# 4/22

つみのこし

宿 ・ ちゃちゃちゃ① 2章AB, 3章AB

---

宿 ・ 毎回テストあるよー (単語テスト)

宿 タテプリ $\boxed{C-33-5}$ , $\boxed{33-7}$ ~

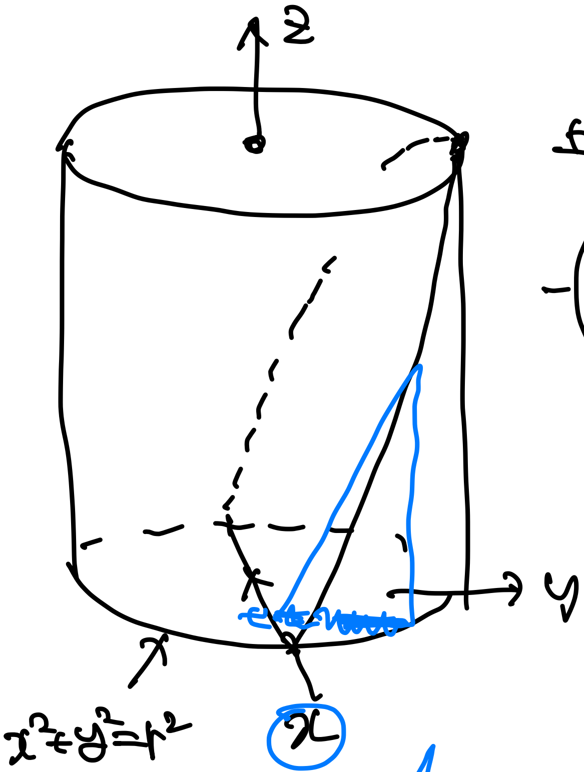
宿 ・ 道具箱 つづき 1個だけ Max.min

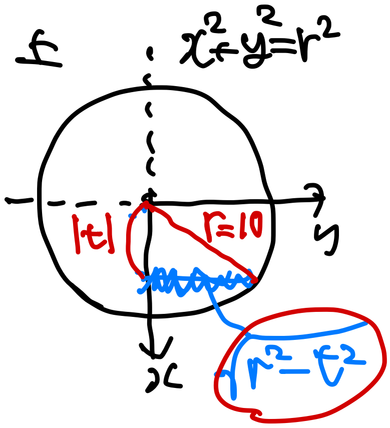
- - - - - - - - - - - - - - -

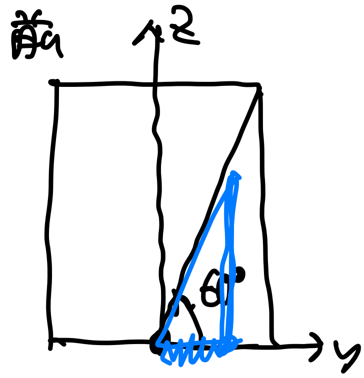
学校の 数列の極限 あたり. やっとく.

B-33-13

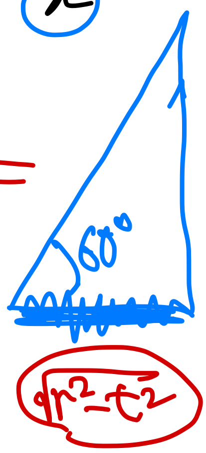
[ $r=10$ とおく ] 余裕あれば




$x$軸に垂直な平面 $x=t$ で切る
断面積 $S(t)$ を求める。
を求積分すると体積 $V$

$S(t)=$  $=$

基本

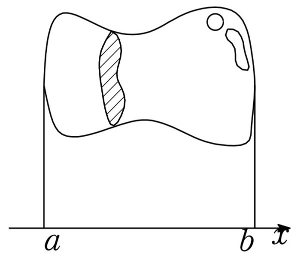
**非回転体体積（$x$ 軸）** $x=t$

Step I $x$ 軸に垂直に切る

Step II 切り口の断面積 $S(x)$ を $x$ で表す。

Step III それを積分すれば体積 $V$

$$V=\int_a^b S(x)\,dx$$




断面積を垂直方向に積分すると体積

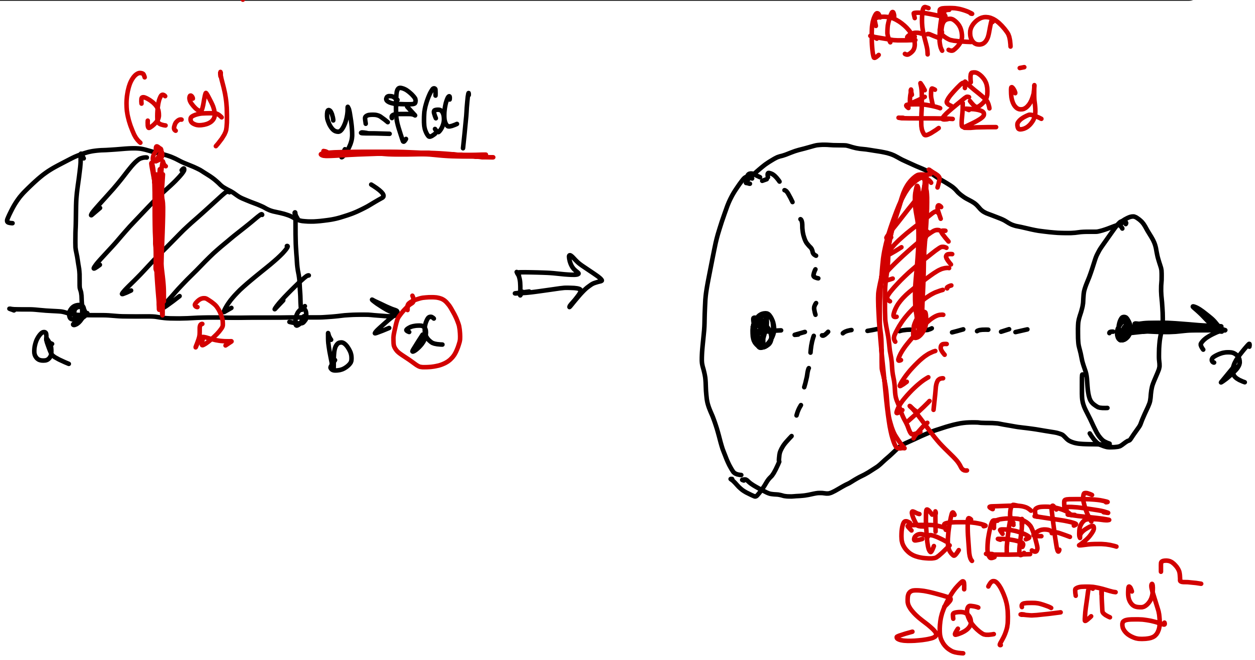
応用

**$x$ 軸回転体体積**

$y=f(x)$ と $x$ 軸の間（$a \leqq x \leqq b$）の部分を

$x$ 軸の周りに回転してできる体積 $V_x$ は，

$$V_x=\int_a^b \pi y^2\,dx$$




回転体でなければ当然

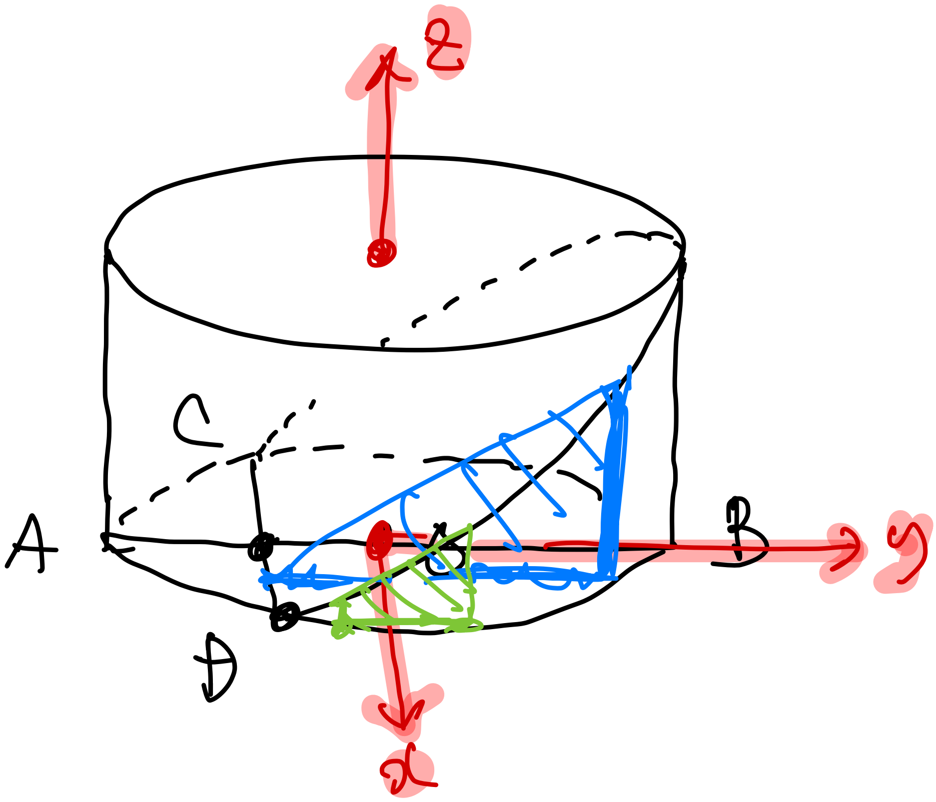
断面は円柱とは限らない

$$V = \int_{-r}^{r} S(t)\,dt \qquad S(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}(r^2 - x^2)$$

$$= 2\cdot\int_{0}^{r} S(t)\,dt$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{2r^3}{3} = \frac{2000\sqrt{3}}{3}$$

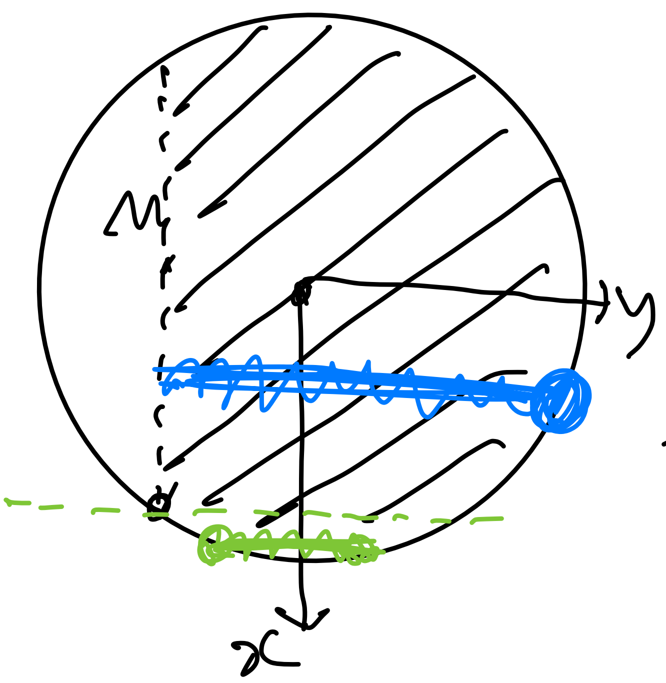


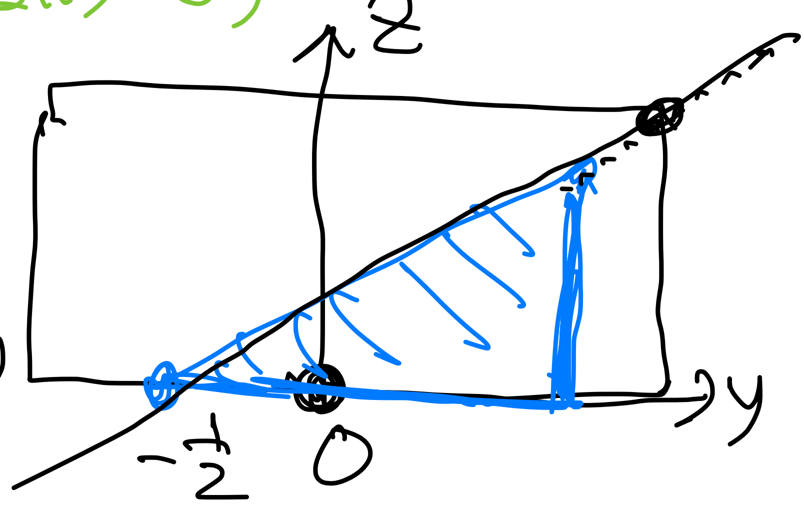

$\boxed{2}$ 軸に垂直な平面で切る

~~z軸だと~~ カツオ

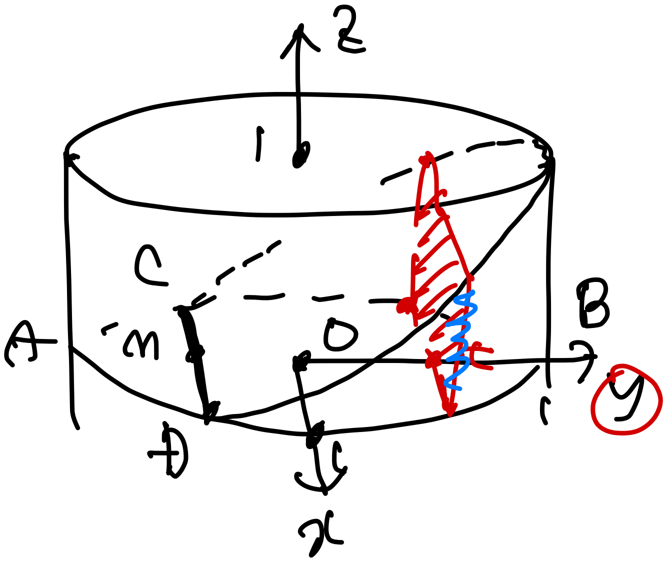
y軸だと 長方形 (必ず)

x軸だと 直角△ とは限らない $x=t$
(台形かも)



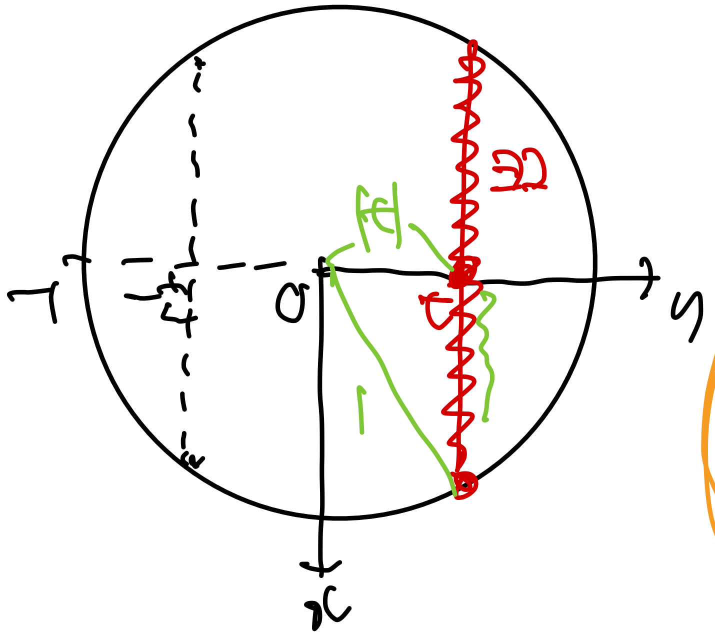



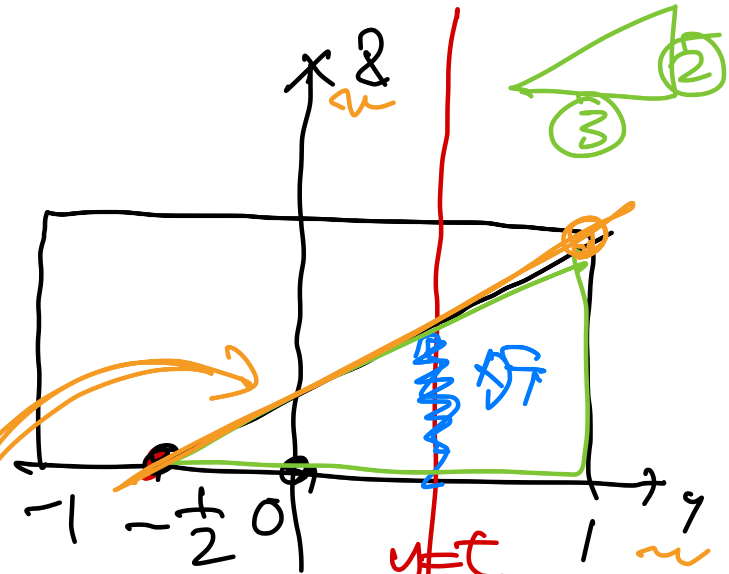
$\boxed{結論}$ y軸に垂直な平面で切るのがよい。




y軸に垂直な平面 $y=t$ である。

切り口の断面積を $S(t)$ とすると、




分子 相似(略) OR 計算

弦 $2\sqrt{1-t^2}$

分子 $z=\frac{2}{3}\left(y+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{3}(2t+1)$

断面積 $S(t)=\frac{2}{3}(2t+1)\sqrt{1-t^2}$

体積Vは　$\left(-\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \text{ より}\right)$

$$V=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} S(t)\,dt$$

実は、前回の差異

$$=\frac{2}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{1} (2t+1)\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(2t\sqrt{1-t^2}+\sqrt{1-t^2}\right)dt$$

$$V=\frac{2}{3}(I+J)$$

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} 2t\sqrt{1-t^2}\,dt \,,\quad J=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt$$ とおく

$\sqrt{\phantom{x}} \Rightarrow$
① $(\ )^{\frac{1}{2}}$ とみなす
② $\underbrace{\sqrt{r^2-x^2}}_{y}$ なら　$x=\boxed{r\cdot\sin\theta}$

円

$\int f^{\frac{1}{2}} \times f'$ にもちこむ

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} 2t\sqrt{1-t^2}\,dt$$

[解1] $u=1-t^2$ とおく

$$\frac{du}{dt}=-2t$$

$$\therefore\ \underline{2t\cdot dt}=-du$$

$\vdots$

$$\int t^{\frac{1}{2}}\times t^{0}=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$$

[解2]

$$I=-\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\times(-2t)\,dt$$

$$=-\left[\frac{2}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

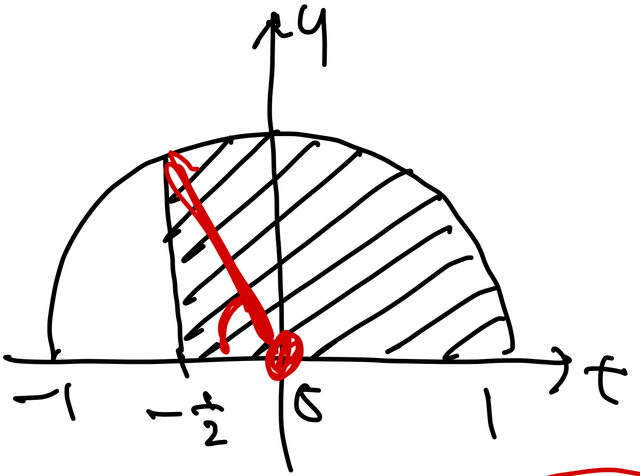
$$=\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

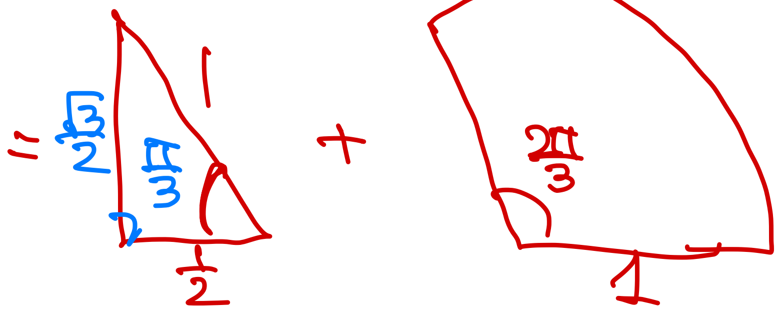
$$\boxed{\int t^{\frac{1}{2}}\times t^{0}=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}$$

$$J=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\underbrace{\sqrt{1-t^2}}_{y}\,dt \qquad \boxed{\text{上半円}}$$

［解1］ $t=\sin\theta$ でチカン

［解2］ 円の面積利用




$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi\cdot1^2\times\frac{1}{3}=\underline{\frac{\sqrt{8}}{3}+\frac{\pi}{3}}$$

二重根号 $(a>b)$

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

㊟

算出 $\sqrt{\ }$ 内は $(\quad)^2$ をつくる

$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$ ⇒ 右① をつくる

$$= \sqrt{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$= \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

予 $= \sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}$

$$= \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}$$

$$= \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

公式

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

別解　空らんを文字でおく.

小　中　大

$$\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$ とおく

2乗

左 $= 10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$

右 $= a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}$

$a \leqq b \leqq c$ より　$ab \leqq ac \leqq bc$

両辺を比較して

$$\begin{cases} ab=6 \\ ac=10 \\ bc=15 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=5 \end{cases}$$

## BASIC問題篇

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$

2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (x+1)^5 dx$　(2) $\displaystyle\int (2x-1)^4 dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+2}dx$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x+3}\,dx$　(5) $\displaystyle\int \sin\frac{5}{6}\pi x\,dx$　(6) $\displaystyle\int \cos(4x-1)\,dx$

(7) $\displaystyle\int e^{2x+3}dx$　(8) $\displaystyle\int 2^{7x+5}dx$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$　　(1) $\displaystyle\int \cos x(2+\tan x)\,dx$

$\boxed{4}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin x\cos 4x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin 2x\sin 4x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \cos 3x\cos 5x\,dx$

$\boxed{5}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+5)}$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9}$　　(3) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(2x-1)}dx$

$\boxed{6}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

$\boxed{7}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\cos x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int x\log x\, dx$　　(3) $\displaystyle\int te^{2t}dt$

$\boxed{8}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}}\sqrt{25-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$　　★(3) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx$

$\boxed{9}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{1}{3x^2+12}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$

$\boxed{10}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4\sqrt{2-\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ.

# 改・数学③第６回テスト　　数III積分　　5 / 6

## 実戦問題篇

**11** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx$　(2) $\displaystyle\int x^2\log x\,dx$　(3) $\displaystyle\int \log(x+2)\,dx$　(4) $\displaystyle\int x^2e^x dx$

**12** 次の定積分を求めよ。

$$\int_1^4 \frac{dx}{x^2-2x+4}$$

**13** 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} x^2|\sin x|\,dx$$

# YAWARAKA!
# 数学道具箱　【体験版】

【例題 01】

方程式$2x^2-3x+4=0$の２解を$\alpha,\ \beta$とするとき，$\left(\alpha^2+2\right)\left(2\beta^2+3\beta+4\right)$ の値を求めよ。

【例題 02】

$k$を実数とする。$x$の 3 次方程式$x\left(x^2-4k+4\right)+k(k-2)^2=0$の解がすべて実数であるような$k$の値の範囲は$\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\leqq k\leqq\boxed{\text{ツ}}$である。

【例題 03】

方程式$x^3+ax+a=0$の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，$a$は定数とする。

【例題 04】$x^2+y^2=2$ のもとで，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。(できるだけ多くの解法で解け)

ノートみてもいいよ.

【例題 05】正の数 $a, b$ が $a^3+b^3=5$ を満たすとき，$a+b$ のとりうる値の範囲を求めよ。(2012 昭和)

# 解の問題の処理

（１）　解を求める。

（２）　解を元の方程式に代入＆次数下げ

（３）　解と係数の関係

（４）　解　⇔　因数

（５）　解　⇔　グラフの共有点の $x$ 座標　（できれば**定数分離**）

（特殊な問題）

○共通解

○共役解

○1 の 3 乗根 $\omega$

○相反方程式

○3 次方程式の重解問題に注意

# 最大最小

$\boxed{\text{基礎}}$　グラフを描いて高さ比べ

２次関数⇒平方完成

三角関数⇒諸公式の利用

一般には⇒微分

$\boxed{\text{応用}}$　２変数以上 or 整式（$n$ 次式）でないとき　など

（１）$\boxed{\text{一文字消去}}$（ただし変域に注意）

（２）$\boxed{\text{図示}}$して共有点の存在条件に帰着（線形計画法）

（３）$\boxed{\text{文字の置き換え（変域に注意）}}$

（対称式は和と積で，$x=\frac{b}{a}$ など）

（注）和と積の置き換えでは隠れた実解条件に注意

$\boxed{\text{パラメーター表示}}$（円・だ円・双曲線など）

$x^2+y^2=r^2$ のとき，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と表せる。（２変数⇒１変数）

（４）$\boxed{\text{有名不等式の利用}}$

（例）相加相乗，Cauchy-Schwarz の不等式など

相加相乗　$a>0, b>0$ のとき，$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ が成立　（等号成立は $a=b$）

CS-不等式　$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 \geqq \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$　（等号成立は $\vec{a} \,/\!/\, \vec{b}$ のとき）

三角不等式　$\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right| \geqq \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$　（等号成立は $\vec{a}, \vec{b}$ が同じ向きのとき）

（５）$\boxed{\text{逆手法}}$（主役交代して，解の存在条件に帰着）

（６）（最後の手段）$\boxed{\text{一文字固定}}$

# 三角関数の諸公式

**三角関数の定義**

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

**三角関数の基本公式**

①$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

②$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

③$\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

④$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1, -1 \leqq \cos\theta \leqq 1$

**加法定理**

①$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

②$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

③$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

**2倍角公式**

①$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

②$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1$

$= 1 - 2\sin^2\theta$

**3倍角公式**

①$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

②$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

**半角公式**

①$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$

②$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

③$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

**三角関数の合成**

$a\sin\theta + b\cos\theta$

$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$

$= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)$

$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

**積和変換**

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

**和積変換**

$\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

**変換公式**

①$\sin(\theta+2n\pi) = \sin\theta$，$\cos(\theta+2n\pi) = \cos\theta$，$\tan(\theta+2n\pi) = \tan\theta$

②$\sin(-\theta) = -\sin\theta$，$\cos(-\theta) = \cos\theta$，$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

③$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

④$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$，$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$，$\tan(\pi-\theta) = \tan\theta$

⑤$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

⑥$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$，$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$，$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$

# 三角関数の典型問題

①　$\sin x, \cos x$ の１次式　⇒　合成
②　$\sin x, \cos x$ の２次同次式　⇒　半角＆合成
③　$\sin x, \cos x$ の対称式　⇒　$t = \sin x + \cos x$　でおきかえ

# 最後の手段

①　$\sin x = Y, \cos x = X$ とおくと，$X^2 + Y^2 = 1$　となり，座標平面に帰着できる

②　$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　となり，分数計算に帰着できる。

# 準有名角

① $\boxed{15° \text{ family}}$ ～ 加法定理から

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \tan 15° = 2-\sqrt{3}$$

$$\sin 75° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \cos 75° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \tan 75° = 2+\sqrt{3}$$

② $\boxed{22.5° \text{ family}}$ ～ 半角公式から

$$\sin 22.5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad \cos 22.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \tan 22.5° = \sqrt{2}-1$$

③ $\boxed{18° \text{ family}}$ ～ 2倍角＆3倍角，正5角形の対角線利用，相似利用

$$\sin 18° = \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \qquad \cos 36° = \sin 54° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

# 三角関数基本チェック

【例題 06】 $0 \leqq x < \pi$ のとき，方程式 $2\cos 2x + 2(\sqrt{3}-1)\sin x + \sqrt{3} = 2$ を解け

【例題 07】 関数 $f(x) = 3\sin 2x - 4\cos 2x$ の最大値と最小値を求めよ。

【例題 08】 関数 $f(x) = \sin 2x - \sin x - \cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

【例題 09】 関数 $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 4\cos^2 x$ の最大値と最小値を求めよ。

【例題 10】 関数 $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x - 2}$ の最大値と最小値を求めよ。