



12 人を次のように分けるとき、分け方は何通りあるか。

- (1) 5人, 4人, 3人の3つの組に分ける。
- (2) A, B, C, Dの4つの組に, 3人ずつ分ける。
- (3) 3人ずつの4つの組に分ける。
- (4) 8人, 2人, 2人の3つの組に分ける。

次の条件を満たす整数の組  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  の個数を求めよ。

- (1)  $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq 4$
- (2)  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 4, a_1 \geq 1, a_i \geq 0 (i=2, 3, 4, 5)$

### 実戦問題

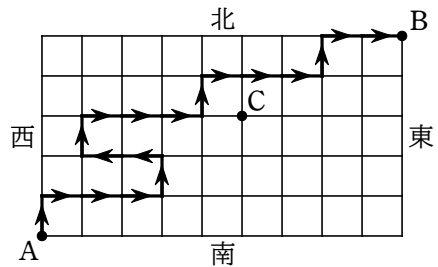
1 から 10 までの自然数の各数字を 1 つずつ記入した 10 枚のカードがある。これらを A, B, C の 3 つの箱に分けて入れる。

- (1) 空の箱があってもよいものとするとき、分け方は何通りあるか。
- (2) 空の箱があってはならないとするとき、分け方は何通りあるか。

正八面体について考える。ただし、回転させて一致するものは同じものとする。

- (1) 頂点に 1, 2, …… と順に番号を付けるとき、番号の付け方は何通りあるか。
- (2) 2 つの面を赤に、残りの 6 つの面を白に塗るとき、塗り方は何通りあるか。
- (3) 3 つの面を赤に、残りの 5 つの面を白に塗るとき、塗り方は何通りあるか。

右の図のように東西に 6 本、南北に 10 本の道がある。東西の道と南北の道の出会う地点を交差点とよび、隣どうしの交差点を結ぶ道を区間ということにする。A 地点から B 地点に進むとき、次の問いに答えよ。ただし、どの交差点においても、東西および北のいずれかに進むことはできるが、南に進むことはできないとする。



また、後戻りもできないとする。図の中の太線は道順の例を示したものである。

- (1) A 地点から B 地点へ行く道順の総数を求めよ。
- (2) C 地点を通過して、A 地点から B 地点へ行く道順の総数を求めよ。
- (3) A 地点から B 地点まで 16 区間で行く道順の総数を求めよ。

# 数学① 第6回試練 場合の数

3 / 11

- 1 解答 (1) 3 (2) 31 (3) 18 (4) 98
- 2 解答 59 番目
- 3 解答 (1) 720 個 (2) 420 個 (3) 440 個
- 4 解答 (1) 35 本 (2) 120 個 (3) 60 個
- 5 解答 30 通り
- 6 解答 (1) 91 個 (2) 55 個
- 7 解答 (1) 420 通り (2) 60 通り (3) 300 通り
- 8 解答 (1) 720 通り (2) 420 通り
- 9 解答 (1) 720通り (2) 5760通り
- 10 解答 (1) 72通り (2) 432通り
- 11 解答 236通り
- 12 解答 (1) 27720 通り (2) 369600 通り (3) 15400 通り (4) 1485 通り
- 13 解答 (1) 56 個 (2) 56 個
- 14 解答 (1) 59049 通り (2) 55980 通り
- 15 解答 (1) 30 通り (2) 3 通り (3) 3 通り
- 16 解答 (1) 100000 通り (2) 59000 通り (3) 3276 通り

- ① 100 から 200 までの整数全体の集合を  $U$  とし、そのうち 5 の倍数、8 の倍数全体の集合をそれぞれ  $A$ 、 $B$  とすると

$$A = \{5 \cdot 20, 5 \cdot 21, \dots, 5 \cdot 40\}, B = \{8 \cdot 13, 8 \cdot 14, \dots, 8 \cdot 25\}$$

ゆえに  $n(A) = 40 - 20 + 1 = 21$ ,  $n(B) = 25 - 13 + 1 = 13$

- (1) 5 かつ 8 の倍数すなわち 40 の倍数全体の集合は  $A \cap B$  であり

$$A \cap B = \{40 \cdot 3, 40 \cdot 4, 40 \cdot 5\}$$

よって  $n(A \cap B) = 3$

- (2) 5 または 8 の倍数全体の集合は  $A \cup B$  であるから

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 21 + 13 - 3 = 31$$

- (3) 5 で割り切れるが 8 で割り切れない整数全体の集合は  $A \cap \overline{B}$  であるから

$$n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 21 - 3 = 18$$

- (4) 5 と 8 の少なくとも一方で割り切れない整数全体の集合は  $\overline{A \cap B}$  である。

また、 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  であるから

$$n(\overline{A \cap B}) = n(\overline{A} \cup \overline{B}) = n(U) - n(A \cap B) = (200 - 100 + 1) - 3 = 98$$

- ② 辞書式に並べたときの 1 番目の文字列は HIJOS

H □ □ □ □ の形の文字列は  $4! = 24$  (個)

I □ □ □ □ の形の文字列は 24 個

JH □ □ □ の形の文字列は  $3! = 6$  (個)

JIH □ □ の形の文字列は  $2! = 2$  (個)

JIO □ □ の形の文字列は 2 個

その次の文字列が JISHO である。

よって、JISHO となるのは  $24 + 24 + 6 + 2 + 2 + 1 = 59$  (番目)

- ③ (1) 千の位は 0 を除く 6 通り。よって  $6 \times {}_6P_3 = 6 \times 120 = 720$  (個)

- (2) [1] 一の位が 0 のとき、千、百、十の位は、0 以外の 6 個から 3 個取る順列であるから  ${}_6P_3$

- [2] 一の位が 2, 4, 6 のとき、千の位は、0 と一の位の数以外の 5 個から 1 個取るから 5 通り。

百と十の位は残りの 5 個から 2 個取る順列で  ${}_5P_2$  通り。

よって  $3 \times 5 \times {}_5P_2$

[1], [2] から求める個数は  ${}_6P_3 + 3 \times 5 \times {}_5P_2 = 120 + 300 = 420$  (個)

- (3)[1] 千の位が 3 のとき、百の位は、2, 4, 5, 6 の 4 個から 1 個取るから 4 通り。

十、一の位は、残り 5 個から 2 個取る順列で  ${}_5P_2$  通り。

よって  $4 \times {}_5P_2$

- [2] 千の位が 4, 5, 6 のとき、百、十、一の位は残り 6 個から 3 個取る順列で  ${}_6P_3$  通り。

よって  $3 \times {}_6P_3$

[1], [2] から  $4 \times {}_5P_2 + 3 \times {}_6P_3 = 80 + 360 = 440$  (個)

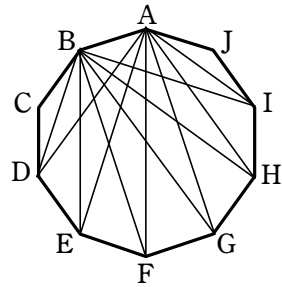
- 4 (1) 異なる10個の点から2個の点を選ぶ方法は  ${}_{10}C_2$  通り  
 この中には正十角形の10本の辺がある。

ゆえに  ${}_{10}C_2 - 10 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} - 10 = 35$  (本)

- (2) 3個の頂点で三角形が1個できるから、求める個数は

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{ (個)}$$

- (3) 正十角形の10個の頂点を図のように定める。このとき、辺ABだけを共有する三角形の第3の頂点の選び方は、A、Bとその両隣の2点C、Jを除くD、E、F、G、H、Iの6通り。



他の辺を共有する場合も同様であるから、求める個数は  $6 \times 10 = 60$  (個)

- 5 底面の色の塗り方は 5通り

側面の色の塗り方は、残り4色の円順列であるから  $(4-1)!$  通り  
 よって  $5 \times (4-1)! = 30$  (通り)

- 6 (1) 求める個数は、 $x, y, z$ の3種類の文字から重複を許して12個取る組合せの数に

等しいから  ${}_{3+12-1}C_{12} = {}_{14}C_{12} = {}_{14}C_2 = \frac{14 \cdot 13}{2 \cdot 1} = 91$  (個)

**別解** 条件を満たす  $x, y, z$ の組は、12個の○と2個の仕切り | の順列を作り、仕切りで分けられた3か所の○の個数を、左から順に  $x, y, z$  とすると得られる。

よって、求める個数は、12個の○と2個の | を1列に並べる順列の総数に等しいから

$$\frac{14!}{12!2!} = \frac{14 \cdot 13}{2 \cdot 1} = 91 \text{ (個)}$$

- (2)  $x-1=X, y-1=Y, z-1=Z$  とおくと  $X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0$

また、 $x+y+z=12$  から  $(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=12$

よって  $X+Y+Z=9$

この等式を満たす負でない  $X, Y, Z$ の組は、(1)と同様に考えて、 $X, Y, Z$ の3種類の文字から重複を許して9個取る組合せの数に等しい。

よって、求める個数は  ${}_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = \frac{11 \cdot 10}{2 \cdot 1} = 55$  (個)

**別解** 条件を満たす  $x, y, z$ の組は、12個の○を1列に並べ、その間の11か所のうち2か所に仕切り | を入れ、仕切りで分けられた3か所の○の個数を、左から順に  $x, y, z$  とすると得られる。

よって、求める個数は  ${}_{11}C_2 = \frac{11 \cdot 10}{2 \cdot 1} = 55$  (個)

- 7 (1) Aが3文字、Tが2文字、Lが1文字、Nが1文字であるから、求める並べ方の総数は

$$\frac{7!}{3!2!1!1!} = 420 \text{ (通り)}$$

(2) 両端に並べる2文字のAを除いた5文字の並べ方は  $\frac{5!}{1!2!1!1!1!} = 60$  (通り)

よって、求める並び方は 60通り

(3) 2文字のTをまとめて一組と考えると、その一組と残り5文字の並べ方は

$$\frac{6!}{3!1!1!1!1!} = 120 \text{ (通り)}$$

よって、Tが隣り合わない並べ方は  $420 - 120 = 300$  (通り)

8 (1) 並ぶAAをまとめてA', OOをまとめてO'で表す。

このとき、求める順列は、A', O', Y, K, H, Mの順列であるから、その総数は

$${}_6P_6 = 6! = 720 \text{ (通り)}$$

(2) □4個, O2個, A2個を1列に並べ、4個の□は左からY, K, H, Mとすればよい。

よって、求める順列の総数は

$$\frac{8!}{4!2!2!} = 420 \text{ (通り)}$$

9 (ア) AA, OOをそれぞれ1個の文字とみなして、N, G, Y, J, AA, OOの6個の文字を1列に並べる場合の数を求めると

$$6! = 720 \text{ (個)}$$

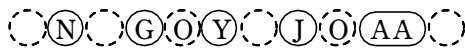
(イ) 8個の文字の順列の総数は

$$\frac{8!}{2!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 10080 \text{ (個)}$$

[1] AAの並びを含み、OOの並びを含まないもの

AAを1つの文字とみなし、N, G, Y, J, AAの5個の文字を並べ、その間と両端の6か所から2か所を選んでO, Oを並べればよいから

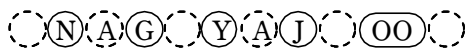
$$5! \times {}_6C_2 = 120 \times \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 1800 \text{ (個)}$$



[2] OOの並びを含み、AAの並びを含まないもの

OOを1つの文字とみなし、[1]と同様に考えて

$$5! \times {}_6C_2 = 1800 \text{ (個)}$$

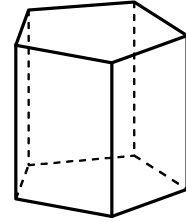


よって、求める個数は

$$10080 - (720 + 1800 \times 2) = 5760 \text{ (個)}$$

10 (ア) 正五角形の面の塗り方は 6通り

そのおのおのについて、側面の長方形の塗り方は5色の円順列となるが、正五角柱をひっくり返すと同じ場合があるから  $\frac{6 \times (5-1)!}{2} = 72$  (通り) …… ①



(イ) 2つの正五角形の面を異なる色で塗る場合について考える。

このとき、上面に塗る場合と下面に塗る場合は異なるものと考え、正五角形の面の塗り方は  ${}_6P_2$  通り  
そのおのおのについて、

側面の5つの長方形のうちの2つを塗る1色の選び方が4通り、  
同色となる長方形の位置の選び方が1通り、  
残り3つの長方形の塗り方が  ${}_3P_3$  通り

であるから  ${}_6P_2 \times 4 \times 1 \times {}_3P_3$  (通り) あるが、正五角柱をひっくり返すと同じ場合があるから、2つの正五角形の面を異なる色で塗るような、正五角柱の塗り方は

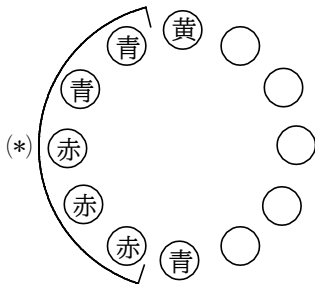
$$\frac{{}_6P_2 \times 4 \times 1 \times {}_3P_3}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \times 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 360 \text{ (通り)} \dots\dots ②$$

よって、正五角柱の塗り方の総数は、①、②より  $72 + 360 = 432$  (通り)

11 円形に並べる方法は、黄玉を固定して、赤玉6個、青玉5個を並べる並べ方だから、

$$\frac{11!}{6!5!} = 462 \text{ (通り)}$$

円形に並べたとき、左右対称なものは、青玉が5個より、黄玉を固定したときの真正面に青玉がくる。



左の図のように、他の玉の並び方は、(\*)の5個が決まれば、向かいの5個も決まるから、

$$\frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ (通り)}$$

一方、左右対称でない円順列は裏返すと同じになるペアがあるから、2で割る。

よって、求める方法は、 $10 + \frac{462-10}{2} = 236$  (通り)

12 (1) 12人から5人を選ぶ方法は  ${}_{12}C_5$  通り

そのどの場合に対しても、残りの7人から4人を選ぶ方法は  ${}_7C_4$  通り  
残り3人を最後の1組とする。

よって、分け方の総数は  ${}_{12}C_5 \times {}_7C_4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 27720$  (通り)

(2) A組の3人の選び方は  ${}_{12}C_3$  通り

B組の3人の選び方は残りの9人から選ぶので  ${}_9C_3$  通り

C組の3人の選び方は残りの6人から選ぶので  ${}_6C_3$  通り

A 組, B 組, C 組の人が決まれば, 残りの D 組の 3 人は決まる。

よって, 分け方の総数は

$${}_{12}C_3 \times {}_9C_3 \times {}_6C_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 369600 \text{ (通り)}$$

(3) (2) で, A, B, C, D の区別をなくすと, 4! 通りずつ同じ組分けができる。

よって, 分け方の総数は  $\frac{369600}{4!} = \frac{369600}{24} = 15400$  (通り)

(4) A 組 2 人, B 組 2 人, C 組 8 人の 3 つの組に分けることを考え, A, B の区別をなくせばよい。

よって, 分け方の総数は  $\frac{{}_{12}C_2 \times {}_{10}C_2}{2!} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} \times \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \times \frac{1}{2 \cdot 1} = 1485$  (通り)

13 (1) 条件を満たす整数の組  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  の個数は, 1, 2, 3, 4 の 4 個の数字から重複を許して 5 個取る組合せの数であるから

$${}_4H_5 = {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56 \text{ (個)}$$

(2)  $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, b_3 = a_1 + a_2 + a_3, b_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$

$b_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$  とおくと

$$1 \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4 \leq b_5 \leq 4$$

よって, この不等式を満たす整数の組  $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$  の個数は, (1) から

56 個

ここで,  $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$  の 1 つの組に対して,  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  の組はただ 1 つに決まる。

したがって, 求める組の個数は 56 個

別解  $a_1 - 1 = A, A + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S$  とおく。

求める個数は,  $S = 0, 1, 2, 3$  をそれぞれ満たす 0 以上の整数の組

$(A, a_2, a_3, a_4, a_5)$  の総数に等しい。

$S = 3$  のとき, 異なる 5 種類のものから, 重複を許して 3 個取る組合せの数を求めて

$${}_5H_3 = {}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = 35 \text{ (個)}$$

$S = 2$  のとき, 同様に考えて  ${}_5H_2 = {}_{5+2-1}C_2 = {}_6C_2 = 15$  (個)

$S = 1$  のとき 5 個,  $S = 0$  のとき 1 個。以上から 56 個

14 (1) 1 枚のカードを 3 つの箱 A, B, C に入れる方法は 3 通りある。

よって, 10 枚のカードを 3 つの箱 A, B, C に入れる方法は

$$3^{10} = 59049 \text{ (通り)}$$

(2) A を空にして, 10 枚のカードを 2 つの箱 B, C に入れる方法は

$$2^{10} \text{ 通り}$$

この場合において, B, C のうち一方の箱が空になる場合を除いて



$$2^{10} - 2 = 1022 \text{ (通り)}$$

同様に、B だけ、C だけを空にする方法はそれぞれ 1022 (通り)  
ゆえに、求める場合の数は

$$1022 \times 3 = 3066 \text{ (通り)}$$

- (3) 2つの箱が空になる場合は 3 通り  
よって、空の箱がない場合は

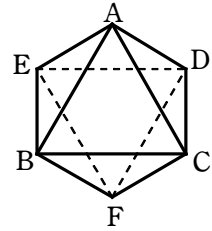
$$59049 - 3066 - 3 = 55980 \text{ (通り)}$$

- 15 (1) 1の番号を付けた頂点を A とし、残りの5つの頂点を、右の図のように B, C, D, E, F とする。

このとき、頂点 F の番号の付け方は 2 ~ 6 の 5 通り

残りの4つの頂点 B, C, D, E の番号の付け方は、残りの4つの数字の円順列であるから  $(4-1)!$  通り

よって、求める総数は  $5 \times (4-1)! = 30$  (通り)

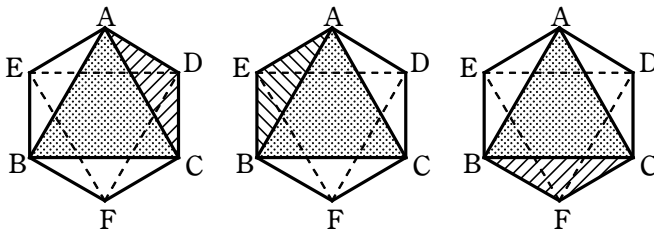


- (2) 面 ABC を赤に塗るとすると、赤に塗るもう1つの選び方は、残りの7つの面の7通りある。

このうち、赤に塗るもう1つの面が、面 ABC と1辺を共有する面、すなわち

面 ACD または 面 AEB または 面 BCF

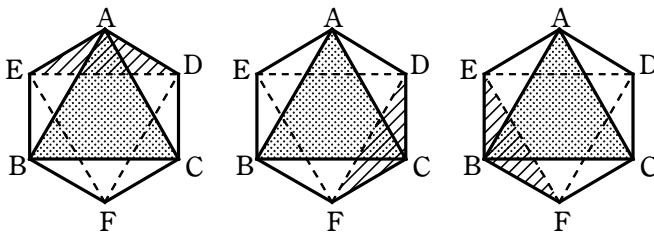
である場合、この3つの塗り方はすべて回転すると一致する。



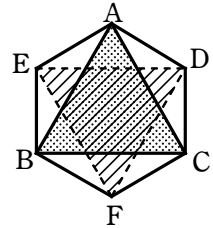
同様に、赤に塗るもう1つの面が、面 ABC と頂点のみを共有する面、すなわち

面 ADE または 面 CDF または 面 EBF

である場合、この3つの塗り方はすべて回転すると一致する。



また、赤に塗るもう1つの面が、面 ABC の対面 DEF である場合、この塗り方は他のどの塗り方とも一致しない。  
したがって、求める場合の数は 3通り



- (3) (2) の3通りの場合について、赤に塗るもう1つの面の選び方を考える。

[1] 面 ABC と、面 ABC と1辺を共有する面 ACD を赤に塗るとき

赤に塗るもう1つの面の選び方は、残りの6つの面の6通りあるが、回転しても一致しない塗り方は、次の (i), (ii) の2通りある。

- (i) 面 ADE または 面 AEB または 面 BCF または 面 CDF の場合
- (ii) 面 DEF または 面 EBF の場合

[2] 面 ABC と、面 ABC と頂点のみを共有する面 ADE を赤に塗るとき

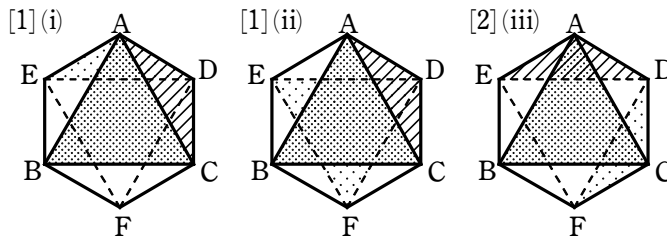
赤に塗るもう1つの面の選び方のうち、回転しても一致しない塗り方は、次の (i), (ii), (iii) の3通りある。

- (i) 面 ACD または 面 AEB の場合
- (ii) 面 BCF または 面 DEF の場合
- (iii) 面 CDF または 面 EBF の場合

ところが、[2] の (i) の塗り方は [1] の (i) の塗り方と同じであり、[2] の (ii) の塗り方は [1] の (ii) の塗り方と同じである。

[3] 面 ABC と対面 DEF を赤に塗るとき

赤に塗るもう1つの面をどのように選んでも、[1] の (ii) と同じ塗り方になる。



したがって、求める場合の数は 3通り

[16] A 地点が原点、B 地点が (9, 5)、各交差点が格子点になるように座標軸をとる。

- (1) A 地点から  $y=1$  上の格子点への上り方は 10通り。

同様に、 $y=k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) 上の格子点から  $y=k+1$  上の格子点への上り方は、各  $k$  に対して 10通りずつある。

よって、求める総数は  $10^5 = 100000$  (通り)

- (2) 点 C (5, 3) を通る行き方は、次の [1], [2], [3] のいずれかである。

# 数学① 第6回試練 場合の数

[1] (4, 3)からCへ行く。

この行き方は  $10^2 \times 5 \times 5 \times 10 = 25000$  (通り)

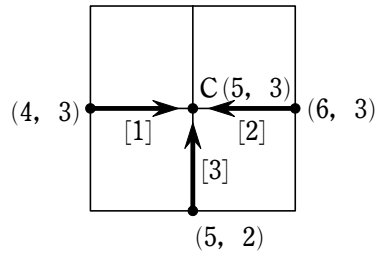
[2] (6, 3)からCへ行く。

この行き方は  $10^2 \times 4 \times 6 \times 10 = 24000$  (通り)

[3] (5, 2)からCへ行く。

この行き方は  $10^2 \times 1 \times 10^2 = 10000$  (通り)

以上から  $25000 + 24000 + 10000 = 59000$  (通り)



(3) 北, 東, 西に1区間進むことをそれぞれ $\uparrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftarrow$ で表すことにする。

16区間で行く道順は $\uparrow 5$ 個,  $\rightarrow 10$ 個,  $\leftarrow 1$ 個の順列で表される。また, 「 $\uparrow \leftarrow \uparrow$ 」という並びが必ず1個あり, この並びの前後のそれぞれに $\rightarrow$ が少なくとも1個ある。

「 $\uparrow \leftarrow \uparrow$ 」1個,  $\rightarrow 10$ 個,  $\uparrow 3$ 個の順列の総数は

$$\frac{14!}{10!3!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4004 \text{ (通り)}$$

このうち, 「 $\uparrow \leftarrow \uparrow$ 」の前に $\rightarrow$ がない順列の総数は

$$\uparrow \leftarrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

の間と両端の12か所に $\uparrow 3$ 個をおく(1か所に複数個おいてもよい)と考えて

$${}_{12}H_3 = {}_{12+3-1}C_3 = {}_{14}C_3 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 364 \text{ (通り)}$$

「 $\uparrow \leftarrow \uparrow$ 」の後ろに $\rightarrow$ がない順列の総数も同様に 364 通り

よって, 求める道順の総数は  $4004 - 364 \times 2 = 3276$  (通り)