数学①　第３回試練　三角比

BASIC問題篇

$\boxed{1}$ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。次の三角比の値を求めよ。

(1) $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$

(2) $\tan\theta = -3$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$

$\boxed{2}$ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次のような θ を求めよ。

(1) $2\sin\theta - 1 = 0$

(2) $\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

(3) $3\tan\theta = \sqrt{3}$

(4) $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

$\boxed{3}$ $\triangle$ABC において，$a = \sqrt{6}$，$A = 60^\circ$，$C = 45^\circ$ のとき，c と外接円の半径 R を求めよ。

$\boxed{4}$ $\triangle$ABC において，次のものを求めよ。

(1) $c = 4$，$a = 6$，$B = 60^\circ$ のとき　b

(2) $a = 3$，$b = \sqrt{2}$，$c = \sqrt{17}$ のとき　C

$\boxed{5}$ $\triangle$ABC において，AB$=2$，BC$=\sqrt{7}$，CA$=3$ とする。$\triangle$ABC の外接円の半径 R と，内接円の半径 r を求めよ。

STANDARD問題篇

$\boxed{6}$ θ が $0^\circ < \theta < 90^\circ$ かつ $\cos\theta - \sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たすとき，$\cos\theta + \sin\theta$，$\cos^3\theta + \sin^3\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{7}$ 円に内接する四角形 ABCD において，AB$=2$，BC$=2$，CD$=3$，DA$=4$ とする。
次の値を求めよ。

(1) ACの長さ

(2) 四角形 ABCD の面積

(3) 2つの対角線 AC と BD の交点を E とすると BE：ED の比

$\boxed{8}$ $a = 5$，$b = 6$，$c = 4$ の $\triangle$ABC がある。頂角 A の二等分線と辺 BC の交点を D，辺 BC の中点を M とするとき，線分 AD，AM の長さを求めよ。

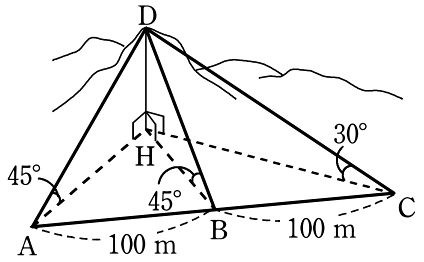
$\boxed{9}$ $\triangle$ABC が次の条件を満たすとすれば，どんな三角形か。

(1) $\sin A = \sin B$

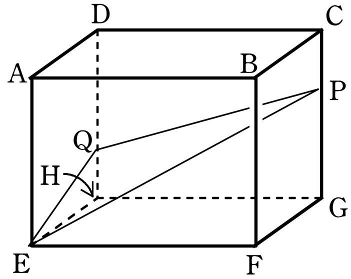
(2) $\sin A\cos A = \sin B\cos B$

実戦問題篇

10　右の図のように１つの直線上に並ぶ水平面上の３点 A，B，C から山頂 D の仰角を測ると，それぞれ 45°，45°，30° であったという。
AB＝100 m，BC＝100 m であるとき，山の高さを求めよ。



11　AB＝4，AE＝AD＝3 である直方体 ABCD−EFGH において，辺 CG と辺 HD を 1：2 に内分する点をそれぞれ P と Q とする。このとき，
EP＝ア$\boxed{}$ で，cos∠EQP＝イ$\boxed{}$ である。
さらに，△EPQ の面積はウ$\boxed{}$ で，三角錐 AEPQ の体積はエ$\boxed{}$ である。また，点 A から △EPQ に下ろした垂線の長さはオ$\boxed{}$ である。



12　△ABC において，頂角 ∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C とし，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とする．次の関係式が成立するとき，△ABC はどのような形の三角形か．

$$a\sin A(\sin B-\sin C)=b\sin^2 B-(b+c)\sin B\sin C-c\cos^2 C+c$$

13　四角形 ABCD において，3 辺の長さをそれぞれ AB＝5，BC＝8，CD＝4，対角線 AC の長さを AC＝7 とする。

このとき，$\cos\angle ABC=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

ここで，四角形 ABCD は台形であるとする。

次の $\boxed{\text{オ}}$ には下の ⓪～② から，$\boxed{\text{カ}}$ には ③，④ から当てはまるものを一つずつ選べ。

CD $\boxed{\text{オ}}$ AB･sin∠ABC であるから，$\boxed{\text{カ}}$ である。

⓪　＜　　①　＝　　②　＞

③　辺 AD と辺 BC が平行　　④　辺 AB と辺 CD が平行

したがって，BD＝$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ である。

数学① 第３回試練 三角比

$\boxed{1}$ 解答 (1) $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (2) $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\boxed{2}$ 解答 (1) $\theta=30°$，$150°$ (2) $\theta=135°$ (3) $\theta=30°$ (4) $\theta=60°$，$180°$

$\boxed{3}$ 解答 $c=2$，$R=\sqrt{2}$

$\boxed{4}$ 解答 (1) $b=2\sqrt{7}$ (2) $C=135°$

$\boxed{5}$ 解答 $R=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$，$r=\dfrac{\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{6}$

$\boxed{6}$ 解答 $\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，$\cos^3\theta+\sin^3\theta=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$

$\boxed{7}$ 解答 (1) $\dfrac{7}{2}$ (2) $\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$ (3) $1:3$

$\boxed{8}$ 解答 $\mathrm{AD}=3\sqrt{2}$，$\mathrm{AM}=\dfrac{\sqrt{79}}{2}$

$\boxed{9}$ 解答 (1) BC＝CA の二等辺三角形

(2) BC＝CA の二等辺三角形 または ∠C＝90° の直角三角形

$\boxed{10}$ 解答 100 m

$\boxed{11}$ 解答 (ア) $\sqrt{29}$ (イ) $-\dfrac{1}{\sqrt{170}}$ (ウ) $\dfrac{13}{2}$ (エ) 6 (オ) $\dfrac{36}{13}$

$\boxed{12}$ 解答 AB＝AC の二等辺三角形，または ∠B＝90° の直角三角形

$\boxed{13}$ 解答 $\dfrac{(ア)}{(イ)}$ $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{\sqrt{(ウ)}}{(エ)}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (オ) ⓪ (カ) ④ (キ)$\sqrt{(ク)}$ $4\sqrt{7}$

1 (1) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta>0$ であるから　$\cos\theta>0$ で

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(2) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-3)^2=10$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{10}$

$\tan\theta<0$ であるから　$\cos\theta<0$ で

$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

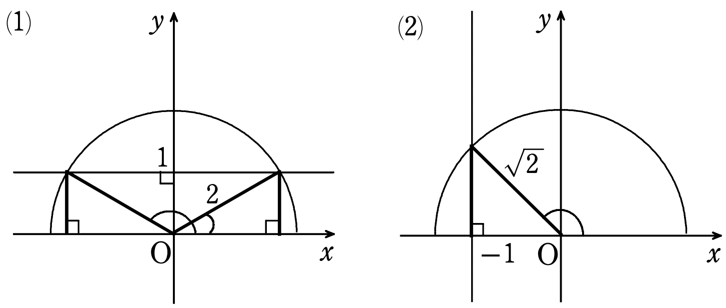
$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=-3\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

2 (1) $2\sin\theta-1=0$ から　　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

よって　　$\theta=30°,\ 150°$

(2) $\sqrt{2}\cos\theta+1=0$ から　　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　$\theta=135°$



(3) $3\tan\theta=\sqrt{3}$ から　　$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　　$\theta=30°$

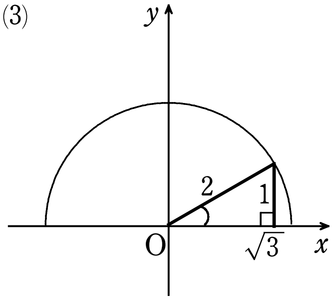
(4) $(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$ から　　$\cos\theta+1=0$　または　$2\cos\theta-1=0$

すなわち　　$\cos\theta=-1,\ \dfrac{1}{2}$

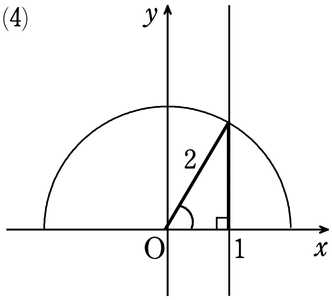
$\cos\theta=-1$ のとき　$\theta=180°$，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\theta=60°$

よって　　$\theta=60^\circ,\ 180^\circ$

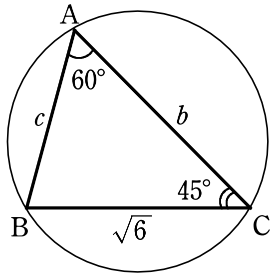
(3)



(4)



$\boxed{3}$ 正弦定理から　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{c}{\sin 45^\circ}$



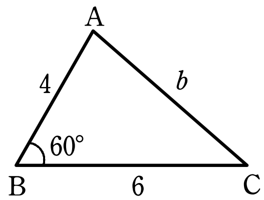
$$c=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ=\sqrt{6}\div\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{6}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=2$$

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{\sqrt{6}}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

$\boxed{4}$ (1)　余弦定理により



$$b^2=4^2+6^2-2\cdot4\cdot6\cos 60^\circ$$

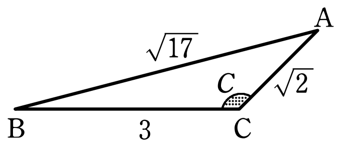
$$=16+36-2\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2}$$

$$=52-24=28$$

$b>0$ であるから

$$b=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$$

(2)　余弦定理により



$$\cos C=\frac{3^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{17})^2}{2\cdot3\sqrt{2}}$$

$$=\frac{9+2-17}{2\cdot3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　　$C=135^\circ$

$\boxed{5}$ 余弦定理により　　$\cos A=\dfrac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot2\cdot3}=\dfrac{1}{2}$

よって　　$A=60^\circ$

正弦定理により　　$2R=\dfrac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}$

ゆえに　　$R=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

また，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ に代入して　$\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}r(\sqrt{7}+3+2)$

ゆえに　$r=\frac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{(5+\sqrt{7})(5-\sqrt{7})}=\frac{\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{6}$

6 $\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=\frac{1}{4}$$

すなわち　$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

ここで　$(\cos\theta+\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$

$$=1+2\cdot\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$ であるから

$$\cos\theta+\sin\theta>0$$

ゆえに　$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

また　$\cos^3\theta+\sin^3\theta=(\cos\theta+\sin\theta)(\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{8}\right)=\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

7 (1)　△ABC に余弦定理を適用すると

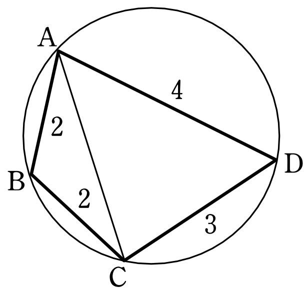
$AC^2=2^2+2^2-2\cdot 2\cdot 2\cos B=8-8\cos B$　…… ①

△ACD に余弦定理を適用すると

$AC^2=4^2+3^2-2\cdot 4\cdot 3\cos D=25-24\cos D$　…… ②

四角形 ABCD は円に内接するから　$D=180^\circ-B$

…… ③



①，②，③ から　$8-8\cos B=25+24\cos B$

したがって　$32\cos B=-17$　　$\cos B=-\frac{17}{32}$

① に代入して　$AC^2=\frac{49}{4}$

$AC>0$ であるから　$AC=\frac{7}{2}$

(2)　(1) から　$\sin B=\sqrt{1-\left(-\frac{17}{32}\right)^2}=\frac{7\sqrt{15}}{32}=\sin D$

よって　四角形 ABCD の面積を S とすると

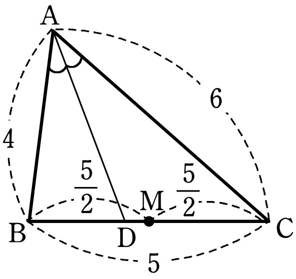
$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin B+\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sin D=8\cdot\dfrac{7\sqrt{15}}{32}=\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

(3)　BE：ED＝△ABC：△ACD

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin B:\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sin D=2\sin B:6\sin B=1:3$

$\boxed{8}$ △ABC に余弦定理を適用して



$$\cos B=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{8}$$

また　　AD は頂角 A の二等分線であるから

BD：DC＝AB：AC＝4：6＝2：3

したがって　$BD=\dfrac{2}{5}BC=\dfrac{2}{5}\cdot 5=2$

よって　△ABD に余弦定理を適用すると

$$AD^2=4^2+2^2-2\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{8}=18$$

$AD>0$ であるから　$AD=3\sqrt{2}$

△ABM に余弦定理を適用して

$$AM^2=4^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\cdot 4\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{79}{4}$$

$AM>0$ であるから　$AM=\dfrac{\sqrt{79}}{2}$

$\boxed{9}$ (1)　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$\sin A=\frac{a}{2R},\quad \sin B=\frac{b}{2R}$$

$\sin A=\sin B$ から　$\dfrac{a}{2R}=\dfrac{b}{2R}$　　すなわち　$a=b$

よって，△ABC は BC＝CA の二等辺三角形である。

(2)　正弦定理により　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$

また，余弦定理により　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\sin A\cos A=\sin B\cos B$ から　$\dfrac{a}{2R}\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

よって　$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$　　すなわち　$a^2c^2-a^4=b^2c^2-b^4$

ゆえに　$(a^2-b^2)(a^2+b^2)-(a^2-b^2)c^2=0$

よって　$(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$

$a>0$，$b>0$ であるから　$a=b$　または　$a^2+b^2=c^2$

したがって，△ABC は BC＝CA の二等辺三角形 または ∠C＝90° の直角三角形である。

$\boxed{10}$ 山の高さを DH＝x (m) とすると　　HA＝x，HB＝x，HC＝$\sqrt{3}\,x$

△HAB において，余弦定理により　　$\cos A=\dfrac{100^2+x^2-x^2}{2\cdot 100\cdot x}$　　……①

△HAC において，余弦定理により　　$\cos A=\dfrac{200^2+x^2-(\sqrt{3}\,x)^2}{2\cdot 200\cdot x}$　　……②

①，② から　　$\dfrac{100^2+x^2-x^2}{2\cdot 100\cdot x}=\dfrac{200^2+x^2-(\sqrt{3}\,x)^2}{2\cdot 200\cdot x}$

整理すると　　$x^2=10000$　　$x>0$ であるから　　$x=100$

したがって，山の高さは　　100 m

11 条件から　CP＝HQ＝1，GP＝DQ＝2

（ア）　$EG=\sqrt{4^2+3^2}=5$ であるから

$$EP=\sqrt{EG^2+GP^2}=\sqrt{5^2+2^2}={}^{ア}\sqrt{29}$$

（イ）　$EQ=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，　$PQ=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$

△EPQ において，余弦定理により

$$\cos\angle EQP=\frac{EQ^2+PQ^2-EP^2}{2EQ\cdot PQ}=\frac{10+17-29}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}}={}^{イ}-\frac{1}{\sqrt{170}}$$

（ウ）　$\sin\angle EQP>0$ であるから

$$\sin\angle EQP=\sqrt{1-\cos^2\angle EQP}=\sqrt{1-\frac{1}{170}}=\frac{13}{\sqrt{170}}$$

よって　$\triangle EPQ=\frac{1}{2}EQ\cdot PQ\sin\angle EQP=\frac{1}{2}\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}\cdot\frac{13}{\sqrt{170}}={}^{ウ}\frac{13}{2}$

（エ）　三角錐 AEPQ の底面を △AEQ とすると，高さは 4 である。

よって，三角錐 AEPQ の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle AEQ\times 4=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right)\times 4={}^{エ}6$$

（オ）　A から △EPQ に下ろした垂線の長さを h とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle EPQ\times h=\frac{13}{6}h$$

よって　$\frac{13}{6}h=6$　　ゆえに　$h={}^{オ}\frac{36}{13}$

12 $\cos^2 C=1-\sin^2 C$

△ABC の外接円の半径を R とする．正弦定理を適用すると

$$a\cdot\frac{a}{2R}\left(\frac{b}{2R}-\frac{c}{2R}\right)=b\left(\frac{b}{2R}\right)^2-(b+c)\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}-c\left\{1-\left(\frac{c}{2R}\right)^2\right\}+c$$

両辺に $4R^2$ を掛けると　$a^2(b-c)=b^3-(b+c)bc+c^3$

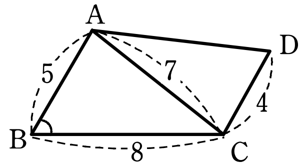
ゆえに　$a^2(b-c)=b^2(b-c)-c^2(b-c)$

したがって　$(b-c)(a^2-b^2+c^2)=0$

よって　$b=c$　または　$a^2+c^2=b^2$

ゆえに，△ABC は，AB＝AC の二等辺三角形，または ∠B＝90° の直角三角形.

13 △ABC において，余弦定理により



$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 8}$$

$$=\frac{40}{2\cdot 5\cdot 8}=\frac{1}{2}$$

よって，∠ABC＝60° であるから　$\sin\angle ABC=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ここで　CD＝4

$$\mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}=5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{5\cdot 1.7}{2}=4.25$$

よって　CD＜AB・sin∠ABC　……①（⓪）

四角形 ABCD が台形であるとき AD∥BC または AB∥CD が成り立つ。

頂点 A から辺 BC に下ろした垂線を AH とすると，① から

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}>\mathrm{CD}\quad\cdots\cdots②$$

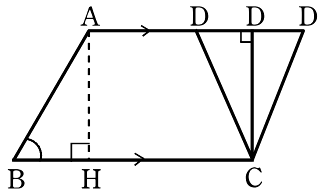
AD∥BC が成り立つと仮定すると，右の図のように

$$\mathrm{AH}\leqq\mathrm{CD}$$

となるが，これは ② に矛盾する。

よって，AD∥BC は成り立たないから，AB∥CD となる。

すなわち，辺 AB と辺 CD が平行である。（④）



右の図のように，辺 BCの延長上に点 E をとる。

AB∥CD から　∠DCE＝∠ABC＝60°

△BCD において，余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{BCD}$$

$$=8^2+4^2-2\cdot 8\cdot 4\cos(180^\circ-60^\circ)=112$$

BD＞0 であるから　$\mathrm{BD}=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$