5/6

課前自習

学校の 数列の極限 あたり．やっとく → 二年

(宿)・毎回テストあるよ～ (Ⅲ 計算 積分テスト) → 二年

(宿)・ちゃちゃちゃ① 2章 A

(宿) タテプリ $\boxed{\text{C-33-5}}$

課前自分

ちゃ^{3}① 2章B，3章AB

小テスト 積分の応用

週テスト #1，

全60分

タテプリ，$\boxed{\text{33-1}}$～

道具箱 つづき 1問だけ Max.min

その場で

8 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$ 型

逆数とって $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ でおきかえ〜

9 (1) 漸化式では、同型をつくるのがキホン

(2) 和から一般項.

10 ① $a_{n+2}+pa_{n+1}+q\cdot a_n=0$ 3項間

まん中

ひきさいて.

等比型

② $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\boxed{\beta}(a_{n+1}-\alpha a_n)$ 型へ

n+1　　n

②より $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\cdot\beta\cdot a_n=0$

α,β は. $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\cdot\beta=0$ の2解.

2次の特性方程式

$\boxed{10}$

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} a_{n+2} - (\alpha+\beta)a_{n+1} + \alpha\cdot\beta = 0 \\ \alpha+\beta = 1, \quad \alpha\cdot\beta = -6 \end{array}\right]$$

$$t^2 - t - 6 = 0$$

$$(t-3)(t+2) = 0$$

$$(\alpha, \beta) = (3, -2), (-2, 3)$$

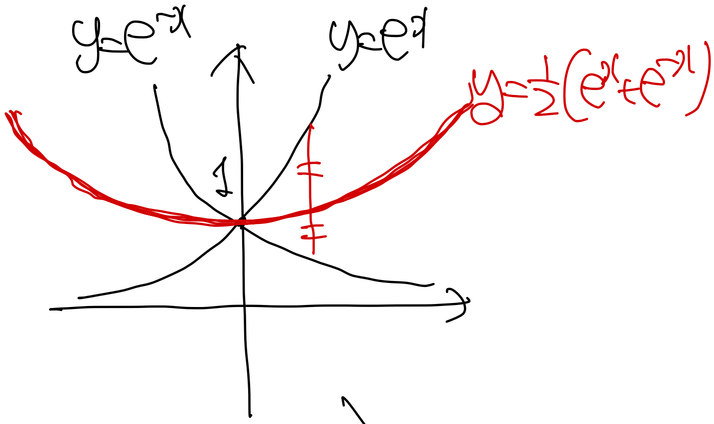
$\boxed{11}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$$

$$\left(\begin{array}{c} \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2-a_n}{1} \\ \frac{1}{a_{n+1}} = 2-a_n \end{array}\right)$$

$\boxed{21}$ $\boxed{y=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)}$

catenary

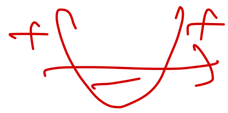


$\boxed{\text{性質}}$ ① $y''=y$

② $\sqrt{(y')^2+1}=y$

$\boxed{24}$ $y = \dfrac{1-x}{1+x^2}$

(分母 $\neq 0$ より (ア) なし.
ヨコ, ナナメ $\dfrac{1次}{2次} \Rightarrow$ ヨコ
$\lim_{x\to\pm\infty} y = 0$ より (ヨコ) $y=0$)



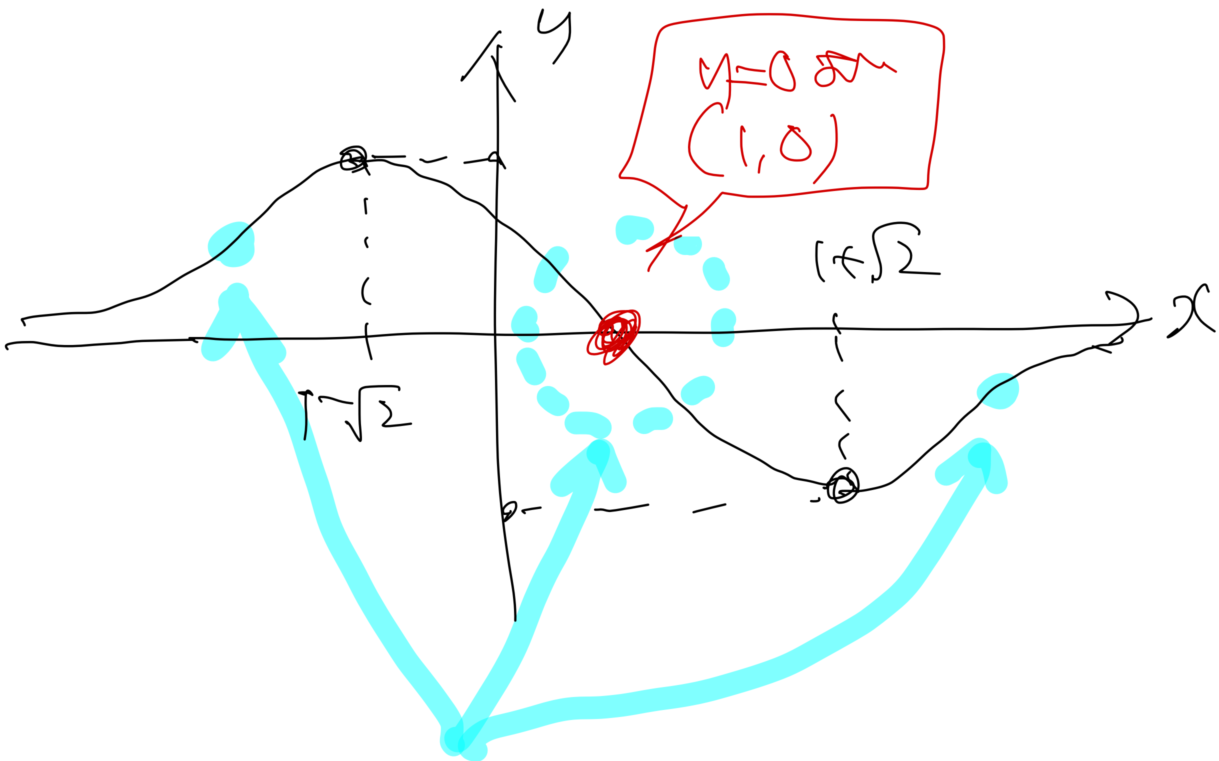
~~まず増減の~~

x^2-2x-1

$$y' = \frac{-1\times(1+x^2)-(1-x)\times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(\quad)^2}$$

$y'=0 \iff x = 1\pm\sqrt{2}$

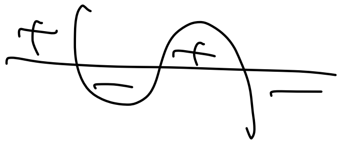
x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗		↘		↗



変曲点があるぞう

気にしながら y'' まで計算

$y'' = 0 \iff x = -1,\ 2 \pm \sqrt{3}$



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\cup$		$\cap$		$\cup$		$\cap$

⋮

これに基づいて

変曲点をもとめる。

25

$$f(x) = x^2 - 2x - 4\cdot\log(x^2+1)$$

（xは全実数）

$$f'(x) = 2x - 2 - 4\times\frac{2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2+1) - 8x}{x^2+1}$$

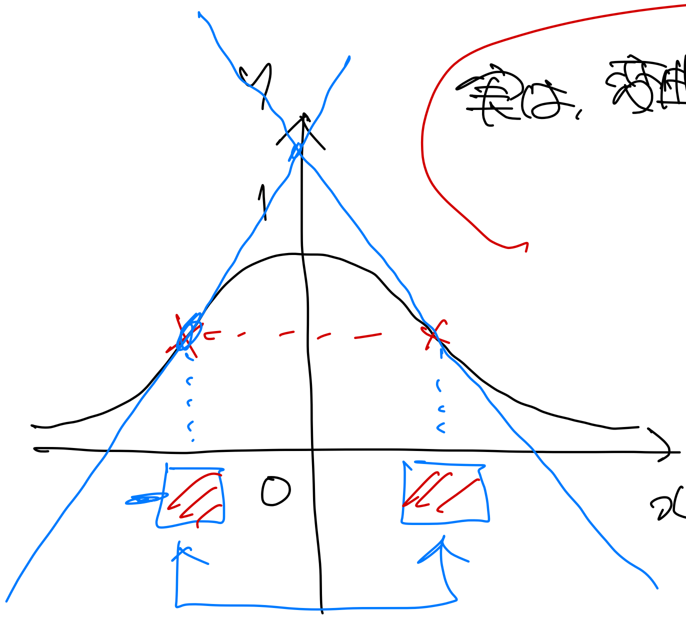
$$2(x^3 - x^2 + x - 1 - 4x)$$

$$= 2(x^3 - x^2 - 3x - 1)$$

$$-1-1+3-1$$

$$= \frac{2(x+1)(x^2-2x-1)}{x^2+1}$$

26



実は、変曲点での接線のとき Max.

$$y' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{2\times(1+x^2)^{\cancel{2}} - 2x\times 2\cancel{(1+x^2)}\times 2x}{(1+x^2)^{\cancel{4}}}$$

$$= 2\,\frac{(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^3} = 2\times\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$$

$y''=0$ となるのは

$$x = \boxed{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$\boxed{27}$

$+\infty$

$e^{-\infty}=0$

$e^{\infty}=$

$\infty\times 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}4(x+1)\cdot e^{-\frac{x}{4}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4(x+1)}{e^{\frac{x}{4}}} \leftarrow \frac{\infty}{\infty}\left(\frac{1次}{指数}\right)$$

$$=0$$

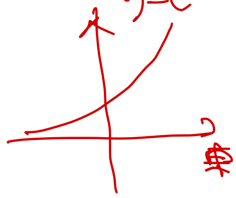
$-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}4(x+1)\times e^{-\frac{x}{4}}$$

$$-\infty\times\infty$$

$$=-\infty$$

$y=e^x$



(3) $\boxed{\text{積分定数を工夫する}}$

部したい

約分できない

$$\int_0^1 x\cdot\log(x+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\log(x+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x+1}\,dx$$

⇩ 改善

$$=\left[\underbrace{\frac{x^2-1}{2}\times\log(x+1)\Big]_0^1}_{0}-\int_0^1\frac{x^2-1}{2}\times\frac{1}{x+1}\,dx\right.$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_0^1=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{2}\right)=\underline{\frac{1}{4}}$$

別 $\displaystyle\int_0^1 x\cdot\log(x+1)\,dx$ 　別　　$t=x+1$ （ふつうの置換）

部

$$=\int_1^2(t-1)\cdot\log t\cdot dt$$

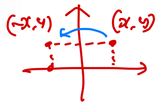
$$=\left[\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\times\log t\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\times\frac{1}{t}\,dt$$

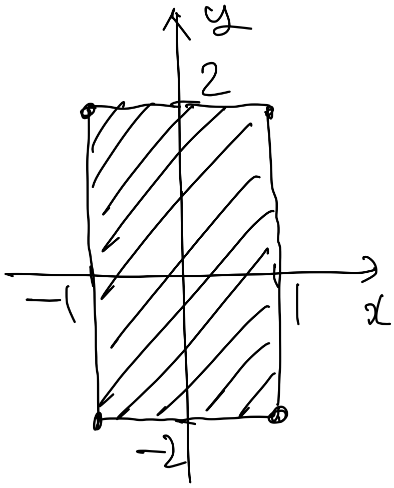
$$\cdots=\underline{\frac{1}{4}}$$

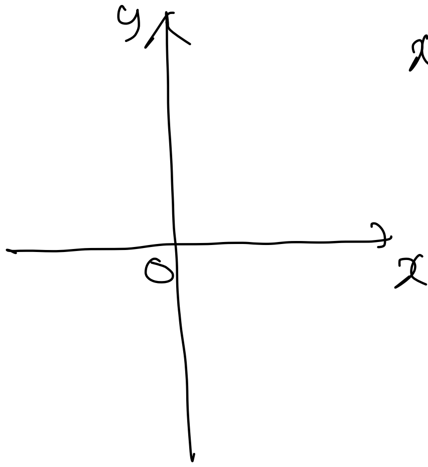
2-A-2

(3) $|x| \leqq 1$ かつ $|y| \leqq 2$ は，$2|x|+|y| \leqq 2$ であるための $\boxed{\text{ウ}}$ 。

$x \to (-x)$ で不変 より $\underline{y軸}$ 対称
$y \to (-y)$ で不変 より $\underline{x軸}$ 対称
原点対称

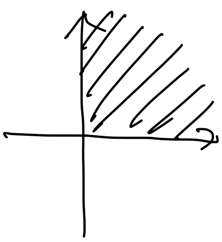


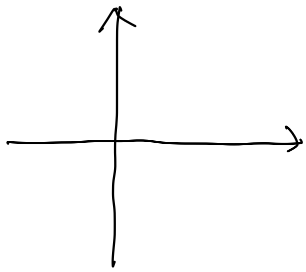




$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ のとき
$2x+y \leqq 2$

(2) $x+y>0$ は，$x>0$ または $y>0$ であるための $\boxed{\text{イ}}$ 。





①$\boxed{2\text{-}A\text{-}3}$

次の２式の大小を比較せよ。

(1)　$ab+bc+ca$，　$a^2+b^2+c^2$

[解1]　$\frac{1}{2}$でくくる　Best

[解2]　気づかなかったら → 一文字整理

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$

$=a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc$

$=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2-\frac{(b+c)^2}{4}+b^2+c^2-bc$

$\frac{-b^2-2bc-c^2+4b^2+4c^2-4bc}{4}$

$=\frac{3b^2-6bc+3c^2}{4}$

$=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3(b-c)^2}{4}\geqq 0$

等号は　$a=\frac{b+c}{2}$　かつ　$b=c$

つまり　$a=b=c$　のとき

$\therefore$　上に下略 (以下略)

$\boxed{\text{2-A-4}}$

$\underbrace{\text{前提として } n：\text{整数だから}}$

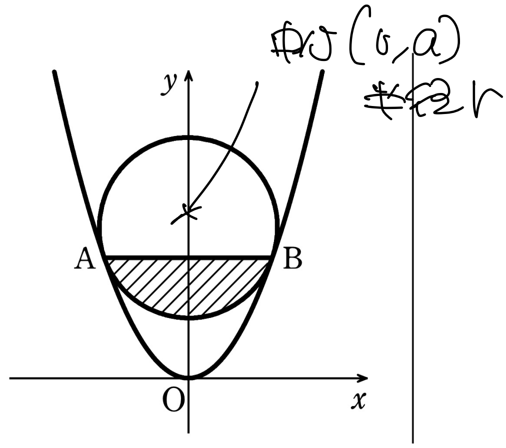
n^3が2の倍数 $\Longrightarrow$ nも2の倍数

$\xleftarrow{?}$

㊟ 厳密には $\boxed{\text{対偶}}$ を利用.

$\boxed{\text{C-33-5}}$

xy 平面上において，y 軸上に中心をもつ半径 r の円が，放物線 $y=x^2$ と図のように，点 A と点 B で接しているとする。線分 AB と円弧 AB とで囲まれた部分 (図の斜線部分) を y 軸の周りに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ。ただし，$r>\frac{1}{2}$ とする。



$$\begin{cases} y=\boxed{x^2} \\ \boxed{x^2}+(y-a)^2=r^2 \end{cases}$$

連立 $y+(y-a)^2=r^2$

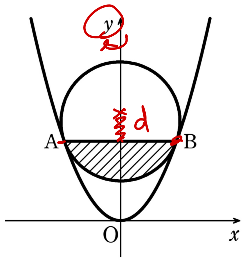
$$y^2+(1-2a)y+a^2-r^2=0$$

$$D=(1-2a)^2-4(a^2-r^2)$$

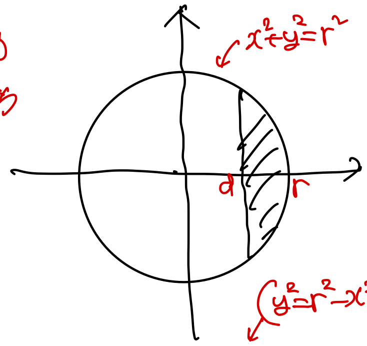
$$=1-4a+\cancel{4a^2}-\cancel{4a^2}+4r^2=0$$

$$1-4a+4r^2=0$$

$$a=r^2+\frac{1}{4}$$

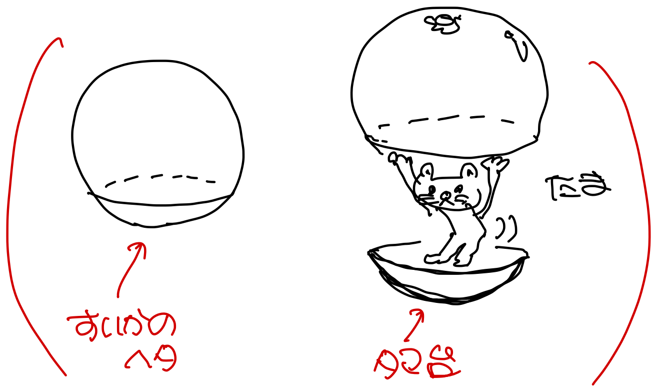


平行移動 & 回転移動 ⇨



$(y^2=r^2-x^2)$

$$V=\int_d^r \pi y^2\,dx$$

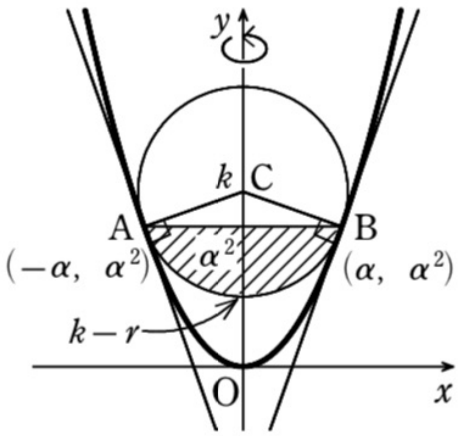


タコ台は
半径 および
中心と断面の距離
で決まる

解答　$\pi\left(\frac{2}{3}r^3-\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{24}\right)$

$\alpha>0$ とし，A$(-\alpha,\ \alpha^2)$，B$(\alpha,\ \alpha^2)$ とする。また，円の中心を C$(0,\ k)$ とする。
点 B における放物線の接線の傾きは 2α であり，この接線は直線 BC に垂直である。

よって　$\frac{\alpha^2-k}{\alpha}=-\frac{1}{2\alpha}$　　ゆえに　$k=\alpha^2+\frac{1}{2}$　…… ①



また，接点 B は円 $x^2+(y-k)^2=r^2$ の周上にあるから

$$\alpha^2+(\alpha^2-k)^2=r^2$$

よって，① から　$\alpha^2=r^2-\frac{1}{4}$

ゆえに　$\alpha=\sqrt{r^2-\frac{1}{4}}$，$k=r^2+\frac{1}{4}$

求める回転体の体積 V は

$$V=\pi\int_{k-r}^{\alpha^2}x^2dy=\pi\int_{k-r}^{\alpha^2}\{r^2-(y-k)^2\}dy$$

ここで，$y-k=t$ とおくと　$dy=dt$
y と t の対応は右のようになる。

y	$k-r \longrightarrow \alpha^2$
t	$-r \longrightarrow -\frac{1}{2}$

よって　$V=\pi\int_{-r}^{-\frac{1}{2}}(r^2-t^2)dt=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{r}(r^2-t^2)dt$

$$=\pi\left[r^2t-\frac{1}{3}t^3\right]_{\frac{1}{2}}^{r}=\pi\left(\frac{2}{3}r^3-\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{24}\right)$$

改・数学③第８回小テスト　積分の応用

$\boxed{1}$ ＊　曲線 $y=\sqrt{x}$ と，この曲線上の点 $(1,\ 1)$ における接線および y 軸で囲まれた部分の面積S を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の曲線または直線と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

＊(1)　$y=\tan x$，$x=\dfrac{\pi}{4}$

(2)　$y=\sin 2x$　$\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{3}$ 次の曲線または直線で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1)　$x=y^2-1$，y 軸

(2)　$y=\log x$，$y=1$，x 軸，y 軸

$\boxed{4}$ 曲線 $x=\cos^3\theta$，$y=\sin^3\theta$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ ＊　次の曲線の長さ L を求めよ。ただし，t，θ は媒介変数とする。

$$x=e^{\theta}\cos\theta,\quad y=e^{\theta}\sin\theta \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

$\boxed{6}$ ＊　次の曲線の長さ L を求めよ。

$$y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x} \quad (1\leqq x\leqq 2)$$

$\boxed{7}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=x+\int_0^1 f(t)e^t dt$$

$\boxed{8}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を求めよ。

$$\int_\pi^x f(t)dt=a\sin^2 x+\frac{a}{2}x^2-1$$

$\boxed{9}$ 原点から出発して数直線上を動く点 P の t 秒後の座標が t^3-5t^2+4t で表される。

(1)　P が原点に戻ったときの速度をすべて求めよ。

(2)　P が運動の向きを初めて変えるのは何秒後か。

$\boxed{10}$ 座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が，$x=-6t^2+10$，$y=2t^3-5$ で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までにPが通過する道のり s を求めよ。

$\boxed{11}$ 自然数 n について，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ とする。

(1) I_1，I_2 を求めよ。

(2) I_{n+2} を n と I_n を用いて表せ。

(3) I_6 を求めよ。

週テスト（科目：数学　講師名：山中）　**問題**

1 点 $(3x-1,\ 3-2x)$ は $x=2$ のとき第何象限にあるか。

また，点 $(3x-1,\ -2)$ が第 3 象にあるのは $x<\boxed{}$ のときである。

2 $\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{y+2z}{x}=\dfrac{z-x}{y}$ のとき，この式の値を求めよ。

3 立方体の各辺の中点は全部で 12 個ある。頂点がすべてこれら 12 個の点のうちのどれかであるような正多角形は全部でいくつあるか。

4 2 つのさいころを同時に振るという試行を独立に 3 回行う．1 回目に出た目を a_1，b_1，2 回目に出た目を a_2，b_2，3 回目に出た目を a_3，b_3 とする．

このとき，$(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)=0$ となる確率を求めよ．

5 (1)　1 桁の正の整数で，4 乗しても一の位の数字が変わらないものは 3 つある。
1 以外の残り 2 つを求めよ。

(2)　2 桁の正の整数で，2 乗しても下 2 桁が変わらないものは 2 つある。
それらを全て求めよ。

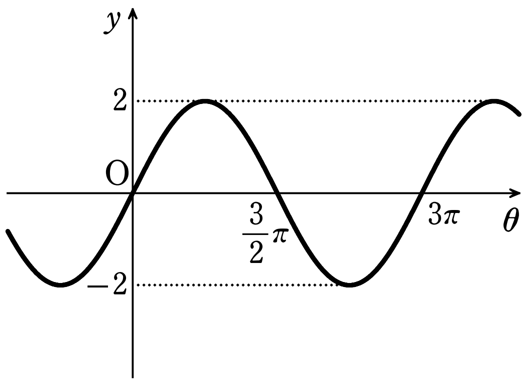
6 (1)　(ア)　$\log_3 27$　　(イ)　$\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{243}$　の値を求めよ。

(2)　$2\log_2 12-\dfrac{1}{4}\log_2\dfrac{8}{9}-5\log_2\sqrt{3}$ を簡単にせよ。

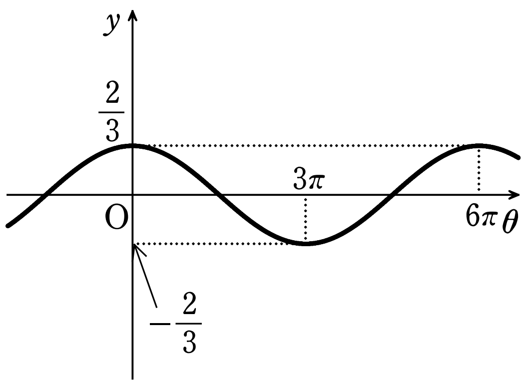
7 常用対数表を用いて，$\log_{10}32.3$ の値を求めよ。

8 次の図は，(1)　$y=a\sin b\theta$　(2)　$y=a\cos b\theta$　のグラフである。定数 a，b の値を，それぞれ求めよ。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(1)



(2)



9 $f(x)$ は整式で，恒等式 $f(x)-f'(x)=x^3-15x+14$ を満たしている。
このとき，$f(x)$ を求めよ。

10 曲線 $y=x^2$ の点 $(t,\ t^2)$ における接線が，4 点 A $(1,\ 0)$, B $(2,\ 0)$, C $(2,\ 1)$, D $(1,\ 1)$ を頂点とする正方形の面積を 2 等分している。このときの t の値を求めよ。

11 ε_{ijk} を次のように定義する。

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & (\varepsilon_{123},\varepsilon_{231},\varepsilon_{312}\text{ のとき}) \\ -1 & (\varepsilon_{321},\varepsilon_{213},\varepsilon_{132}\text{ のとき}) \\ 0 & (\text{上記以外の }\varepsilon_{ijk})\end{cases}$$

ただし，ε の右下の添字は，すべて 1, 2, 3 のうちいずれかの値をとるものとする。

このとき，　$\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}(\varepsilon_{ijk}\times\varepsilon_{ijk})$　の値を求めよ。

（hint）$\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}(\varepsilon_{ijk}\times\varepsilon_{ijk})$ は，　$\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{k=1}^{3}(\varepsilon_{ijk}\times\varepsilon_{ijk})\right\}\right]$ と表すこともできる。