore a+b=18$

$x=1$ 代入　　$2=-1+a-b+c$

$\therefore a-b=-6$

⋮

B 問題

①**1-B-1**

次の式を因数分解せよ。

(1) $a^2-b^2+2bc-c^2$　(2) $-x^3+4x^2+4x-1$

(3) $x^4+x^3y-xy^3-y^4$　(4) $x^2+4xy+4y^2-x-2y-2$

(5) x^4+4　(6) x^4+3x^2+4

解答

(7) $(a+b-c)(a-b+c)$

(8) $-(x+1)(x^2-5x+1)$

(9) $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

(10) $(x+2y+1)(x+2y-2)$

(11) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

(12) $(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

①**1-B-2**

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+2xy-3y^2-4x-4y+4$　(2) $2x^2-7xy+3y^2-5x+10y+3$

(3) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$　(4) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

(5) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$　(6) $x^4+x^2y^2+y^4$

解答

(1) $(x+3y-2)(x-y-2)$

(2) $(2x-y-3)(x-3y-1)$

(3) $-(a-b)(b-c)(c-a)$

(4) $(a+b)(b+c)(c+a)$

(5) $3(a-b)(b-c)(c-a)$

(6) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

(1) $x^2+(2y-4)x-(3y-2)(y+2)$
$=(x+3y-2)(x-y-2)$

(2) $2x^2-(7y+5)x+(3y+1)(y+3)$
$=(2x-y-3)(x-3y-1)$

(3) $a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$
$=(a-b)(b-c)(a-c)$
$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

(4) $a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$
$=(a+b)(b+c)(c+a)$

(5) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+b^3-3b^2c+3bc^2$
$-c^3+c^3-3c^2a+3ca^2-a^3$
$=3\{a^2(c-b)-a(c^2-b^2)+bc(c-b)\}$
$=3(c-b)\{a^2-a(c+b)+bc\}$
$=3(a-b)(b-c)(c-a)$

(6) $x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$
$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

①**1-B-3**

次の不等式を解け

(1) $|3x-4|<2x$　(2) $3|x-1|\geq x+3$　(3) $3|x-2|-2|x|\leq 3$

解答　(1) $\dfrac{4}{5}<x<4$　(2) $x\leqq 0,\ 3\leqq x$　(3) $\dfrac{3}{5}\leqq x\leqq 9$

①**1-B-4**

次の式を簡単にせよ。

(1)　$\sqrt{8+\sqrt{48}}$　　　(2)　$\sqrt{5-\sqrt{21}}$

解答　(1)　$\sqrt{6}+\sqrt{2}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{6}}{2}$

①**1-B-5**

$x^2-3x+7=0$ の 2 つの解 α, β に対して，$(\alpha^2+3\alpha+7)(\beta^2-\beta+7)$ の値を求めよ。

解答　$(\alpha^2+3\alpha+7)(\beta^2-\beta+7)=84$　　おまけ　$\alpha^2+\beta^2=-5$，$\alpha^4+\beta^4=-73$，

①**1-B-6**

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$ のとき，$x^3+\dfrac{1}{x^3}$ と $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ の値を求めよ。

解答　順に ±18, ±123

(2)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$ の両辺に 2 を加えて，

$x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=9$ より $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=9$ から，

$x+\dfrac{1}{x}=\pm3$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\pm18$

$x^5+\dfrac{1}{x^5}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=7\times(\pm18)-(\pm3)=\pm123$

①**1-B-7**

方程式 $2x^3-5x^2+8x-3=0$ を解け。

解答　$x=\dfrac{1}{2}, 1\pm\sqrt{2}\,i$

$P(x)=2x^3-5x^2+8x-3$ とおくと，

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^3-5\left(\frac{1}{2}\right)^2+8\left(\frac{1}{2}\right)-3=0$$

であるから，因数定理より，$P(x)$ は $x-\dfrac{1}{2}$ で割り切れる。

すなわち，$P(x)$ は $2x-1$ で割り切れるので，

割り算を実行すると，

$$P(x)=(2x-1)(x^2-2x+3)$$

したがって，与えられた方程式は，

$$(2x-1)(x^2-2x+3)=0$$

より，$2x-1=0$　または　$x^2-2x+3=0$

よって，$x=\dfrac{1}{2}$，$1\pm\sqrt{2}\,i$　……(答)

①**1-B-8**

x についての方程式 $x^3-(2a-1)x^2-2(a-1)x-4a=0$ を解け。

解答　$x=2a, \dfrac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$

左辺を a について整理すると，

$$(-2x^2-2x-4)a+(x^3+x^2+2x)=0$$
$$-2(x^2+x+2)a+x(x^2+x+2)=0$$
$$(x-2a)(x^2+x+2)=0$$

より，$x-2a=0$　または　$x^2+x+2=0$

よって，$x=2a,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$　……(答)

相反方程式

①**1-B-9** 方程式 $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$ を解け。

解答　$t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと，$t^2-7t+12=0$　より $t=3,\ 4$ よって $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ 2\pm\sqrt{3}$

2次の ~~実数解条件 ⇒ 判別式~~

⇓

判別式は $\boxed{\text{実数係数}}$ のとき

にしか使っちゃダメ。

①**1-B-10**

a を実数とするとき，x についての２次方程式

$$3x^2+\{2a-5+5(2a-1)i\}x-1+(2a^2-a)i=0$$

が実数解をもつための（a の満たす）条件を求めよ。

解答　$a=\dfrac{1}{2}$

実数解 t をもつとき，$x=t$ を代入して i で整理すると，

$$\{3t^2+(2a-5)t-1\}+\{5(2a-1)t+2a^2-a\}i=0$$

$a,\ t$ が実数より，

$$\begin{cases} 3t^2+(2a-5)t-1=0 \cdots\cdots ① \\ 5(2a-1)t+2a^2-a=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②より，$(2a-1)(5t+a)=0$

(i)　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，①に代入して

$3t^2-4t-1=0$ より，$t=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

(ii)　$t=-\dfrac{a}{5}$ のとき，①に代入して

$7a^2-25a+25=0$

この判別式は，$D=25^2-4\cdot7\cdot25=-75<0$

より，実数解をもたない。

以上から，求める a の条件は $a=\dfrac{1}{2}$

①**1-B-11**

３次方程式 $x^3+(2a-1)x^2-(3a-2)x+a-2=0$ がある。次の各場合に対して，実数 a の条件を求めよ。

(1)　与えられた方程式が３個の異なる実数解をもつ。

(2)　与えられた方程式がちょうど２個の異なる実数解をもつ。

解答　(1) $a<-3,\ -3<a<-2,\ 1<a$　(2) $a=-3,\ -2,\ 1$

①**1-B-11**　$(\quad)\times(\quad)(\quad)=0$

3次方程式 $x^3+(2a-1)x^2-(3a-2)x+a-2=0$ がある。次の各場合に対して，実数 a の条件を求めよ。

(1)　与えられた方程式が3個の異なる実数解をもつ。

(2)　与えられた方程式がちょうど2個の異なる実数解をもつ。

$$\boxed{(x-1)}(x^2+2ax-a+2)=0$$

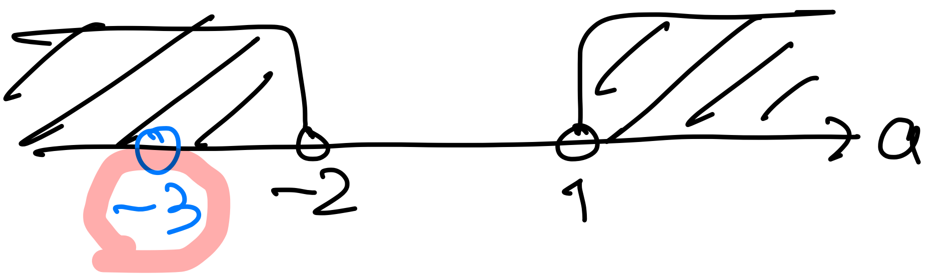
$x=1$　または，$x^2+2ax-a+2=0$ —— ※

1つ確定

※の判別式 $D>0$ より $a<-2,\ a>1$ —— ~~※~~

※が $x=1$ を解にもつとき不適

$a=-3$ は NG



$a<-3,\ -3<a<-2,\ 1<a$

$$x^3+(2a-1)x^2-(3a-2)x+a-2=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$P(x)=x^3+(2a-1)x^2-(3a-2)x+a-2$ とおくと，

$P(1)=0$ であるから，因数定理により，

$$P(x)=(x-1)(x^2+2ax-a+2)$$

したがって，①は，

$$(x-1)(x^2+2ax-a+2)=0$$

となるので，

$$x=1 \quad \text{または} \quad x^2+2ax-a+2=0 \quad \cdots\cdots ②$$

(1) 与えられた方程式の異なる実数解が 3 個となるのは，②が異なる 2 個の実数解をもち，$x=1$ が②の解でないときである。②の判別式を D とすれば，

$\dfrac{D}{4}=a^2-(-a+2)>0$ より，

$(a+2)(a-1)>0$

$a<-2,\ 1<a \quad \cdots\cdots ③$

$x=1$ が②の解でないことより，

$1+2a-a+2 \neq 0$

$a \neq -3$

以上より，$a<-3,\ -3<a<-2,\ 1<a \quad \cdots\cdots$(答)

(2) 与えられた方程式の異なる実数解がちょうど 2 個となるのは，

(i) ②が異なる 2 個の実数解をもち，一方が $x=1$

(ii) ②が $x=1$ でない重解をもつ

のいずれかの場合である。

(i)のとき，②が異なる 2 個の実数解をもつので，

③より，$a<-2,\ 1<a$

$x=1$ が②の解より，

$1+2a-a+2=0$

$a=-3$

これは，③に適する。

(ii)のとき，②が重解をもつので，

$\dfrac{D}{4}=a^2-(-a+2)=0$ より，

$(a+2)(a-1)=0$

$a=-2,\ 1 \quad \cdots\cdots ④$

$x=1$ が②の解でないことより，

$1+2a-a+2 \neq 0$

$a \neq -3$

④はこれを満たす。

以上，(i)，(ii)より，$a=-3,\ -2,\ 1 \quad \cdots\cdots$(答)

①**1-B-12**

3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-4=0$ の 1 つの解が $1+i$ であるとき，実数の係数 a, b を求めよ。

解 答　$a=-4, b=6$

ＫＫＫ

(2) 他の 2 解を $1-i$，α とすると解と係数の関係より $(1+i)+(1-i)+\alpha=-a$

$(1+i)\alpha+(1-i)\alpha+(1+i)(1-i)=b$，$(1+i)(1-i)\alpha=4$ を解いて，$\boldsymbol{a=-4}$，$\boldsymbol{b=6}$

共役解

①**1-B-13**

次の最小値を求めよ。

(1)　$x>0$ のとき $x+\dfrac{3}{x}$ の最小値　　(2)　$x>2$ のとき $x+\dfrac{4}{x-2}$ の最小値

解答　(1)　$x=\sqrt{3}$ のとき最小値 $2\sqrt{3}$　　(2)　$x=4$ のとき最小値 6

①**1-B-14**

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}\,i}{2} \text{ のとき，} 4x^3+2x^2+6x+3 \text{ の値を求めよ。}$$

解 答　$\boldsymbol{5+\sqrt{5}\,i}$

BASIC問題篇

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (x+1)^5 dx$　　(2) $\displaystyle\int (2x-1)^4 dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+2}dx$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x+3}\,dx$　　(5) $\displaystyle\int \sin\frac{5}{6}\pi x\,dx$　　(6) $\displaystyle\int \cos(4x-1)\,dx$

(7) $\displaystyle\int e^{2x+3}dx$　　(8) $\displaystyle\int 2^{7x+5}dx$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$　　(1) $\displaystyle\int \cos x(2+\tan x)\,dx$

$\boxed{4}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin x\cos 4x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin 2x\sin 4x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \cos 3x\cos 5x\,dx$

改・数学③第６回テスト　　数III積分

$\boxed{5}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+5)}$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9}$　　(3) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(2x-1)}dx$

$\boxed{6}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

$\boxed{7}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\cos x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int x\log x\, dx$　　(3) $\displaystyle\int te^{2t}dt$

$\boxed{8}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}}\sqrt{25-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$　　★(3) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx$

$\boxed{9}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{1}{3x^2+12}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$

$\boxed{10}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4\sqrt{2-\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ.

実戦問題篇

11 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\sin 2x\,dx$　(2) $\int x^2\log x\,dx$　(3) $\int \log(x+2)\,dx$　(4) $\int x^2 e^x dx$

12 次の定積分を求めよ。

$$\int_1^4 \frac{dx}{x^2-2x+4}$$

13 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} x^2|\sin x|\,dx$$