数学②　第１回試練　三角関数　　　　1 / 12

BASIC問題

$\boxed{1}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan\theta = \sqrt{3}$

$\boxed{2}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$2\cos\theta \leqq -\sqrt{2}$　　(2)　$-\sqrt{2}\sin\theta + 1 \geqq 0$　　(3)　$\sqrt{3}\tan\theta - 1 < 0$

$\boxed{3}$ α，β，γ は鋭角で，$\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 5$，$\tan\gamma = 8$ であるとき，次の値を求めよ。

(1)　$\tan(\alpha + \beta + \gamma)$　　(2)　$\alpha + \beta + \gamma$

$\boxed{4}$ $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の式の値を求めよ。

(1)　$\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{12} + \cos\dfrac{\pi}{12}$　　(2)　$\sin\dfrac{5}{12}\pi - \cos\dfrac{5}{12}\pi$

$\boxed{6}$ $2\sin 4\theta\cos 2\theta$ を和の形，$\cos 5\theta + \cos 3\theta$ を積の形にせよ。

Standard問題

$\boxed{7}$ $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における 関数 $y = 3\sin x + 4\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

また，最大値を与える x に対する $\tan x$ の値を求めよ。

$\boxed{8}$ 関数 $y = \sin x + \cos x + 2\sin x\cos x + 1$ の最大値，最小値を求めよ。

$\boxed{9}$ 次の関数の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$$y = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

$\boxed{10}$ $\theta = 18^\circ$ のとき，$\sin 2\theta = \cos 3\theta$ であることを示せ。また，これを利用して，$\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

$\boxed{11}$ 次の値を求めよ。

(1)　$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$　　(2)　$\sin 20^\circ + \sin 140^\circ + \sin 260^\circ$

実戦問題

12 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$　　(2) $\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) > 1$　　(4) $\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq -\dfrac{1}{2}$

13 a を定数とする。x についての方程式 $\cos^2 x + 2a\sin x - a - 1 = 0$ の $0 \leqq x < 2\pi$ における異なる実数解の個数が2個となるための a の条件を求めよ。

14 地上にいる人が，高さ 200 m の高層ビルの屋上に立っている高さ 50 m の鉄塔を見る。鉄塔の上端を A，この人を B，鉄塔の下端を C とするとき，∠ABC が最大となるのはこの人がビルから何 m 離れたときか。ただし，この人の身長は無視することとし，また，ビルや鉄塔の水平方向の大きさも無視する。

15 以下の問いに答えよ。必要ならば，等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を利用してよい。

(1) $2\cos 80°$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ。

(2) $x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80°)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$ となる角度 α，β を求めよ。ただし $0° < \alpha < \beta < 180°$ とする。

16 次の関係式が成り立つとき，△ABC はどのような形の三角形か。

$$\cos A + \cos B = \sin C$$

数学②　第１回試練　三角関数

$\boxed{1}$ 解答 (1) $\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$　(2) $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$　(3) $\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$

$\boxed{2}$ 解答 (1) $\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$　(2) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

(3) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

$\boxed{3}$ 解答 (1) 1　(2) $\frac{5}{4}\pi$

$\boxed{4}$ 解答 $\sin 2\alpha=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$，$\cos 2\alpha=\frac{7}{9}$，$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

$\boxed{5}$ 解答 (1) $\sqrt{2}$　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{6}$ 解答 順に　$\sin 6\theta+\sin 2\theta$，$2\cos 4\theta\cos\theta$

$\boxed{7}$ 解答 最大値 5，最小値 3　（後半）$\tan x=\frac{3}{4}$

$\boxed{8}$ 解答 最大値 $2+\sqrt{2}$，最小値 $-\frac{1}{4}$

$\boxed{9}$ 解答 $x=\frac{\pi}{8}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$，$x=\frac{5}{8}\pi$ で最小値 $2-\sqrt{2}$

$\boxed{10}$ 解答 (前半) 略　(後半) $\sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$\boxed{11}$ 解答 (1) $\frac{1}{8}$　(2) 0

$\boxed{12}$ 解答 (1) $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi$　(2) $\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(3) $\frac{5}{12}\pi<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{17}{12}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$　(4) $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi$

$\boxed{13}$ 解答 $a<-\frac{1}{3}$，$a=0$，$1<a$ のとき 2 個

$\boxed{14}$ 解答 $100\sqrt{5}$ m

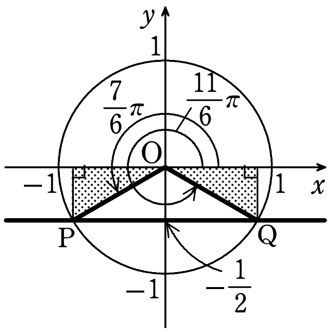
$\boxed{15}$ 解答 (1) 略　(2) $\alpha=40^\circ$，$\beta=160^\circ$

$\boxed{16}$ 解答 $\angle A=\frac{\pi}{2}$ または $\angle B=\frac{\pi}{2}$ の直角三角形

1 (1) 直線 $y=-\frac{1}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，

求める θ は，動径 OP，OQ の表す角であるから

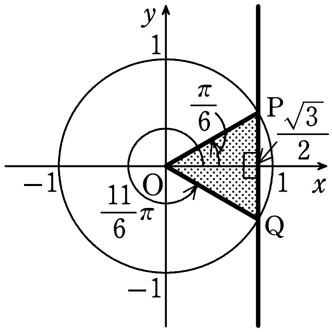
$$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$



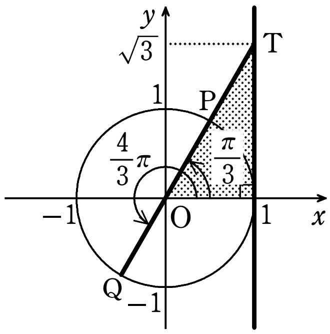
(2) 直線 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，

求める θ は，動径 OP，OQ の表す角であるから

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$$



(3) 点 $\mathrm{T}(1,\ \sqrt{3})$ をとり，直線 OT と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角であるから　　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$



2 (1) 不等式を変形して　　$\cos\theta \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

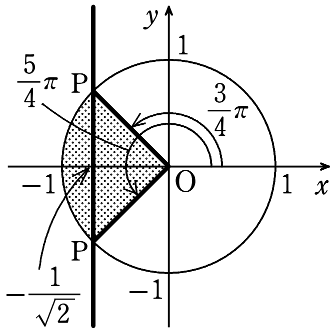
$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の

値は　　$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。

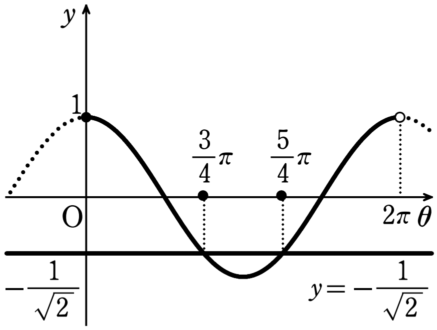
ゆえに，θ の値の範囲は

$$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$$



別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y=\cos\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 上またはそれより下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，右の図から　$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$



(2)　不等式を変形して　$\sin\theta\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

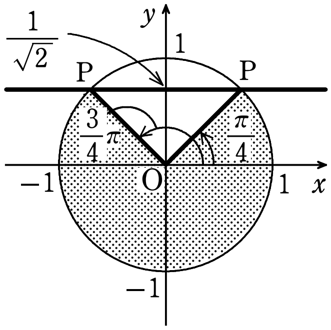
$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値は

$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$

よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。

ゆえに，θ の値の範囲は

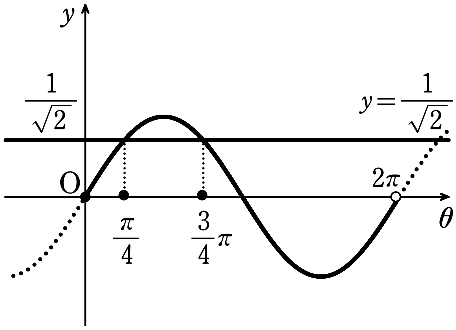
$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$$



別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y=\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 上またはそれより下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，右の図から

$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$$



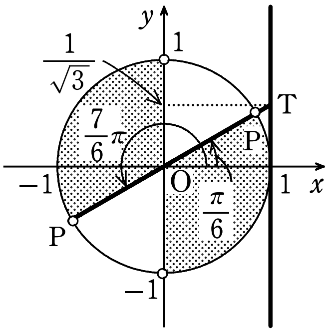
(3)　不等式を変形して　$\tan\theta<\frac{1}{\sqrt{3}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ の値は

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$$

よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。

ゆえに，θ の値の範囲は

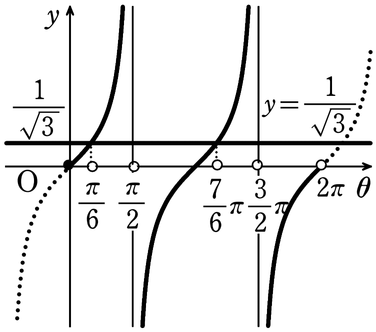


$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$

別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y=\tan\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ のグラフが，直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，右の図から

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$



$\boxed{3}$ (1)　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2+5}{1-2\cdot5}=-\dfrac{7}{9}$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=\frac{-\frac{7}{9}+8}{1-\left(-\frac{7}{9}\right)\cdot 8}=1$$

(2)　α，β，γ は鋭角であるから　　$0<\alpha+\beta+\gamma<\dfrac{3}{2}\pi$

$\tan(\alpha+\beta)<0$ であるから，$\alpha+\beta$ は第２象限にある。

さらに，$\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}>0$ であるから，$(\alpha+\beta)+\gamma$ は第３象限にある。

よって，$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=1$ より　　$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi$

$\boxed{4}$ $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから　　$\cos\alpha<0$

ゆえに　　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

また　　$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{7}{9}$

次に　　$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right\}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}$

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ より，$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$

したがって　　$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

$\boxed{5}$ (1)　$\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{12}+\cos\dfrac{\pi}{12}=2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\dfrac{\pi}{4}=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

(2)　$\sin\dfrac{5}{12}\pi-\cos\dfrac{5}{12}\pi=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{5}{12}\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{6}$ $2\sin 4\theta\cos 2\theta=2\cdot\dfrac{1}{2}\{\sin(4\theta+2\theta)+\sin(4\theta-2\theta)\}=\sin 6\theta+\sin 2\theta$

$\cos 5\theta+\cos 3\theta=2\cos\dfrac{5\theta+3\theta}{2}\cos\dfrac{5\theta-3\theta}{2}=2\cos 4\theta\cos\theta$

$\boxed{7}$ （前半）

$y=3\sin x+4\cos x=5\sin(x+\alpha)$　　ただし　$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$

$\alpha\leqq x+\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ より，$x+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　最大値　5

$x+\alpha=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$　つまり $x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　最小値　3

（後半）

$\tan x=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{3}{4}$

$\boxed{8}$ $\sin x+\cos x=t$ とおく。
この式の両辺を２乗すると

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$$

よって　$2\sin x\cos x=t^2-1$
したがって

$$y=t+(t^2-1)+1=t^2+t=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

また，$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

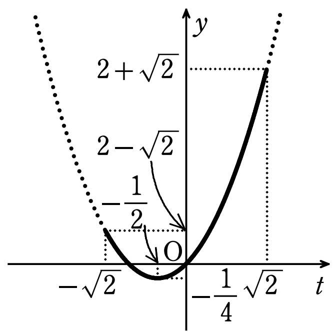
$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}\ \cdots\cdots ①$$

① の範囲で y は

$t=\sqrt{2}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$，

$t=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 $-\dfrac{1}{4}$

をとる。



$\boxed{9}$ $y=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2}+3\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\sin 2x+\cos 2x+2$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$

$2x+\dfrac{\pi}{4}=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq\pi$ から　$\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{9}{4}\pi$　$\cdots\cdots$ ①
① の範囲において，$y=\sqrt{2}\sin t+2$ は

$t=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$ をとり，

$t=\dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 $2-\sqrt{2}$ をとる。

$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $x=\dfrac{\pi}{8}$，$t=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき $x=\dfrac{5}{8}\pi$ であるから，この関数は

$x=\dfrac{\pi}{8}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$ をとり，

$x=\dfrac{5}{8}\pi$ で最小値 $2-\sqrt{2}$ をとる。

10 $\theta=18°$ のとき　$5\theta=90°$　よって，$2\theta+3\theta=90°$ より，$2\theta=90°-3\theta$ であるから

$\sin 2\theta=\sin(90°-3\theta)=\cos 3\theta$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，$\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$ であるから

$$2\sin\theta\cos\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$$

$\cos\theta\neq 0$ であるから　$2\sin\theta=-3+4\cos^2\theta$

よって　$2\sin\theta=-3+4(1-\sin^2\theta)$

整理して　$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$　これを解いて　$\sin\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

参考　3 倍角の公式　$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$，$\cos 3\alpha=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$

[証明]　$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$

$=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$

$=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha$

$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha$

$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha$

$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$

$=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$

11 (1)　$\cos 20°\cos 40°\cos 80°=\dfrac{1}{2}(\cos 60°+\cos 20°)\cos 80°$

$=\dfrac{1}{4}\cos 80°+\dfrac{1}{2}\cos 20°\cos 80°$

$=\dfrac{1}{4}\cos 80°+\dfrac{1}{4}(\cos 100°+\cos 60°)$

$=\dfrac{1}{4}\cos 80°+\dfrac{1}{4}\cos(180°-80°)+\dfrac{1}{8}$

$=\dfrac{1}{4}\cos 80°-\dfrac{1}{4}\cos 80°+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{8}$

(2)　$\sin 20°+\sin 140°+\sin 260°=(\sin 20°+\sin 260°)+\sin 140°$

$=2\sin 140°\cos 120°+\sin 140°$

$=-\sin 140°+\sin 140°=0$

12 (1)　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\sin t=-\dfrac{1}{2}$　…… ①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$-\frac{\pi}{3} \leqq \theta - \frac{\pi}{3} < 2\pi - \frac{\pi}{3}$　すなわち　$-\frac{\pi}{3} \leqq t < \frac{5}{3}\pi$

この範囲で，① を解くと　$t = -\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$　すなわち　$\theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

よって　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi$

(2)　$2\theta + \frac{\pi}{3} = t$ とおくと　$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$　……①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$\frac{\pi}{3} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{3} < 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}$　すなわち　$\frac{\pi}{3} \leqq t < \frac{13}{3}\pi$

この範囲で，① を解くと　$t = \frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi$

すなわち　$2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi$

よって　$\theta = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(3)　$\theta - \frac{\pi}{6} = t$ とおくと　$\tan t > 1$　……①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$-\frac{\pi}{6} \leqq \theta - \frac{\pi}{6} < 2\pi - \frac{\pi}{6}$

すなわち　$-\frac{\pi}{6} \leqq t < \frac{11}{6}\pi$　……①

この範囲で，① を解くと　$\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi < t < \frac{3}{2}\pi$

すなわち　$\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{3}{2}\pi$

よって　$\frac{5}{12}\pi < \theta < \frac{2}{3}\pi,\ \frac{17}{12}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$

(4)　$2\theta + \frac{\pi}{6} = t$ とおくと　$\sin t \leqq -\frac{1}{2}$　……①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} < 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}$

すなわち　$\frac{\pi}{6} \leqq t < \frac{25}{6}\pi$

この範囲で，① を解くと　$\frac{7}{6}\pi \leqq t \leqq \frac{11}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi \leqq t \leqq \frac{23}{6}\pi$

すなわち　$\frac{7}{6}\pi \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{11}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{23}{6}\pi$

よって　$\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq \frac{11}{6}\pi$

$\boxed{13}$ $\sin x = t$ とおくと，方程式は　$(t-a)^2 - a^2 + a = 0$
また，$0 \leqq x < 2\pi$ より　$-1 \leqq t \leqq 1$

よって，$f(t)=(t-a)^2-a^2+a=0$ の $-1\leqq t\leqq 1$ における実数解の個数を調べればよい。ただし，$\sin x=t$ を満たす x は，$t\fallingdotseq\pm1$ であれば 2 つあり，$t=\pm1$ であれば 1 つある。

[1]　$f(1)=-a+1=0$ のとき

$a=1$ であるから　　$f(t)=(t-1)^2$

よって，$f(t)=0$ は重解 $t=1$ をもつ。したがって，x の実数解は 1 個。

[2]　$f(-1)=3a+1=0$ のとき

$a=-\dfrac{1}{3}$ であるから　　$f(t)=\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{4}{9}$

$f(t)=0$ すなわち $t^2+\dfrac{2}{3}t-\dfrac{1}{3}=0$ を解くと　$t=-1,\ \dfrac{1}{3}$

したがって，x の実数解は 3 個。

[3]　$f(t)=0$ が $-1<t<1$ に実数解を 2 つもつとき

$$\begin{cases} -1<a<1 \text{ かつ } -a^2+a<0 \text{（頂点の位置から）} \\ f(1)=-a+1>0 \\ f(-1)=3a+1>0 \end{cases}$$

この連立不等式を解くと　　$-\dfrac{1}{3}<a<0$

このとき，x の実数解は 4 個。

[4]　$f(t)=0$ が $-1<t<1$ に実数解を 1 つもつとき

このときは，次の (ア) か (イ) のどちらかである。

(ア)　$f(t)=0$ が $-1<t<1$ に重解をもつ。

(イ)　$f(1)f(-1)<0$

(ア) のとき，$-a^2+a=0$ を満たすから　　$a=0,\ 1$

$a=0$ のとき $f(t)=t^2$ であるから，確かに重解 $t=0$ を $-1<t<1$ にもつ。

このとき，x の実数解は 2 個。

$a=1$ のとき $f(t)=(t-1)^2$ であるから，$-1<t<1$ には解をもたない。

(イ) のとき　　$(-a+1)(3a+1)<0$

よって　　　$a<-\dfrac{1}{3},\ 1<a$

このとき，x の実数解は 2 個。

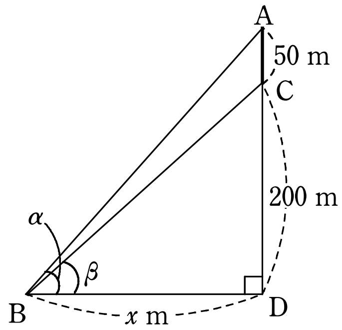
まとめると　$-\dfrac{1}{3}<a<0$ のとき 4 個，　$a=-\dfrac{1}{3}$ のとき 3 個，

$a<-\dfrac{1}{3},\ a=0,\ 1<a$ のとき 2 個，

$a=1$ のとき 1 個，　$0<a<1$ のとき 0 個

以上より，解が2個となる条件は　$a<-\dfrac{1}{3},\ a=0,\ 1<a$

14 人がビルから x m 離れているとする。
また，ビルの下端を D とし，右の図のように，
$\angle\mathrm{ABD}=\alpha$，$\angle\mathrm{CBD}=\beta$ とすると



$$\tan\alpha=\frac{250}{x},\quad \tan\beta=\frac{200}{x}$$

したがって

$$\tan\angle\mathrm{ABC}=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{250}{x}-\dfrac{200}{x}}{1+\dfrac{250}{x}\cdot\dfrac{200}{x}}=\frac{\dfrac{50}{x}}{1+\dfrac{50000}{x^2}}$$

$$=\frac{50}{x+\dfrac{50000}{x}}$$

$x>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{50000}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{50000}{x}}=200\sqrt{5}$$

等号が成り立つのは，$x=\dfrac{50000}{x}$ かつ $x>0$，すなわち $x=100\sqrt{5}$ のときである。

$0<\angle\mathrm{ABC}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\tan\angle\mathrm{ABC}$ が最大のとき，$\angle\mathrm{ABC}$ も最大である。

したがって，人がビルから $100\sqrt{5}$ m 離れたとき，$\angle\mathrm{ABC}$ は最大となる。

15 参考　$\cos3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos2\theta\cos\theta-\sin2\theta\sin\theta$

$$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta\cdot\sin\theta$$

$$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

(1)　$(2\cos80^\circ)^3-3\cdot2\cos80^\circ+1$

$$=8\cos^3 80^\circ-6\cos80^\circ+1=2(4\cos^3 80^\circ-3\cos80^\circ)+1$$

$$=2\cos(3\times80^\circ)+1=2\cos240^\circ+1=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0$$

よって，$2\cos80^\circ$ は $x^3-3x+1=0$ の解である。

(2)　$(2\cos\theta)^3-3\cdot2\cos\theta+1=0$

$$\Longleftrightarrow 2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+1=0$$

$$\Longleftrightarrow 2\cos3\theta+1=0 \Longleftrightarrow \cos3\theta=-\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，① を満たす θ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ を求めると，$0^\circ<3\theta<540^\circ$ であるから

$3\theta=120^\circ,\ 240^\circ,\ 480^\circ$　　よって　$\theta=40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ$

ゆえに，$2\cos40^\circ$，$2\cos160^\circ$ は $x^3-3x+1=0$ の $2\cos80^\circ$ 以外の 2 つの解である。

$\alpha<\beta$ であるから　$\alpha=40^\circ$，$\beta=160^\circ$

16 $A+B+C=\pi$ ……① であるから　$A+B=\pi-C$

よって　$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

また　$\sin C=\sin\left(2\cdot\frac{C}{2}\right)=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

ゆえに，等式 $\cos A+\cos B=\sin C$ から　$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\sin\frac{C}{2}\neq 0$ であるから　$\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C}{2}$

この等式を更に変形すると　$\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C}{2}=0$

$$-2\sin\frac{A-B+C}{4}\sin\frac{A-B-C}{4}=0$$

$$\sin\frac{(A+C)-B}{4}\sin\frac{A-(B+C)}{4}=0 \quad \cdots\cdots ②$$

A，B，C は三角形の内角であるから

$0<A+C<\pi$，$0<B<\pi$

したがって，$-\pi<(A+C)-B<\pi$ から

$$-\frac{\pi}{4}<\frac{(A+C)-B}{4}<\frac{\pi}{4}$$

同様に考えて　$-\frac{\pi}{4}<\frac{A-(B+C)}{4}<\frac{\pi}{4}$

よって，② から

$\frac{(A+C)-B}{4}=0$　すなわち　$A-B+C=0$　……③

$\frac{A-(B+C)}{4}=0$　すなわち　$A-B-C=0$　……④

①−③ から　$2B=\pi$　すなわち　$B=\frac{\pi}{2}$

①＋④ から　$2A=\pi$　すなわち　$A=\frac{\pi}{2}$

したがって，△ABC は，∠A が直角または ∠B が直角の直角三角形である。

BASIC問題

$\boxed{1}$ (1) $\sqrt[3]{24}+\dfrac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{9}}$ を簡単にせよ。

(2) $\dfrac{\sqrt{2^3}\times2^2\times(2^2\times3^2)^3}{6^5\times4^2}\div\dfrac{\sqrt{2}\times2}{2^3}$ を簡単にせよ。

$\boxed{2}$ 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[6]{7}$　　(2) 2^{30}，3^{20}，10^{10}

$\boxed{3}$ $x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=3$ のとき，$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$，$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の計算をせよ。

$$\frac{1}{2}\log_3 49+\log_3\frac{12}{7}-\log_3\frac{4}{9}$$

$\boxed{5}$ (1) $\log_5 2=a$ とおくとき，$\log_{25}64$ を a で表せ。

(2) $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$ とおくとき，$\log_6 84$ を a，b で表せ。

$\boxed{6}$ 70 % の花粉を除去できるフィルターがある．99.99 % より多くの花粉を一度に除去するには，このフィルターは最低何枚必要か．ただし $\log_{10}3=0.4771$ とする．

$\boxed{7}$

Standard問題篇

$\boxed{8}$ $5^x=7^y=35^4$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の値を求めよ。

$\boxed{9}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $2^x-24\cdot2^{-x}=5$　　(2) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x+1}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+3}>\dfrac{2}{81}$

$\boxed{10}$ 次の不等式を解け。

(1) $\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqq0$　　(2) $2\log_3(x-4)-\log_3(x+6)\leqq2$

(3) $2-\log_{\frac{1}{3}}x>(\log_3 x)^2$

$\boxed{11}$ ある自然数 n に対して 2^n は 22 桁で最高位の数字が 4 となる。
$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，n の値を求めよ。また，2^n の末尾の数字を求めよ。

$\boxed{12}$ 0.15^{70} を小数で表すとき，次の問いに答えよ。

(1) 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

(2) (1)において，その初めて現れる 0 でない数字を答えよ。

ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

実戦問題篇

13 連立方程式 $\begin{cases} 8\cdot 3^x - 3^y = -27 \\ \log_2(x+1) - \log_2(y+3) = -1 \end{cases}$ を解け。

14 関数 $y=8(2^x+2^{-x})-(4^x+4^{-x})-10$ について，$2^x+2^{-x}=t$ とおくとき，y を t の式で表せ。また，y の最大値とそのときの x の値を求めよ。

15 不等式 $\log_x(2x-y+1)>2$ が表す領域を図示せよ。ただし，$x>0$ かつ $x \neq 1$ とする。

$\boxed{1}$ 解答 (1) $3\sqrt[3]{3}$ (2) 12

$\boxed{2}$ 解答 (1) $\sqrt[6]{7} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ (2) $2^{30} < 3^{20} < 10^{10}$

$\boxed{3}$ 解答 順に 7，$\sqrt{5}$

$\boxed{4}$ 解答 3

$\boxed{5}$ 解答 (1) $3a$ (2) $\dfrac{2+a+ab}{1+a}$

$\boxed{6}$ 解答 8 枚

$\boxed{8}$ 解答 $\dfrac{1}{4}$

$\boxed{9}$ 解答 (1) $x=3$ (2) $x<1$

$\boxed{10}$ 解答 (1) $1<x\leqq 2$ (2) $4<x\leqq 19$ (3) $\dfrac{1}{3}<x<9$

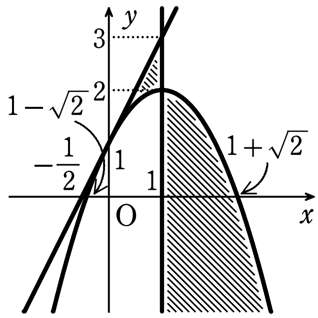
$\boxed{11}$ 解答 $n=72$，末尾の数字は 6

$\boxed{12}$ 解答 (ア) 58 (イ) 2

$\boxed{13}$ 解答 $x=3$，$y=5$

$\boxed{14}$ 解答 $y=-t^2+8t-8$，$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$ で最大値 8

$\boxed{15}$ 解答 〔図〕 境界線を含まない



1　$\sqrt[3]{24}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{3^2}-\sqrt[3]{\frac{3}{3^3}}=2\sqrt[3]{3}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{3}-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}=3\sqrt[3]{3}$

$$\frac{\sqrt{2^3}\times 2^2\times(2^2\times 3^2)^3}{6^5\times 4^2}\div\frac{\sqrt{2}\times 2}{2^3}=\frac{2^{\frac{3}{2}}\times 2^2\times 2^{2\times 3}\times 3^{2\times 3}}{(2\times 3)^5\times(2^2)^2}\times\frac{2^3}{2^{\frac{1}{2}}\times 2}$$

$$=\frac{2^{\frac{3}{2}}\times 2^2\times 2^6\times 3^6}{2^5\times 3^5\times 2^4}\times\frac{2^3}{2^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2^{\frac{3}{2}+2+6+3-5-4-\frac{3}{2}}\times 3^{6-5}=2^2\times 3^1=12$$

2　(1)　3 つの数を，それぞれ 6 乗すると

$$(\sqrt{2})^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8\text{，}(\sqrt[3]{3})^6=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9\text{，}(\sqrt[6]{7})^6=7$$

$7<8<9$ であるから　　$(\sqrt[6]{7})^6<(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$　　ゆえに　　$\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

別解　$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{3\cdot\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$，$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{2\cdot\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$，$\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{6}}$

$7<8<9$ であるから　　$7^{\frac{1}{6}}<8^{\frac{1}{6}}<9^{\frac{1}{6}}$　　すなわち　　$\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

(2)　$2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$，$3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$

$8<9<10$ であるから　　$8^{10}<9^{10}<10^{10}$　　すなわち　　$2^{30}<3^{20}<10^{10}$

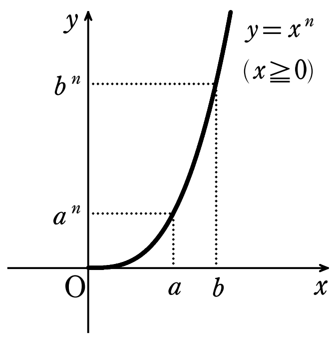
注意　解答では，次の事柄を使っている。

[1]　$a>0$，$b>0$ で，n が自然数のとき

$$a<b \iff a^n<b^n$$

[2]　$a>0$，$b>0$ で，n が自然数のとき

$$a<b \iff a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}$$



3　$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^2-2\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{4}}=\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^2-2=3^2-2=7$

$\left(x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}\right)^2=x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}+2=3+2=5$

$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}>0$ であるから　　$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}=\sqrt{5}$

4　$\frac{1}{2}\log_3 49+\log_3\frac{12}{7}-\log_3\frac{4}{9}=\log_3\left(49^{\frac{1}{2}}\times\frac{12}{7}\div\frac{4}{9}\right)=\log_3\left\{(7^2)^{\frac{1}{2}}\times\frac{12}{7}\times\frac{9}{4}\right\}$

$=\log_3\left(7\times\frac{12}{7}\times\frac{9}{4}\right)=\log_3 3^3=3$

$\boxed{5}$ (1) $\log_{25}64=\dfrac{\log_5 64}{\log_5 25}=\dfrac{6\log_5 2}{2}=3\log_5 2=3a$

(2) $\log_6 84=\dfrac{\log_2(2^2\times 3\times 7)}{\log_2(2\times 3)}=\dfrac{2+\log_2 3+\log_2 7}{1+\log_2 3}$

ここで $\log_2 7=\dfrac{\log_3 7}{\log_3 2}=\log_2 3\cdot\log_3 7=ab$ よって $\log_6 84=\dfrac{2+a+ab}{1+a}$

$\boxed{6}$ 1 枚のフィルターで 30 % の花粉が残るから，n 枚のフィルターでは 0.3^n の花粉が残る.

よって，求める条件は $0.3^n<1-0.9999$ すなわち $0.3^n<0.0001$

この両辺の常用対数をとると $n\log_{10}0.3<\log_{10}0.0001$

ゆえに $n(\log_{10}3-1)<-4$ から $n(-0.5229)<-4$

よって $n>\dfrac{4}{0.5229}=7.6\cdots\cdots$ したがって 8 枚.

$\boxed{7}$

$\boxed{8}$ $5^x=7^y=35^4$ から $\log_{10}5^x=\log_{10}7^y=\log_{10}35^4$

よって $x\log_{10}5=y\log_{10}7=4\log_{10}35$

したがって $x=\dfrac{4\log_{10}35}{\log_{10}5}$，$y=\dfrac{4\log_{10}35}{\log_{10}7}$

ゆえに $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{\log_{10}5+\log_{10}7}{4\log_{10}35}=\dfrac{\log_{10}35}{4\log_{10}35}=\dfrac{1}{4}$

$\boxed{9}$ (1) 方程式の両辺に 2^x (>0) を掛けて $(2^x)^2-24=5\cdot 2^x$

ゆえに $(2^x)^2-5\cdot 2^x-24=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は $t^2-5t-24=0$

よって $(t+3)(t-8)=0$ $t>0$ であるから $t=8$

ゆえに $2^x=8$ すなわち $2^x=2^3$

したがって $x=3$

(2) 不等式を変形すると $\dfrac{1}{9}\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2+\dfrac{1}{27}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-\dfrac{2}{81}>0$

両辺に 81 を掛けて $9\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2+3\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-2>0$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は $9t^2+3t-2>0$

よって $(3t-1)(3t+2)>0$

$3t+2>0$ であるから $3t-1>0$ すなわち $t>\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{3}$　すなわち　$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^1$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x<1$

$\boxed{10}$ (1)　真数は正であるから，$x-1>0$ かつ $3-x>0$ より　$1<x<3$　……①

$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)=\dfrac{\log_2(3-x)}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2(3-x)$ であるから，不等式は

$$\log_2(x-1)-\log_2(3-x)\leqq 0$$

ゆえに　$\log_2(x-1)\leqq\log_2(3-x)$

底 2 は 1 より大きいから　$x-1\leqq 3-x$

よって　$x\leqq 2$　……②

①，② から，解は　$1<x\leqq 2$

(2)　真数は正であるから，$x-4>0$ かつ $x+6>0$ より　$x>4$　……①

不等式から　$\log_3(x-4)^2\leqq 2+\log_3(x+6)$

すなわち　$\log_3(x-4)^2\leqq\log_3 9(x+6)$

底 3 は 1 より大きいから　$(x-4)^2\leqq 9(x+6)$

整理して　$x^2-17x-38\leqq 0$　　ゆえに　$(x+2)(x-19)\leqq 0$

したがって　$-2\leqq x\leqq 19$　……②

①，② から，解は　$4<x\leqq 19$

(3)　真数は正であるから　$x>0$　……①

$\log_{\frac{1}{3}}x=\dfrac{\log_3 x}{\log_3\frac{1}{3}}=-\log_3 x$ であるから，不等式は　$2+\log_3 x>(\log_3 x)^2$

ゆえに　$(\log_3 x)^2-\log_3 x-2<0$

したがって　$(\log_3 x+1)(\log_3 x-2)<0$

よって　$-1<\log_3 x<2$　すなわち　$\log_3\frac{1}{3}<\log_3 x<\log_3 9$

底 3 は 1 より大きいから　$\frac{1}{3}<x<9$　　これは ① を満たす。

$\boxed{11}$ 2^n は 22 桁で最高位の数字が 4 であるから　$4\times 10^{21}\leqq 2^n<5\times 10^{21}$

各辺の常用対数をとると　$\log_{10}(4\times 10^{21})\leqq\log_{10}2^n<\log_{10}(5\times 10^{21})$

$5\times 10^{21}=10^{22}\div 2$ であるから　$2\log_{10}2+21\leqq n\log_{10}2<22-\log_{10}2$

$\log_{10}2=0.3010$ として計算すると　$21.6020\leqq n\times 0.3010<21.6990$

よって　$71.76\cdots\leqq n<72.08\cdots$

n は自然数であるから　$n=72$

$2^4=16$ であるから，$(2^4)^m$（m は自然数）の末尾の数字は常に 6 である。

$2^{72}=(2^4)^{18}$ であるから，2^{72} の末尾の数字は　6

$\boxed{12}$ (ア)　$\log_{10}0.15^{70}=70\log_{10}\dfrac{3}{20}=70(\log_{10}3-\log_{10}2-\log_{10}10)=70(0.4771-0.3010-1)$

$=-57.673$

よって　$-58<\log_{10}0.15^{70}<-57$

ゆえに　$10^{-58}<0.15^{70}<10^{-57}$

したがって，0.15^{70} を小数で表すと，小数第 ア58 位に 0 でない数字が現れる。

(イ)　$0.15^{70}=10^{-57.673}=10^{0.327}\times10^{-58}$

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ より $10^{0.3010}=2$，$10^{0.4771}=3$ であるから

$2<10^{0.327}<3$

よって　$2\times10^{-58}<0.15^{70}<3\times10^{-58}$

したがって，0.15^{70} を小数で表したとき，初めて現れる 0 でない数字は　イ2

13 $\begin{cases} 8\cdot 3^x-3^y=-27 & \cdots\cdots ① \\ \log_2(x+1)-\log_2(y+3)=-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とする。

真数は正であるから　$x+1>0$，$y+3>0$

すなわち　$x>-1$，$y>-3$　$\cdots\cdots$ ③

② から　$\log_2\dfrac{x+1}{y+3}=\log_2 2^{-1}$

よって　$\dfrac{x+1}{y+3}=\dfrac{1}{2}$ から　$y+3=2(x+1)$

ゆえに　$y=2x-1$　$\cdots\cdots$ ④

④ を ① に代入すると　$8\cdot 3^x-3^{2x-1}=-27$

この式の両辺に 3 を掛けて整理すると　$(3^x)^2-24\cdot 3^x-81=0$

ここで，$3^x=t$ とおくと，③ より $t>\dfrac{1}{3}$ である。

$t^2-24t-81=0$ から　$(t-27)(t+3)=0$

$t>\dfrac{1}{3}$ であるから　$t=27$

ゆえに　$3^x=27$　　したがって　$x=3$

このとき，④ から　$y=2\cdot 3-1=5$

これらはともに ③ を満たす。

14 $4^x+4^{-x}=2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}$

$\qquad=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

ゆえに　$y=8t-(t^2-2)-10$　　よって　$y=-t^2+8t-8$

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

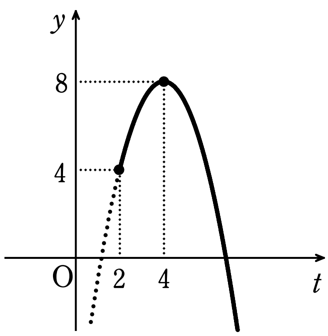
$$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

等号は $2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき成り立つ。

ゆえに　$t\geqq 2$　$\cdots\cdots$ ①

また　$y=-(t-4)^2+8$

① の範囲において，y は $t=4$ で最大値 8 をとる。



$t=4$ のとき　$2^x+2^{-x}=4$

両辺に 2^x を掛けて整理すると　$(2^x)^2-4\cdot 2^x+1=0$

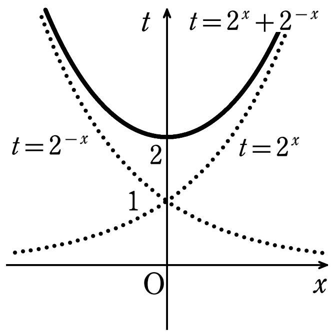
$2^x>0$ であるから　$2^x=2\pm\sqrt{3}$　　よって　$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$

したがって　$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$ で最大値 8

参考　$t=2^x+2^{-x}$ のグラフは，右の図のようになり，
1つの t の値に対応する x の値の個数は

$t<2$ のとき　0個
$t=2$ のとき　1個
$t>2$ のとき　2個

となる。



15　真数は正であるから　　$2x-y+1>0$

よって　　$y<2x+1$　……①

また，$x>0$ かつ $x\neq 1$ は底の条件を満たす。

与えられた不等式を変形すると　　$\log_x(2x-y+1)>\log_x x^2$

[1]　$x>1$ のとき　$2x-y+1>x^2$

ゆえに　　$y<-x^2+2x+1$

すなわち　$y<-(x-1)^2+2$

[2]　$0<x<1$ のとき　$2x-y+1<x^2$

ゆえに　　$y>-x^2+2x+1$

すなわち　$y>-(x-1)^2+2$

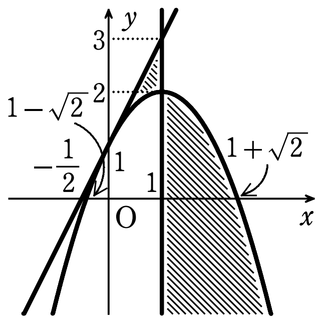
[1]，[2] より

直線 $x=1$ の右側と，放物線 $y=-(x-1)^2+2$ の
下側の共通部分

および

直線 $x=0$ の右側かつ $x=1$ の左側と，
放物線 $y=-(x-1)^2+2$ の上側の共通部分

これと ① の共通部分が求める領域で，右の図の斜線部分。
ただし，境界線を含まない。



数学②　第３回試練　図形と式１

BASIC問題

1 2点 A(-3)，B(5) について，次のものを求めよ。

(1) 2点 A，B 間の距離

(2) 線分 AB を $3:1$ に内分，外分する点の座標

(3) 線分 AB の中点

2 次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(6,\ -1)$ を通り，直線 $2x-y+4=0$ に平行な直線，垂直な直線

(2) 点 $(-2,\ 3)$ を通り，直線 $5x+2y-3=0$ に平行な直線，垂直な直線

(3) 点 $(1,\ -1)$ を通り，2点 $(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$ を通る直線に平行な直線，垂直な直線

3 (1) 2点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(2) 3点 $(3,\ 1)$，$(6,\ -8)$，$(-2,\ -4)$ を通る円の方程式を求めよ。

4 k を定数とする。点 $(2,\ 1)$ から直線 $kx+y+1=0$ へ下ろした垂線の長さが $\sqrt{3}$ となるように，k の値を定めよ。

STANDARD問題

5 直線 $3x-4y-1=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点 A$(2,\ 5)$ と対称な点を B，点 A から ℓ に下ろした垂線と ℓ との交点を H とするとき，次のものを求めよ。

(1) 点 B の座標　　(2) 点 H の座標

6 3直線 $x+3y-2=0$ ……①，$x+y=0$ ……②，$ax-2y+4=0$ ……③ が三角形を作らないとき，定数 a の値を求めよ。

7 点 $(-1,\ 2)$ を通り，x 軸，y 軸に接するような円の方程式を求めよ。

8 円 $x^2+y^2-4x-2y=0$ と直線 $ax+y+a=0$ が異なる2点 A，B で交わる。

(1) $a=-1$ のとき，弦 AB の長さを求めよ。

(2) 弦 AB の長さが最大となるとき，定数 a の値を求めよ。

9 2つの円 $x^2+y^2-6x-4y+12=0$ ……①，$x^2+y^2-2x-2y=0$ ……② について，次の問いに答えよ。

(1) 2つの円①，②は異なる2点で交わることを示せ。

(2) 2つの円①，②の2つの交点と点 $(4,\ 0)$ を通る円の方程式を求めよ。

実戦問題

10 座標平面上に2点 $A(-2,\ 3)$，$B(0,\ 1)$ と放物線 $y=x^2-8x+15$ がある。点Pが放物線上の $1 \leqq x \leqq 7$ の範囲を動くとき，△PABの面積が最小となるときの点Pの座標を求めよ。

11 点 $P(7,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=25$ に引いた2本の接線の接点をA，Bとするとき，直線ABの方程式を求めよ。

12 円 $x^2+y^2=4$　……①と円 $(x-5)^2+y^2=1$　……②の共通接線の方程式を求めよ。

数学②　第３回試練　図形と式１

$\boxed{1}$ 解答 (1) 8　(2) 内分 3，外分 9　(3) 1

$\boxed{2}$ 解答 (1) 平行：$2x-y-13=0$，垂直：$x+2y-4=0$

(2) 平行：$5x+2y+4=0$，垂直：$2x-5y+19=0$

(3) 平行：$x-2y-3=0$，垂直：$2x+y-1=0$

$\boxed{3}$ 解答 (1) $(x-4)^2+(y-1)^2=10$　(2) $x^2+y^2-6x+8y=0$

$\boxed{4}$ 解答 $k=-4\pm\sqrt{15}$

$\boxed{5}$ 解答 (1) $\left(\dfrac{28}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$　(2) $\left(\dfrac{19}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

$\boxed{6}$ 解答 $a=-2,\ -\dfrac{2}{3},\ 2$

$\boxed{7}$ 解答 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$，$(x+5)^2+(y-5)^2=25$

$\boxed{8}$ 解答 (1) $2\sqrt{3}$　(2) $a=-\dfrac{1}{3}$

$\boxed{9}$ 解答 (1) 略　(2) $x^2+y^2-10x-6y+24=0$

$\boxed{10}$ 解答 $\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

$\boxed{11}$ 解答 $7x+y=25$

$\boxed{12}$ 解答 $3x\pm4y=10$，$x\pm2\sqrt{6}\,y=10$

$\boxed{1}$ (1)　$AB=|5-(-3)|=|8|=8$

(2)　3：1 に内分する点の座標は　　$x=\dfrac{1\cdot(-3)+3\cdot 5}{3+1}=\dfrac{12}{4}=3$

3：1 に外分する点の座標は　　$x=\dfrac{-1\cdot(-3)+3\cdot 5}{3-1}=\dfrac{18}{2}=9$

(3)　$x=\dfrac{-3+5}{2}=1$

$\boxed{2}$ (1)　$2x-y+4=0$ から　　$y=2x+4$

よって，与えられた直線の傾きは　2

[1]　平行な直線の方程式は

$$y-(-1)=2(x-6)\quad \text{すなわち}\quad 2x-y-13=0$$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$$2m=-1\qquad \text{よって}\qquad m=-\frac{1}{2}$$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$$y-(-1)=-\frac{1}{2}(x-6)\quad \text{すなわち}\quad x+2y-4=0$$

(2)　$5x+2y-3=0$ から　　$y=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}$

よって，与えられた直線の傾きは　$-\dfrac{5}{2}$

[1]　平行な直線の方程式は

$$y-3=-\frac{5}{2}\{x-(-2)\}\quad \text{すなわち}\quad 5x+2y+4=0$$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$$-\frac{5}{2}m=-1\qquad \text{よって}\qquad m=\frac{2}{5}$$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$$y-3=\frac{2}{5}\{x-(-2)\}\quad \text{すなわち}\quad 2x-5y+19=0$$

(3)　2 点 $(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$ を通る直線の傾きは　　$\dfrac{1-(-5)}{8-(-4)}=\dfrac{1}{2}$

[1]　平行な直線の方程式は

$$y-(-1)=\frac{1}{2}(x-1)\quad \text{すなわち}\quad x-2y-3=0$$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$$\frac{1}{2}m=-1\qquad \text{よって}\qquad m=-2$$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

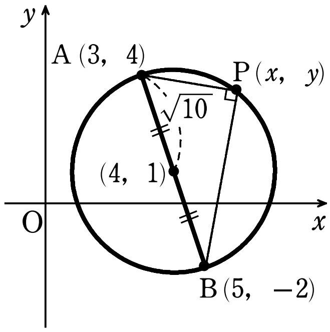
$$y-(-1)=-2(x-1)\quad \text{すなわち}\quad 2x+y-1=0$$

$\boxed{3}$ (1)　この円の中心は，2 点 (3，4)，(5，−2) を結ぶ線分の中点であるから，その座標は　(4，1)

半径 r は中心 (4，1) と円上の点 (3，4) との距離であるから　$r^2=(4-3)^2+(1-4)^2=10$

よって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-1)^2=10$$



(2)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 (3，1) を通るから　$3^2+1^2+3l+m+n=0$

点 (6，−8) を通るから　$6^2+(-8)^2+6l-8m+n=0$

点 (−2，−4) を通るから　$(-2)^2+(-4)^2-2l-4m+n=0$

整理すると　$3l+m+n+10=0$

$6l-8m+n+100=0$

$2l+4m-n-20=0$

これを解いて　$l=-6$，$m=8$，$n=0$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-6x+8y=0$

$\boxed{4}$ 題意を満たすための条件は　$\dfrac{|k\cdot 2+1+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$

よって　$2|k+1|=\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}$

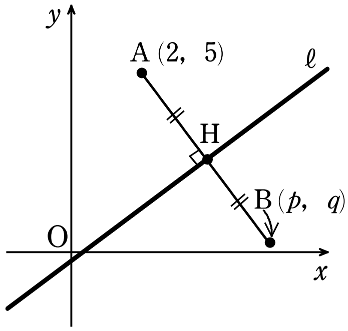
この両辺は負でないから，2 乗しても同値である。

ゆえに　$4(k+1)^2=3(k^2+1)$

整理して　$k^2+8k+1=0$

したがって　$k=-4\pm\sqrt{15}$

5 (1) 点Bの座標を $(p,\ q)$ とする。



[1] 直線 ℓ の傾きは $\dfrac{3}{4}$，直線ABの傾きは $\dfrac{q-5}{p-2}$ である。

$AB\perp\ell$ であるから

$$\frac{q-5}{p-2}\cdot\frac{3}{4}=-1$$

すなわち　$4p+3q=23$ ……①

[2] 線分ABの中点 $\left(\dfrac{p+2}{2},\ \dfrac{q+5}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$$3\cdot\frac{p+2}{2}-4\cdot\frac{q+5}{2}-1=0$$

すなわち　$3p-4q=16$ ……②

①，②を連立して解くと　$p=\dfrac{28}{5}$，$q=\dfrac{1}{5}$

したがって，点Bの座標は　$\left(\dfrac{28}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

(2) 点Hは線分ABの中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{2+\frac{28}{5}}{2},\ \frac{5+\frac{1}{5}}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\frac{19}{5},\ \frac{13}{5}\right)$$

6 直線①の傾きは $-\dfrac{1}{3}$，　直線②の傾きは -1，　直線③の傾きは $\dfrac{a}{2}$

3直線①，②，③が三角形を作らないのは，次の[1]，[2]，[3]の場合である。

[1] 2直線①，③が平行　　[2] 2直線②，③が平行

[3] 3直線①，②，③が1点で交わる。

[1]の場合　$-\dfrac{1}{3}=\dfrac{a}{2}$　　よって　$a=-\dfrac{2}{3}$

[2]の場合　$-1=\dfrac{a}{2}$　　よって　$a=-2$

[3]の場合　①，②を連立して解くと　$x=-1$，$y=1$

よって，直線①，②の交点の座標は　$(-1,\ 1)$

点 $(-1,\ 1)$ が直線③上にあるから　$a\cdot(-1)-2\cdot1+4=0$

整理して　$-a+2=0$　　ゆえに　$a=2$

このとき，直線③は $x-y+2=0$ となり，直線①，②とは一致しない。

したがって，求める a の値は　$a=-2,\ -\dfrac{2}{3},\ 2$

$\boxed{7}$　円の中心は第２象限にあるので，半径を r とおくと中心の座標は $(-r,\ r)$ と表せる。

よって，求める円の方程式は　$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

この円が点 $(-1,\ 2)$ を通るから　$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$

式を整理して　$r^2-6r+5=0$

$(r-1)(r-5)=0$ より　$r=1,\ 5$

したがって，求める円の方程式は

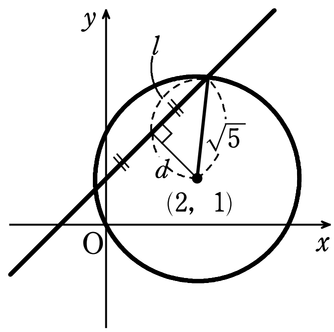
$$(x+1)^2+(y-1)^2=1,\ (x+5)^2+(y-5)^2=25$$

$\boxed{8}$ (1)　$x^2+y^2-4x-2y=0$ を変形すると

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5 \quad \cdots\cdots ①$$

$a=-1$ のとき，直線の方程式は

$$x-y+1=0 \quad \cdots\cdots ②$$



円 ① の中心 $(2,\ 1)$ と直線 ② の距離 d は

$$d=\frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

円 ① の半径は $\sqrt{5}$ であるから，弦 AB の長さを $2l$ とすると　$l^2=(\sqrt{5})^2-d^2=5-2=3$

$l>0$ であるから　$l=\sqrt{3}$　　よって　$\mathrm{AB}=2l=2\sqrt{3}$

別解　② から　$y=x+1$

これを $x^2+y^2-4x-2y=0$ に代入して　$x^2+(x+1)^2-4x-2(x+1)=0$

よって　$2x^2-4x-1=0 \quad \cdots\cdots ③$

円と直線の交点 A，B の座標を $(\alpha,\ \alpha+1)$，$(\beta,\ \beta+1)$ とすると，α，β は２次方程式 ③ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{4}{2}=2,\quad \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

よって　$\mathrm{AB}^2=(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+1)-(\alpha+1)\}^2=2(\beta-\alpha)^2=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$

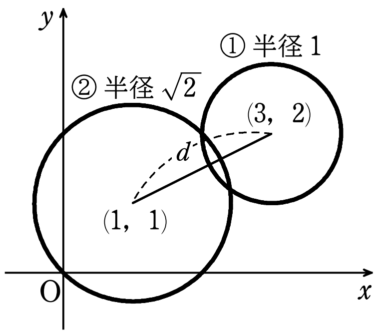
$$=2\left\{2^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=12$$

$\mathrm{AB}>0$ であるから　$\mathrm{AB}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(2)　弦 AB の長さが最大になるのは，弦 AB が円の直径になるときである。

このとき，直線 $ax+y+a=0$ は円の中心 $(2,\ 1)$ を通るから

$$2\cdot a+1+a=0 \qquad よって \quad a=-\frac{1}{3}$$



$\boxed{9}$ (1) ① を変形すると　$(x-3)^2+(y-2)^2=1$

よって，円 ① の中心は点 $(3,\ 2)$，半径は 1 である。

② を変形すると　$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

よって，円 ② の中心は点 $(1,\ 1)$，半径は $\sqrt{2}$ である。

2 つの円 ①，② の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$$

ゆえに　$\sqrt{2}-1<d<\sqrt{2}+1$

したがって，2 つの円 ①，② は異なる 2 点で交わる。

(2) k を定数として，方程式

$$x^2+y^2-6x-4y+12+k(x^2+y^2-2x-2y)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

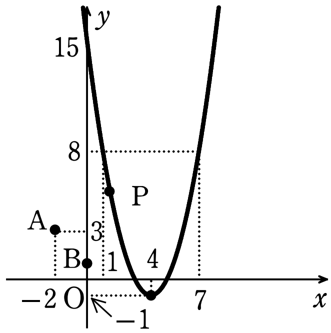
を考える。

(1) により，2 つの円 ①，② は 2 点で交わり，③ は 2 つの円 ①，② の 2 つの交点を通る図形を表す。

図形 ③ が点 $(4,\ 0)$ を通るとき　$4+8k=0$　　よって　$k=-\dfrac{1}{2}$

これを ③ に代入して整理すると　$x^2+y^2-10x-6y+24=0$

これが求める円の方程式である。



$\boxed{10}$ (1) $\mathrm{P}(t,\ t^2-8t+15)$ とする。

直線 AB の方程式は

$$y=\frac{1-3}{0-(-2)}\{x-(-2)\}+3$$

すなわち　$y=-x+1$

点 P と直線 $y=-x+1$ の距離を d とすると

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times d$$

ゆえに，d が最小となるように P を定めればよい。

$$d=\frac{|t+t^2-8t+15-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|t^2-7t+14|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(t-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right|$$

よって，d は $t=\dfrac{7}{2}$ で最小となる。

したがって　$\mathrm{P}\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

11 A $(x_1,\ y_1)$，B $(x_2,\ y_2)$ とすると，A，B における接線の方程式は，それぞれ

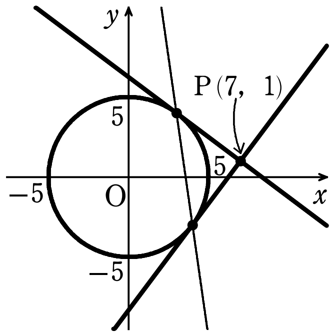
$$x_1x+y_1y=25,\quad x_2x+y_2y=25$$

これらがともに点 P(7，1) を通るから

$$7x_1+y_1=25\ \cdots\cdots ①,\quad 7x_2+y_2=25\ \cdots\cdots ②$$

①，② から，2 点 A $(x_1,\ y_1)$，B $(x_2,\ y_2)$ は直線 $7x+y=25$ 上にある。

よって，直線 AB の方程式は　$7x+y=25$



別解　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とする。

点 $(x_1,\ y_1)$ は円 $x^2+y^2=25$ 上にあるから　$x_1{}^2+y_1{}^2=25$ ……①

点 $(x_1,\ y_1)$ におけるこの円の接線の方程式は　$x_1x+y_1y=25$

これが点 P(7，1) を通るから　$7x_1+y_1=25$

よって　$y_1=-7x_1+25$ ……②

② を ① に代入して　$x_1{}^2+(-7x_1+25)^2=25$

ゆえに　$50(x_1{}^2-7x_1+12)=0$　　これを解いて　$x_1=3,\ 4$

② から　$x_1=3$ のとき　$y_1=4$，　$x_1=4$ のとき　$y_1=-3$

よって，A，B の座標は　(3，4)，(4，−3)

したがって，直線 AB の方程式は

$$y-4=\frac{-3-4}{4-3}(x-3)\quad すなわち\quad 7x+y-25=0$$

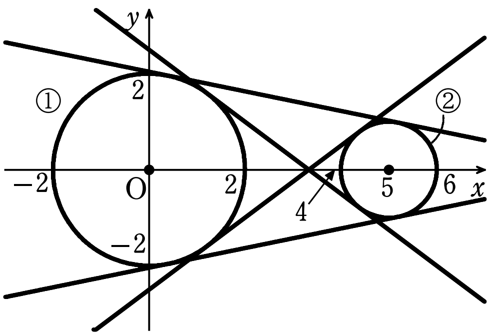
参考　直線 AB を点 P に関する円の **極線** といい，P を **極** という。

12 円 ① 上の接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると

$$x_1{}^2+y_1{}^2=4\ \cdots\cdots ③$$

接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=4\ \cdots\cdots ④$$



直線 ④ が円 ② に接するとき，円 ② の中心 (5，0) と直線 ④ の距離は円 ② の半径に等しいから

$$\frac{|5x_1-4|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}=1$$

③ から　$|5x_1-4|=2$

これを解いて　$x_1=\dfrac{6}{5},\ \dfrac{2}{5}$

③ から　$x_1=\dfrac{6}{5}$ のとき $y_1=\pm\dfrac{8}{5}$，$x_1=\dfrac{2}{5}$ のとき $y_1=\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$

よって，求める接線の方程式は　$3x\pm4y=10$，$x\pm2\sqrt{6}\,y=10$

BASIC問題

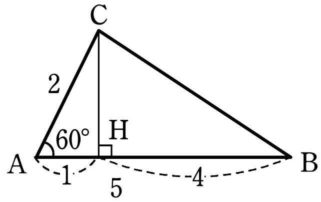
1 △ABCにおいて，辺BCを2：1に内分する点をD，外分する点をEとし，△ABCの重心をGとする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$　(5) $\overrightarrow{\mathrm{GD}}$

2 右の図は，AB＝5，AC＝2，∠BAC＝60° の△ABCの頂点Cから，底辺ABに垂線CHを下ろしたものである。次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$



3 $\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$，$\vec{x}=(p,\ q)$ とする。$\vec{x}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行で，$\vec{x}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ が垂直であるとき，p，q の値を求めよ。

4 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3\sqrt{2}$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=3$ のとき，次のものを求めよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$　(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ

5 $\vec{a}=(9,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ -2)$ とし，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。$|\vec{c}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。ただし，tは実数とする。

6 平行四辺形ABCDの辺ABを3：2に内分する点をE，辺ADを2：1に内分する点をF，線分BFと線分CEの交点をKとする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

STANDARD問題

7 三角形ABCの内心をIとし，辺BC，CA，ABの長さを，それぞれ a，b，c とする。$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=r\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 r，s を，a，b，c を用いて表せ。

8 三角形ABCの3辺の長さをAB＝4，BC＝3，CA＝2とする。この三角形の外心をOとおく。$\overrightarrow{\mathrm{CO}}$を $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ で表せ。

9 △ABCと点Pがあり，$2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たしている。

(1) △PAB，△PBC，△PCAの面積の比を求めよ。

(2) 直線AP上に点Qをとり，△QABと△QBCの面積比が3：1になるようにする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{QA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QC}}$ が満たす関係式を求めよ。

10 △OABにおいて，OA＝3，OB＝4，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=8$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で，s，t が $3s+t\leqq3$，$s+t\geqq1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$ を満たしながら動くとき，点Pが描く図形の面積を求めよ。

11 A $(-1,\ 5)$，B $(2,\ 4)$，$\vec{d}=(1,\ -2)$ とする。次の直線の媒介変数表示を，媒介変数を t として求めよ。また，t を消去した式で表せ。

(1) A を通り，$\vec{d}$ に平行な直線　(2) 2 点 A，B を通る直線

12 次のような直線の方程式を，ベクトルを用いて求めよ。

(1) 点 A $(5,\ 3)$ を通り，$\vec{n}=(1,\ -2)$ に垂直な直線

(2) O は原点とする。点 A $(3,\ -1)$ を通り，OA に垂直な直線

13 平面上の異なる 2 つの定点 O，A と任意の点 P に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1) $\left|2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right|=4$　(2) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$

実戦問題

14 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1：1 に内分する点を E，辺 BC を 2：1 に内分する点を F，辺 CD を 3：1 に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP：PQ を求めよ。

15 △ABC の外心 O から直線 BC，CA，AB に引いた垂線の足をそれぞれ P，Q，R とする．$0<t<1$ の範囲で関係式 $(t+1)\overrightarrow{OP}+(t-1)\overrightarrow{OQ}-t(t+1)\overrightarrow{OR}=\vec{0}$ を満たしているとき，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

(2) $\angle$BAC の大きさを求めよ．

16 平面上において同一直線上にない異なる 3 点 A, B, C があるとき，次の各問いに対して，それぞれの式を満たす点 P の集合を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}\leqq\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$

$\boxed{1}$ 解答 (1) $\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$ (2) $-\vec{b}+2\vec{c}$ (3) $\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$ (4) $-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

(5) $\dfrac{1}{3}\vec{c}$

$\boxed{2}$ 解答 (1) 5 (2) -3 (3) 0 (4) 20

$\boxed{3}$ 解答 $p=1$，$q=3$

$\boxed{4}$ 解答 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ (2) $\theta=45°$

$\boxed{5}$ 解答 $t=3$ で最小値 $3\sqrt{5}$

$\boxed{6}$ 解答 $\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\dfrac{13}{19}\vec{a}+\dfrac{4}{19}\vec{b}$

$\boxed{7}$ 解答 $r=\dfrac{b}{a+b+c}$，$s=\dfrac{c}{a+b+c}$

$\boxed{8}$ 解答 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\dfrac{11}{15}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\dfrac{28}{45}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$\boxed{9}$ 解答 (1) 4：2：3

(2) $4\overrightarrow{\mathrm{QA}}+9\overrightarrow{\mathrm{QB}}+12\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\vec{0}$ または $4\overrightarrow{\mathrm{QA}}-9\overrightarrow{\mathrm{QB}}-12\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\vec{0}$

$\boxed{10}$ 解答 $4\sqrt{5}$

$\boxed{11}$ 解答 (1) $\begin{cases}x=-1+t\\y=5-2t\end{cases}$；$2x+y-3=0$ (2) $\begin{cases}x=-1+3t\\y=5-t\end{cases}$；$x+3y-14=0$

$\boxed{12}$ 解答 (1) $x-2y+1=0$ (2) $3x-y-10=0$

$\boxed{13}$ 解答 (1) 線分 OA の中点を中心とする半径 2 の円

(2) 線分 OA を直径とする円

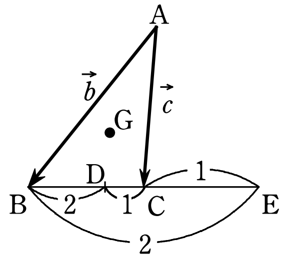
$\boxed{14}$ 解答 19：3

$\boxed{15}$ 解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (2) 135°

$\boxed{16}$ 解答 (1) 線分 BC を 2：1 の比に内分する点

(2) B を通り，直線 AB に垂直な直線

(3) 線分 BC を直径とする円周とその内部



1 点 A に関する位置ベクトルと考える。

(1) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{AE}=\dfrac{-\vec{b}+2\vec{c}}{2-1}=-\vec{b}+2\vec{c}$

(3) 辺 BC の中点を M とすると

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(4) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)-\vec{b}=-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

別解 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\dfrac{2}{3}(\vec{c}-\vec{b})=-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

(5) $\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)=\dfrac{1}{3}\vec{c}$

2 (1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ=5\times2\times\dfrac{1}{2}=5$

(2) $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{CH}$ の始点をそろえると，なす角は 150° である。

また，$\mathrm{CH}=\mathrm{AC}\sin 60^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CH}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CH}|\cos 150^\circ=2\times\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3$

(3) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CH}$ の始点をそろえると，なす角は 90° であるから

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CH}|\cos 90^\circ=5\times\sqrt{3}\times0=0$

(4) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos\angle\mathrm{ABC}$

頂点 C から直線 AB に垂線 CH をおろすと $|\overrightarrow{BC}|\cos\angle\mathrm{ABC}=\mathrm{BH}$

また，$\mathrm{AH}=\mathrm{AC}\cos 60^\circ=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$ により

$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}-\mathrm{AH}=5-1=4$

したがって，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot(|\overrightarrow{BC}|\cos\angle\mathrm{ABC})=\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BH}=5\times4=20$

3 $\vec{a}-\vec{b}=(4,\ 2)-(3,\ -1)=(1,\ 3)$

$\vec{x}-\vec{b}=(p,\ q)-(3,\ -1)=(p-3,\ q+1)$

条件より $\vec{x}\neq\vec{0}$，$\vec{x}-\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから　$(p,\ q)\neq(0,\ 0),\ (3,\ -1)$ …… ①

このとき，$\vec{x}\parallel(\vec{a}-\vec{b})$ から　$p\times3-q\times1=0$

よって　$3p-q=0$ …… ②

また，$(\vec{x}-\vec{b})\perp\vec{a}$ から　$(p-3)\times4+(q+1)\times2=0$

よって　$2p+q=5$ …… ③

②，③ を解いて　$p=1,\ q=3$　これは ① を満たす。

$\boxed{4}$ (1) $|3\vec{a}-\vec{b}|^2=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9\times1^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+(3\sqrt{2})^2$

$=9-6\vec{a}\cdot\vec{b}+18=27-6\vec{a}\cdot\vec{b}$

$|3\vec{a}-\vec{b}|=3$ より，$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=9$ であるから　$27-6\vec{a}\cdot\vec{b}=9$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

(2) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{1\times3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=45^\circ$

$\boxed{5}$ $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(9,\ 3)+t(-1,\ -2)=(9-t,\ 3-2t)$

$|\vec{c}|^2=(9-t)^2+(3-2t)^2=5t^2-30t+90$

$=5(t-3)^2+45$

よって，$|\vec{c}|^2$ は $t=3$ で最小値 45 をとる。

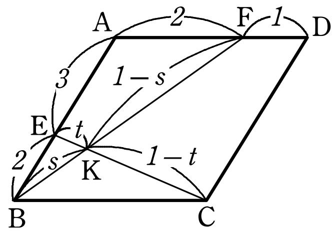
$|\vec{c}|\geqq0$ であるから，$|\vec{c}|^2$ が最小のとき $|\vec{c}|$ も最小となり，最小値は $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

したがって　$t=3$ で　最小値 $3\sqrt{5}$

$\boxed{6}$ BK：KF$=s:(1-s)$，EK：KC$=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(1-s)\vec{a}+\dfrac{2}{3}s\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AE}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-t)\dfrac{3}{5}\vec{a}+t(\vec{a}+\vec{b})$



よって　$(1-s)\vec{a}+\dfrac{2}{3}s\vec{b}=\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}t\right)\vec{a}+t\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから

$1-s=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}t$，$\dfrac{2}{3}s=t$

これを解いて　$s=\dfrac{6}{19}$，$t=\dfrac{4}{19}$　よって　$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\dfrac{13}{19}\vec{a}+\dfrac{4}{19}\vec{b}$

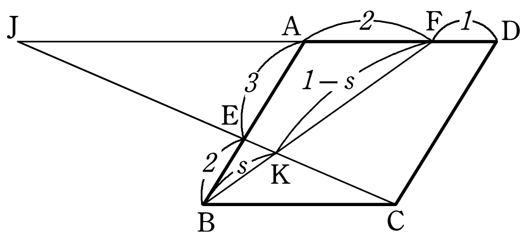
別解　△ABF と直線 CE について，メネラウスの定理を利用する。

DA と CE の交点を J とすると

△EBC∽△EAJ

BC：AJ$=2:3$ から

AJ$=\dfrac{3}{2}$BC$=\dfrac{3}{2}$AD



よって　$\dfrac{\mathrm{FJ}}{\mathrm{JA}}=\dfrac{\mathrm{FA}+\mathrm{AJ}}{\mathrm{JA}}$

$=\dfrac{\dfrac{2}{3}\mathrm{AD}+\dfrac{3}{2}\mathrm{AD}}{\dfrac{3}{2}\mathrm{AD}}=\dfrac{\dfrac{13}{6}}{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{13}{9}$

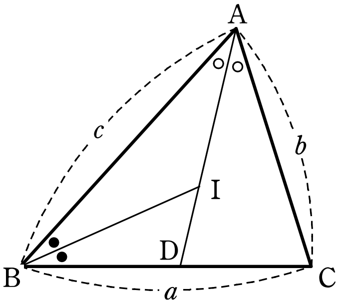
メネラウスの定理から

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\cdot\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{KF}}\cdot\frac{\mathrm{FJ}}{\mathrm{JA}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{s}{1-s}\cdot\frac{6.5}{4.5}=1$$

よって　$s=\dfrac{6}{19}$　　したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\left(1-\dfrac{6}{19}\right)\vec{a}+\dfrac{6}{19}\cdot\dfrac{2}{3}\vec{b}$

$$=\frac{13}{19}\vec{a}+\frac{4}{19}\vec{b}$$

$\boxed{7}$ △ABC の ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると　BD : DC = AB : AC = $c:b$



よって　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

また，BD $=a\cdot\dfrac{c}{b+c}=\dfrac{ac}{b+c}$ であるから

AI : ID = BA : BD $=c:\dfrac{ac}{b+c}=(b+c):a$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{b+c}{(b+c)+a}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$$=\frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから　$r=\dfrac{b}{a+b+c}$，$s=\dfrac{c}{a+b+c}$

$\boxed{8}$ $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$ とすると　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\vec{b}-\vec{a}|=4$

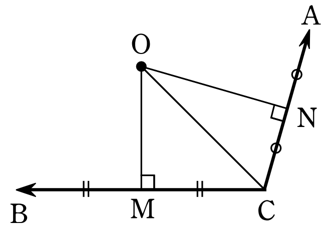
$|\vec{b}-\vec{a}|^2=16$ であるから　$|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=16$

よって　$9-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=16$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$　　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=-\dfrac{3}{2}$

外心 O は 3 辺の垂直二等分線の交点である。

よって，辺 BC，CA の中点をそれぞれ M，N とすると，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{NO}}$ である。



$$\overrightarrow{\mathrm{MO}}=\overrightarrow{\mathrm{MC}}+\overrightarrow{\mathrm{CO}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CB}}+a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$$=a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\left(b-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{NO}}=\overrightarrow{\mathrm{NC}}+\overrightarrow{\mathrm{CO}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\left(a-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MO}}=0$ であるから　$a\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\left(b-\dfrac{1}{2}\right)|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2=0$

よって　$-\dfrac{3}{2}a+9\left(b-\dfrac{1}{2}\right)=0$　　ゆえに　$-a+6b-3=0$　…… ①

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NO}}=0$ であるから　$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2+b\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$

よって　$4\left(a-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{2}b=0$　　ゆえに　$8a-3b-4=0$ ……②

①，② から　$a=\dfrac{11}{15}$，$b=\dfrac{28}{45}$　　$\therefore$ $\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\dfrac{11}{15}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\dfrac{28}{45}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$\boxed{9}$ (1)　$2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ から　$2(-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+4(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$

ゆえに　$-9\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{7}{9}\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\frac{7}{9}\left(\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4+3}\right)$$

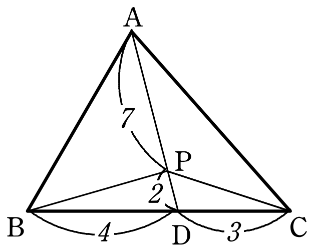
辺 BC を 4：3 に内分する点を D とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4+3}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

ゆえに，点 P は線分 AD を 7：2 に内分する点であるから，△ABC の面積を S とすると　$\triangle\mathrm{PBC}=\dfrac{2}{9}S$

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{7}{9}\triangle\mathrm{ABD}=\frac{7}{9}\cdot\frac{4}{7}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{4}{9}S$$

$$\triangle\mathrm{PCA}=\frac{7}{9}\triangle\mathrm{ADC}=\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{7}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3}{9}S$$



したがって

$$\triangle\mathrm{PAB}:\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}=\frac{4}{9}S:\frac{2}{9}S:\frac{3}{9}S=4:2:3$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ (t は実数) とすると

[1]　$0<t<1$ のとき

$\triangle\mathrm{QAB}=\dfrac{4}{7}tS$，$\triangle\mathrm{QBC}=(1-t)S$

$\triangle\mathrm{QAB}:\triangle\mathrm{QBC}=3:1$ から　$\dfrac{4}{7}t:(1-t)=3:1$

ゆえに，$t=\dfrac{21}{25}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{21}{25}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{21}{25}\left(\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

よって　$-\overrightarrow{\mathrm{QA}}=\dfrac{9}{25}(\overrightarrow{\mathrm{QB}}-\overrightarrow{\mathrm{QA}})+\dfrac{12}{25}(\overrightarrow{\mathrm{QC}}-\overrightarrow{\mathrm{QA}})$

整理すると　$4\overrightarrow{\mathrm{QA}}+9\overrightarrow{\mathrm{QB}}+12\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\vec{0}$

[2]　$t>1$ のとき

$\triangle\mathrm{QAB}=\dfrac{4}{7}tS$，$\triangle\mathrm{QBC}=(t-1)S$

$\triangle\mathrm{QAB}:\triangle\mathrm{QBC}=3:1$ から　$\dfrac{4}{7}t:(t-1)=3:1$

ゆえに，$t=\dfrac{21}{17}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{21}{17}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{21}{17}\left(\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

よって　$-\overrightarrow{\mathrm{QA}}=\dfrac{9}{17}(\overrightarrow{\mathrm{QB}}-\overrightarrow{\mathrm{QA}})+\dfrac{12}{17}(\overrightarrow{\mathrm{QC}}-\overrightarrow{\mathrm{QA}})$

整理すると　$4\overrightarrow{\mathrm{QA}}-9\overrightarrow{\mathrm{QB}}-12\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\vec{0}$

[3]　$t=0$，1 のとき

△QAB または △QBC が存在しないため不適。

[4]　$t<0$ のとき

△QBC に △QAB が含まれ，△QAB：△QBC＝3：1 とならないので不適。

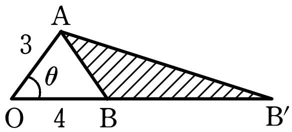
以上から　$4\overrightarrow{\mathrm{QA}}+9\overrightarrow{\mathrm{QB}}+12\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\vec{0}$　または　$4\overrightarrow{\mathrm{QA}}-9\overrightarrow{\mathrm{QB}}-12\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\vec{0}$

10　$3s+t\leqq 3$ の両辺を 3 で割ると　$s+\dfrac{t}{3}\leqq 1$　　また　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{t}{3}(3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$\dfrac{t}{3}=t'$，$3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$s+t'\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$3s+t\leqq 3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ を満たすとき，点 P が描く図形は，△OAB′ の周および内部である。また，$s+t\geqq 1$ を満たすとき，点 P が描く図形は，直線 AB に関して，点 O と反対側にある領域である。

ただし，直線 AB を含む。これらの共通部分であるから，点 P が描く図形は，右の図のような △ABB′ の周および内部である。



ここで，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta$$

条件から　$8=3\cdot 4\cos\theta$　　よって　$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

よって，求める面積は

$$\triangle\mathrm{OAB'}-\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB'}\sin\theta-\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}(4\cdot 3-4)=4\sqrt{5}$$

11　(1)　点 A を通り，$\vec{d}$ に平行な直線の媒介変数表示は

$$(x,\ y)=(-1,\ 5)+t(1,\ -2)$$

すなわち　$\begin{cases} x=-1+t \\ y=5-2t \end{cases}$

t を消去すると　$y=5-2(x+1)$　　すなわち　$2x+y-3=0$

(2)　2 点 A，B を通る直線の媒介変数表示は

$$(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 5)+t(2,\ 4)$$

すなわち $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=5-t \end{cases}$

t を消去すると　$x=-1+3(5-y)$　すなわち　$x+3y-14=0$

12 直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n}$ であるから　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ ……①

$\vec{n}=(1,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-5,\ y-3)$ であるから，① より

$1\cdot(x-5)+(-2)\cdot(y-3)=0$　よって　$x-2y+1=0$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ ……①

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ y+1)$ であるから，① より

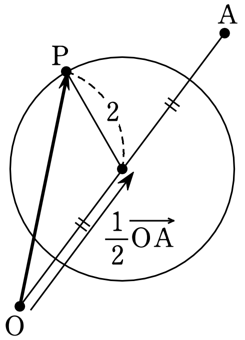
$3\cdot(x-3)+(-1)\cdot(y+1)=0$　よって　$3x-y-10=0$

13 (1) $|2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=4$ を変形すると

$$2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=4$$

すなわち　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=2$

ゆえに，線分 OA の中点を中心とする半径 2 の円を表す。



(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を変形すると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

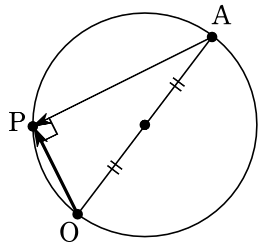
よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$

すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$ または

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

よって，線分 OA を直径とする円を表す。

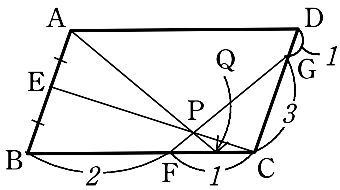


14 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}\vec{a}$，

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$，

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}$



EP：PC$=s：(1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AE}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}(1-s)\vec{a}+s(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}(1+s)\vec{a}+s\vec{b} \quad \cdots\cdots ①$$

また，FP：PG$=t:(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AF}}+t\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(1-t)\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)+t\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\left(1-\frac{3}{4}t\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t\right)\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$

①，② より　$\frac{1}{2}(1+s)\vec{a}+s\vec{b}=\left(1-\frac{3}{4}t\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t\right)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$\frac{1}{2}(1+s)=1-\frac{3}{4}t$，$s=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t$

これを解いて　$s=\frac{8}{11}$，$t=\frac{2}{11}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{19}{22}\vec{a}+\frac{8}{11}\vec{b}$

点 Q は直線 AP 上にあるから　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$　(k は実数)

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{19}{22}k\vec{a}+\frac{8}{11}k\vec{b}=\frac{3}{22}k\vec{a}+\frac{8}{11}k(\vec{a}+\vec{b})=\frac{3}{22}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{8}{11}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

点 Q は直線 BC 上にあるから　$\frac{3}{22}k+\frac{8}{11}k=1$　　よって　$k=\frac{22}{19}$

ゆえに　AP：PQ$=19:3$

15 (1)　直線 OP，OQ，OR はそれぞれ辺 BC，CA，AB の垂直二等分線であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

$(t+1)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-t(t+1)\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$ から

$$(t+1)\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}+(t-1)\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2}-t(t+1)\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=\vec{0}$$

すなわち　$-(1+t^2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t^2)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\left|\frac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$

$$=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\left\{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2\right\}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

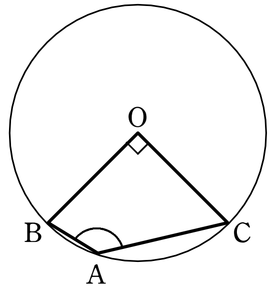
$$=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$0<t<1$ から $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

よって $\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}>0$，

$\dfrac{2t}{1+t^2}>0$ であるから，3 点 A，B，C の位置関係は右図のようになる．



よって $\angle\mathrm{BAC}=(360^\circ-90^\circ)\div 2=135^\circ$

16 (1) 条件の等式から $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$

よって，点 P は線分 BC を 2：1 の比に内分する点である．答

(2) 条件の等式から $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=0$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ は垂直である．

したがって，点 P の集合は点 B を通り，直線 AB に垂直な直線である．答

(3) 条件の不等式から $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})\leqq 0$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\leqq 0$

よって $(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\leqq 0$

したがって，点 P の集合は，線分 BC を直径とする円周とその内部である．答

参考(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(c,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,y)$ とすると，$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\leqq 0$

から $x(x-c)+y^2\leqq 0$ ゆえに $\left(x-\dfrac{c}{2}\right)^2+y^2\leqq\left(\dfrac{c}{2}\right)^2$

BASIC問題

1 (1) 極限値 $\lim_{x\to -4}\dfrac{x^3+4x^2+2x+8}{x^2+x-12}$ を求めよ。

(2) $f(x)=x^4-2x^3+1$ のとき，$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ を求めよ。

2 関数 $y=x^3+3x^2$ のグラフについて，傾きが 9 であるような接線の方程式を求めよ。

3 関数 $y=x^3+2$ のグラフに点 C(0，4) から引いた接線の方程式を求めよ。

4 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=-3x^4+16x^3-18x^2$

(2) $y=x^4-6x^2-8x+10$

5 曲線 $y=3x^3-7x$ と直線 $y=2x-a$ の共有点の個数を求めよ。ただし，a は定数とする。

STANDARD問題

6 次の関数を，変数 t で微分せよ。ただし，t 以外の文字 V_0，β，h，v_0，g は定数である。

(1) $V=V_0(1+\beta t)$　　(2) $s=h+v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$

7 曲線 $y=x^3$ 上の点 P$(t,\ t^3)$ $[t\neq 0]$ における接線が x 軸，y 軸およびこの曲線と再び交わる点を，それぞれ Q，R，S とする。

(1) S の x 座標を t で表せ。　　(2) QR：RS を求めよ。

8 関数 $f(x)=x^3+ax^2+12x+3$ が常に増加するように，定数 a の値の範囲を定めよ。

9 2 つの曲線 $y=x^3+ax^2$ と $y=x^2+bx+c$ が点 (2，4) において，共通の接線をもつとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

10 2 つの放物線 C_1：$y=x^2+1$，C_2：$y=-2x^2+4x-3$ の共通接線の方程式を求めよ。

11 $x^2+2y^2=4$ のとき，$x(x+4y^2)$ の最大値，最小値を求めよ。

12 曲線 $y=x^3-3x$ を C とする。曲線 C に点 A$(-2,\ k)$ から異なる 3 本の接線が引けるような定数 k の値の範囲を求めよ。

13 k を定数とする。3 次方程式 $x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x-k=0$ が異なる 3 つの実数解 α，β，γ (ただし $\alpha<\beta<\gamma$) をもつとき，次の問いに答えよ。

(1) k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) α，β，γ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $\alpha\gamma$ が最小となるときの k の値と，そのときの $\alpha\gamma$ の最小値を求めよ。

実戦問題

14 関数 $f(x)=x^3-3x^2+3ax+b$ (a，b は定数) について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極大値と極小値の差が 32 となるとき，a の値を求めよ。

(3)　(2) で求めた a の値に対し，$f(x)$ の区間 $-4 \leqq x \leqq 4$ における最大値が 5 であるとする。このとき，b の値とこの区間での $f(x)$ の最小値 m を求めよ。

15 a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする。区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。M の最小値とそのときの a の値を求めよ。

16 a は定数とする。関数 $f(x)=-x^3+3ax$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

数学②　第５回試練　数IIの微分

1 解答　(1)　$-\dfrac{18}{7}$　　(2)　8

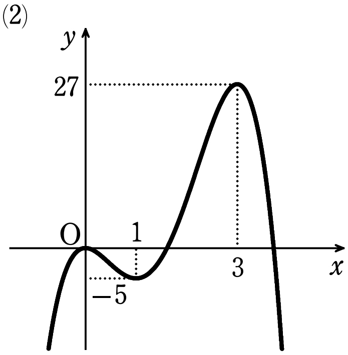
2 解答　$y=9x+27$，$y=9x-5$

3 解答　$y=3x+4$

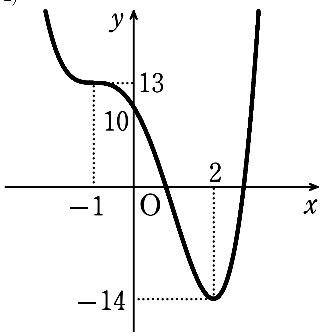
4 解答　(1)　$x=0$ で極大値 0，$x=1$ で極小値 -5，$x=3$ で極大値 27　〔図〕

(2)　$x=2$ で極小値 -14　〔図〕

(2)



(4)



5 解答　$a<-6$，$6<a$ のとき 1 個；$a=-6$，6 のとき 2 個；$-6<a<6$ のとき 3 個

6 解答　(1)　$\dfrac{dV}{dt}=V_0\beta$　　(2)　$\dfrac{ds}{dt}=v_0-gt$

7 解答　(1)　$-2t$　　(2)　1：3

8 解答　$-6\leqq a\leqq 6$

9 解答　$a=-1$，$b=4$，$c=-8$

10 解答　$y=4x-3$，$y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{9}$

11 解答　$x=\dfrac{4}{3}$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ で最大値 $\dfrac{208}{27}$；$x=-1$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ で最小値 -5

12 解答　$-2<k<6$

13 解答　(1)　$-10<k<\dfrac{7}{2}$　　(2)　$-\dfrac{5}{2}<\alpha<-1$，$-1<\beta<2$，$2<\gamma<\dfrac{7}{2}$

(3)　$k=-\dfrac{315}{64}$ で最小値 $-\dfrac{105}{16}$

14 解答　(1)　$a<1$　　(2)　$a=-3$　　(3)　$b=0$，$m=-76$

15 解答　$a=\dfrac{1}{4}$ で最小値 $\dfrac{1}{4}$

16 解答　$a\leqq 0$ のとき　　$x=0$ で最大値 0，

$0<a<1$ のとき　$x=\sqrt{a}$ で最大値 $2a\sqrt{a}$，

$1\leqq a$ のとき　　$x=1$ で最大値 $3a-1$

$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to-4}\frac{x^3+4x^2+2x+8}{x^2+x-12}=\lim_{x\to-4}\frac{x^2(x+4)+2(x+4)}{(x+4)(x-3)}=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)(x^2+2)}{(x+4)(x-3)}$

$$=\lim_{x\to-4}\frac{x^2+2}{x-3}=-\frac{18}{7}$$

(2) $f'(x)=4x^3-6x^2$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=4\cdot2^3-6\cdot2^2=8$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^4-2x^3+1-(2^4-2\cdot2^3+1)}{x-2}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^3(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x^3=8$$

$\boxed{2}$ $y=x^3+3x^2$ を微分すると　$y'=3x^2+6x$

接点の座標を $(a,\ a^3+3a^2)$ とすると，接線の傾きは $3a^2+6a$ であるから

$3a^2+6a=9$　　これを解くと　$a=-3,\ 1$

したがって，接点の座標は $(-3,\ 0)$，$(1,\ 4)$ であるから，求める接線の方程式は

$y-0=9\{x-(-3)\}$，$y-4=9(x-1)$

すなわち　$y=9x+27$，$y=9x-5$

$\boxed{3}$ $y=x^3+2$ を微分すると　$y'=3x^2$

接点の座標を $(a,\ a^3+2)$ とすると，接線の方程式は　$y-(a^3+2)=3a^2(x-a)$

すなわち　$y=3a^2x-2a^3+2$　……①

この直線が点 $\mathrm{C}(0,\ 4)$ を通るから　$4=-2a^3+2$

式を整理して　$a^3=-1$　　a は実数であるから　$a=-1$

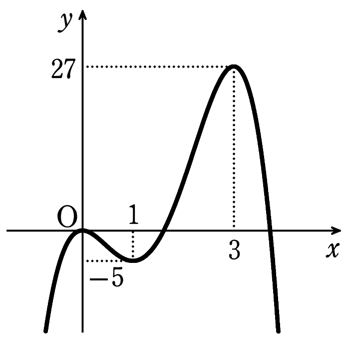
したがって，接線の方程式は，① より　$y=3x+4$

$\boxed{4}$ (1) $y'=-12x^3+48x^2-36x=-12x(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 1,\ 3$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$	極小 -5	$\nearrow$	極大 27	$\searrow$



よって，$x=0$ で極大値 0，　$x=1$ で極小値 -5，

$x=3$ で極大値 27　をとる。

グラフは［図］のようになる。

(2)　$y'=4x^3-12x-8=4(x^3-3x-2)$

ここで，$g(x)=x^3-3x-2$ とすると　　$g(-1)=0$

よって，$g(x)$ は $x+1$ で割り切れて

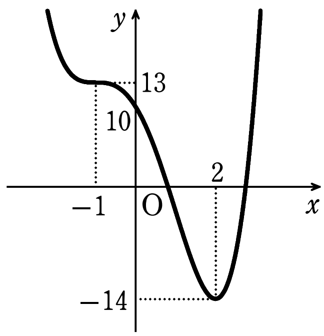
$$g(x)=(x+1)(x^2-x-2)=(x+1)^2(x-2)$$

ゆえに　　$y'=4(x+1)^2(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	13	↘	極小 -14	↗



よって，$x=2$ で極小値 -14 をとる。

グラフは［図］のようになる。

$\boxed{5}$ 曲線 $y=3x^3-7x$ と直線 $y=2x-a$ の共有点の x 座標は，

方程式 $3x^3-7x=2x-a$ すなわち $-3x^3+9x=a$ の実数解である。

$f(x)=-3x^3+9x$ とおくと　　$f'(x)=-9x^2+9=-9(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm 1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 -6	↗	極大 6	↘

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

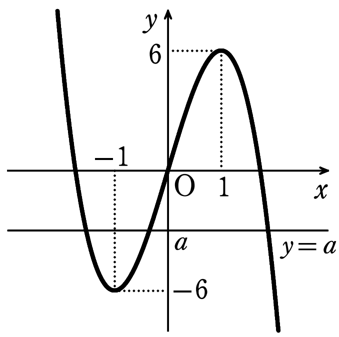
与えられた曲線と直線の共有点の個数は，$y=f(x)$ の

グラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に一致する。

したがって　　$a<-6,\ 6<a$ のとき 1 個；

$a=-6,\ 6$　　のとき 2 個；

$-6<a<6$　　のとき 3 個



$\boxed{6}$ (1)　$V=V_0+V_0\beta t$ であるから

$$\frac{dV}{dt}=(V_0)'+V_0\beta(t)'=0+V_0\beta\cdot 1=V_0\beta$$

(2)　$\dfrac{ds}{dt}=(h)'+v_0(t)'-\dfrac{1}{2}g(t^2)'=0+v_0\cdot 1-\dfrac{1}{2}g\cdot 2t=v_0-gt$

$\boxed{7}$ (1)　$y=x^3$ を微分すると　　$y'=3x^2$

点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における，曲線の接線の方程式は

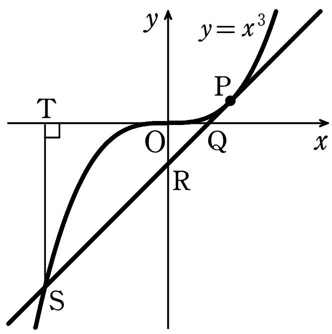
$$y-t^3=3t^2(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=3t^2x-2t^3 \quad \cdots\cdots ①$$

よって，点 S の x 座標は，方程式 $x^3=3t^2x-2t^3$ ……② の t 以外の解である。

② から　$x^3-3t^2x+2t^3=0$　　左辺を因数分解して　$(x-t)^2(x+2t)=0$

したがって，S の x 座標は　$x=-2t$

(2) ① で，$y=0$ とすると　$0=3t^2x-2t^3$



すなわち　$t^2(3x-2t)=0$

$t^2 \neq 0$ であるから　$x=\dfrac{2}{3}t$

よって，Q の座標は　$\left(\dfrac{2}{3}t,\ 0\right)$

S から x 軸に下ろした垂線を ST とすると，T の座標は　$(-2t,\ 0)$

OR∥TS であるから　QR：RS＝OQ：OT

$\mathrm{OQ}=\left|\dfrac{2}{3}t\right|=\dfrac{2}{3}|t|$，$\mathrm{OT}=|-2t|=2|t|$ であるから

$$\mathrm{QR}:\mathrm{RS}=\frac{2}{3}|t|:2|t|=1:3$$

8　$f'(x)=3x^2+2ax+12$

$f(x)$ が常に増加するための条件は

$$f'(x) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 3x^2+2ax+12 \geqq 0$$

が常に成り立つことである。

よって，2 次方程式 $3x^2+2ax+12=0$ の判別式 D について　$D \leqq 0$

$\dfrac{D}{4}=a^2-36=(a+6)(a-6)$ であるから　$(a+6)(a-6) \leqq 0$

したがって　$-6 \leqq a \leqq 6$

9　$f(x)=x^3+ax^2$，$g(x)=x^2+bx+c$ とすると

$$f'(x)=3x^2+2ax, \quad g'(x)=2x+b$$

2 つの曲線はともに点 $(2,\ 4)$ を通るから　$f(2)=4$　$g(2)=4$

よって　$8+4a=4$　……①

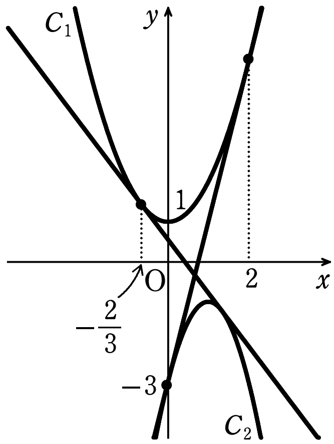
$4+2b+c=4$　……②

また，点 $(2,\ 4)$ において，共通の接線をもつから　$f'(2)=g'(2)$

よって　$12+4a=4+b$　……③

①，②，③ を解いて　$a=-1$，$b=4$，$c=-8$

10 ［解法 1］　$y=x^2+1$ から　　$y'=2x$



C_1 上の点 $(a,\ a^2+1)$ における接線の方程式は

$$y-(a^2+1)=2a(x-a)$$

すなわち　　$y=2ax-a^2+1$　…… ①

直線 ① が C_2 に接するための条件は，y を消去した x の 2 次方程式

$$-2x^2+4x-3=2ax-a^2+1$$

すなわち　　$2x^2+2(a-2)x+(4-a^2)=0$

が重解をもつことである。

よって，この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-2(4-a^2)=0$$

ゆえに　　$3a^2-4a-4=0$　　　よって　　$(a-2)(3a+2)=0$

これを解くと　　$a=2,\ -\frac{2}{3}$

① から，求める方程式は

$a=2$ のとき　　$y=4x-3$，

$a=-\frac{2}{3}$ のとき　　$y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{9}$

［解法 2］（［解法 1］と 4 行目まで同じ）

$y=-2x^2+4x-3$ から　　$y'=-4x+4$

C_2 上の点 $(b,\ -2b^2+4b-3)$ における接線の方程式は

$$y-(-2b^2+4b-3)=(-4b+4)(x-b)$$

すなわち　　$y=(-4b+4)x+2b^2-3$　…… ②

① と ② が一致するための条件は

$2a=-4b+4$ …… ③　かつ　$-a^2+1=2b^2-3$ …… ④

③ から　　$a=-2(b-1)$

④ に代入して　　$-4(b^2-2b+1)+1=2b^2-3$

よって　　$-2b(3b-4)=0$　　　ゆえに　　$b=0,\ \frac{4}{3}$

② から，求める方程式は

$b=0$ のとき　　$y=4x-3$，

$b=\frac{4}{3}$ のとき　　$y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{9}$

11 $x^2+2y^2=4$ から　　$2y^2=4-x^2$　…… ①

よって　　$x(x+4y^2)=x\{x+2(4-x^2)\}=x(-2x^2+x+8)=-2x^3+x^2+8x$

ここで，$2y^2 \geqq 0$ であるから　$4-x^2 \geqq 0$　ゆえに　$-2 \leqq x \leqq 2$　…… ②

$f(x)=-2x^3+x^2+8x$ とおくと　$f'(x)=-6x^2+2x+8=-2(x+1)(3x-4)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ \dfrac{4}{3}$

② の範囲において，$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\dfrac{4}{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	↘	-5	↗	$\dfrac{208}{27}$	↘	4

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{4}{3}$ で最大値 $\dfrac{208}{27}$，$x=-1$ で最小値 -5 をとる。

$x=\dfrac{4}{3}$ のとき，① から　$2y^2=\dfrac{20}{9}$　よって　$y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

$x=-1$ のとき，① から　$2y^2=3$　よって　$y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

したがって　$x=\dfrac{4}{3}$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ で最大値 $\dfrac{208}{27}$；

$x=-1$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ で最小値 -5

12　$y=x^3-3x$ から　$y'=3x^2-3$

よって，曲線 C 上の点 $(t,\ t^3-3t)$ における接線の方程式は

$$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$$

すなわち　$y=3(t^2-1)x-2t^3$

このの接線が点 A $(-2,\ k)$ を通るから

$$k=3(t^2-1)\cdot(-2)-2t^3$$

すなわち　$-2t^3-6t^2+6=k$　…… ①

ここで，3 次関数のグラフにおいて，接点の x 座標が異なれば接線も異なる。

よって，点 A から曲線 C に異なる 3 本の接線が引けるための条件は，曲線 C 上の接点が 3 つ存在することであり，これは，t についての 3 次方程式 ① が異なる 3 つの実数解をもつことと同値である。

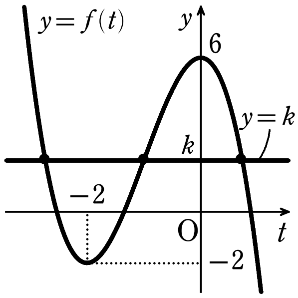
ゆえに，① の左辺を $f(t)$ とおくと，求める条件は，$y=f(t)$ のグラフと直線 $y=k$ が異なる 3 個の共有点をもつことである。

ここで　$f'(t)=-6t^2-12t=-6(t+2)t$

$f'(t)=0$ とすると　$t=-2,\ 0$

よって，$f(t)$ の増減表は次のようになり，$y=f(t)$ のグラフは右下のようになる。

t	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	極小 -2	↗	極大 6	↘



グラフより，求める k の値の範囲は

$$-2<k<6$$

13 (1)　$x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x-k=0$ から　　$x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x=k$

この方程式の実数解の個数は，$y=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数に一致する。

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x$ とすると

$$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-1,\ 2$

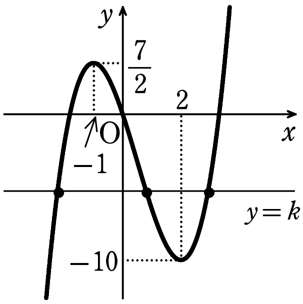
$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{7}{2}$	↘	-10	↗

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

ゆえに，直線 $y=k$ との共有点の個数がちょうど3個となる k の値の範囲は

$$-10<k<\frac{7}{2}$$



(2)　[1]　$k=-10$ のとき

方程式は　　$x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+10=0$　　よって　　$2x^3-3x^2-12x+20=0$

すなわち　　$(x-2)^2(2x+5)=0$　　したがって　　$x=-\dfrac{5}{2},\ 2$

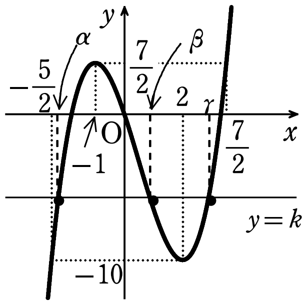
[2]　$k=\dfrac{7}{2}$ のとき

方程式は　　$x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x-\dfrac{7}{2}=0$　　よって　　$2x^3-3x^2-12x-7=0$

すなわち $(x+1)^2(2x-7)=0$

したがって $x=-1,\ \dfrac{7}{2}$

[1], [2] から，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



ゆえに，k が $-10<k<\dfrac{7}{2}$ の範囲を動くとき

$$-\frac{5}{2}<\alpha<-1,\ -1<\beta<2,\ 2<\gamma<\frac{7}{2}$$

(3) 解と係数の関係により

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}\ \cdots\cdots①,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-6\ \cdots\cdots②,\quad \alpha\beta\gamma=k\ \cdots\cdots③$$

①，② から $\alpha\gamma=-6-\beta(\alpha+\gamma)=-6-\beta\left(\dfrac{3}{2}-\beta\right)=\beta^2-\dfrac{3}{2}\beta-6=\left(\beta-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{105}{16}$

(2) より，$-1<\beta<2$ であるから，$\alpha\gamma$ は $\beta=\dfrac{3}{4}$ で最小値 $-\dfrac{105}{16}$ をとる。

このとき，③ から $k=\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{105}{16}\right)=-\dfrac{315}{64}$

14 (1) $f(x)$ が極値をもつ条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

$$f'(x)=3x^2-6x+3a=3(x^2-2x+a)$$

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると，$D>0$ であればよいから

$$(-1)^2-1\cdot a=1-a>0 \qquad よって \quad a<1$$

(2) $f'(x)=0$ の解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$ とすると，$f(x)$ の x^3 の係数が正であるから，$x=\beta$ で極大，$x=\alpha$ で極小となる。

$$\begin{aligned}f(\beta)-f(\alpha)&=(\beta^3-3\beta^2+3a\beta+b)-(\alpha^3-3\alpha^2+3a\alpha+b)\\&=(\beta^3-\alpha^3)-3(\beta^2-\alpha^2)+3a(\beta-\alpha)\\&=(\beta-\alpha)\{(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\beta+\alpha)+3a\}\\&=(\beta-\alpha)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3(\beta+\alpha)+3a\}\end{aligned}$$

ここで，解と係数の関係により $\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=a$

よって $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4a=4(1-a)$

$\beta<\alpha$ より，$\beta-\alpha<0$ であるから $\beta-\alpha=-2\sqrt{1-a}$

ゆえに $f(\beta)-f(\alpha)=-2\sqrt{1-a}\,(2^2-a-3\cdot 2+3a)$

$$=-4\sqrt{1-a}\,(a-1)=4(\sqrt{1-a}\,)^3$$

$f(\beta)-f(\alpha)=32$ であるから $4(\sqrt{1-a}\,)^3=32$ すなわち $(\sqrt{1-a}\,)^3=8$

したがって $\sqrt{1-a}=2$ $1-a=4$ から $a=-3$ これは $a<1$ を満たす。

別解 ($f(\beta)-f(\alpha)$ の計算)

(解 1) $x=\alpha,\ \beta$ は，$f'(x)=0$ の解であるから，$x^2-2x+a=0$ を満たす。

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline x^2-2x+a & x^3-3x^2+3ax+b \\ & x^3-2x^2+\ \ ax \\ \hline & \quad -x^2+2ax+b \\ & \quad -x^2+\ \ 2x-a \\ \hline & \qquad 2(a-1)x+a+b \end{array}$$

上の計算から　　$f(x)=(x^2-2x+a)(x-1)+2(a-1)x+a+b$

よって　　$f(\alpha)=2(a-1)\alpha+a+b$

$f(\beta)=2(a-1)\beta+a+b$

したがって　　$f(\beta)-f(\alpha)=2(a-1)(\beta-\alpha)=2(a-1)(-2\sqrt{1-a})$

$=4(\sqrt{1-a})^3$

(解 2)　$f(\beta)-f(\alpha)=\Big[f(x)\Big]_\alpha^\beta=\displaystyle\int_\alpha^\beta f'(x)dx=\int_\alpha^\beta 3(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=-\dfrac{3}{6}(\beta-\alpha)^3=-\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=-\dfrac{1}{2}(-2\sqrt{1-a})^3=4(\sqrt{1-a})^3$

(3)　$f(x)=x^3-3x^2-9x+b$ から　　$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-1$，3

$-4\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$b-76$	↗	$b+5$	↘	$b-27$	↗	$b-20$

よって，$f(x)$ は　$x=-1$ のとき最大値 $b+5$，

$x=-4$ のとき最小値 $b-76$　をとる。

したがって，$b+5=5$ から　　$b=0$　　　このとき　　$m=b-76=-76$

15　$f(-x)=-f(x)$ が成り立つから，$g(x)=|f(x)|$ とおくと

$g(-x)=|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|=g(x)$

よって，$g(x)$ は偶関数である。

ゆえに，区間 $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で最大値 M を考えればよい。

$f(x)=x^3-3ax$ から　　$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$

[1]　$a\leqq 0$ のとき

常に $f'(x)\geqq 0$ であるから，$f(x)$ は増加関数である。

また，$f(0)=0$ であるから，$0\leqq x\leqq 1$ において　　$f(x)\geqq 0$

よって　　$M=f(1)=1-3a$

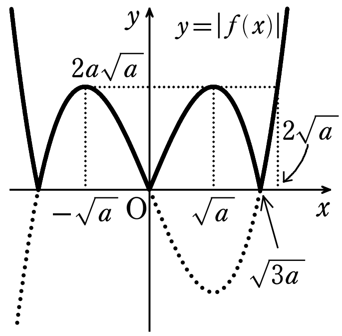
[2]　$a>0$ のとき

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm\sqrt{a}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

ゆえに，$y=|f(x)|$ のグラフは右の図のようになる。



$|f(\sqrt{a})|=2a\sqrt{a}$ であるから，$f(x)=2a\sqrt{a}$ となる x を求めると，$x^3-3ax=2a\sqrt{a}$ より

$$(x+\sqrt{a})^2(x-2\sqrt{a})=0$$

よって　　$x=-\sqrt{a}$，$2\sqrt{a}$

$x>0$ であるものは　　$x=2\sqrt{a}$

(i)　$0<2\sqrt{a}\leqq 1$ すなわち $0<a\leqq\dfrac{1}{4}$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$|f(x)|\leqq|f(1)|$ であるから　　$M=|f(1)|=1-3a$

(ii)　$\sqrt{a}\leqq 1<2\sqrt{a}$ すなわち $\dfrac{1}{4}<a\leqq 1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$|f(x)|\leqq|f(\sqrt{a})|$ であるから　　$M=|f(\sqrt{a})|=2a\sqrt{a}$

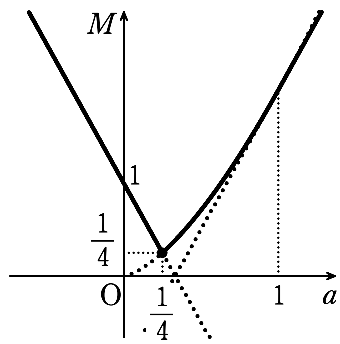
(iii)　$1<\sqrt{a}$ すなわち $1<a$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$|f(x)|\leqq|f(1)|$ であるから　　$M=|f(1)|=3a-1$

以上から　　$M=\begin{cases} 1-3a & \left(a<\dfrac{1}{4}\right) \\ 2a\sqrt{a} & \left(\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq 1\right) \\ 3a-1 & (1<a) \end{cases}$

したがって，M は $a\leqq\dfrac{1}{4}$ では減少し，$a\geqq\dfrac{1}{4}$ では増加するから，$a=\dfrac{1}{4}$ で最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

$\boxed{\text{参考}}$　a の関数 M のグラフは，右の図のようになる。



16　$f'(x)=-3x^2+3a=-3(x^2-a)$

$a\leqq 0$ ならば $f'(x)\leqq 0$ であるから，$f(x)$ は常に減少する。

よって，$f(x)$ は $x=0$ で最大となる。

$a>0$ ならば　$f'(x)=-3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm\sqrt{a}$

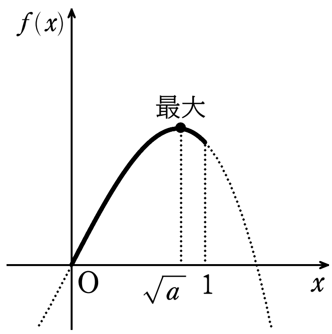
[1]　$0<\sqrt{a}<1$　すなわち　$0<a<1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$f(x)$ は $x=\sqrt{a}$ で極大かつ最大となる。

[1]

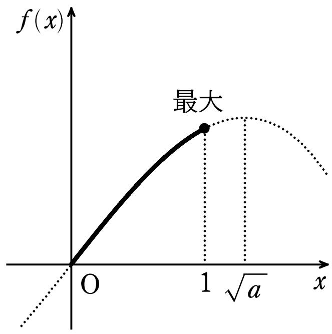


[2]　$1\leqq\sqrt{a}$　すなわち　$1\leqq a$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ で $f'(x)\geqq 0$ であるから，$f(x)$ は常に増加。

よって，$f(x)$ は $x=1$ で最大となる。

[2]



以上から

$a\leqq 0$ のとき　　$x=0$ で最大値 0,

$0<a<1$ のとき　$x=\sqrt{a}$ で最大値 $2a\sqrt{a}$,

$1\leqq a$ のとき　　$x=1$ で最大値 $3a-1$

BASIC問題

$\boxed{1}$ (1) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-2x+5)dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^2-x)dx-\int_{0}^{2}(x^2-x)dx+\int_{-1}^{0}(2x-1)dx$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 等式 $f(x)=1+2\displaystyle\int_{0}^{1}(xt+1)f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 等式 $\displaystyle\int_{a}^{x}f(u)du=5x^2-ax-7a-2$ を満たす関数 $f(x)$ と正の定数 a の値を求めよ．

$\boxed{4}$ 定積分 $\displaystyle\int_{0}^{2}|x^2+3x-4|dx$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 曲線 $y=(x+1)(x-1)(x-2)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

STANDARD問題

$\boxed{6}$ xy 平面において，連立不等式 $y \geqq |x^2-1|$，$y \leqq -x^2+2x+3$ の表す領域を Dの面積を求めよ。

$\boxed{7}$ 2つの放物線 $y=-x^2+2x+3$ と $y=-x^2+6x-3$ に共通して接する直線の方程式を求めよ．また，この直線と2つの放物線とで囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{8}$ a，b，c を定数とする。2つの曲線 $y=x^3+ax+b$ と $y=ax^2+bx+c$ が共有点 P(2，19) をもち，点 P において共通の接線をもつとき，次の問いに答えよ。

(1)　a，b，c の値を求めよ。

(2)　2つの曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{9}$ 放物線 $y=2+x-x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，点 (2，0) を通る直線 g で2等分するとき，g の傾きを求めよ。

実戦問題

10 次の関係式を満たす定数 a および関数 $g(x)$ を求めよ。

$$\int_a^x \{g(t)+tg(a)\}dt = x^2-2x-3$$

11 放物線 L：$y=x^2$ と点 $\mathrm{R}\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$ を中心とする円 C が異なる2点で接している。ただし，L と C が点 P で接しているとは，L と C が点 P を共有し，さらに L と C が点 P において共通の接線をもつことを意味する。

(1)　2つの接点の座標を求めよ。

(2)　円 C の方程式を求めよ。

(3)　2つの接点を両端とする円 C の短い方の弧と L とで囲まれる図形の面積を求めよ。

12 曲線 $y=x^3-4x^2+4x$ と直線 $y=mx$ とで囲まれてできる2つの図形の面積を等しくするように，定数 m $(0<m<4)$ の値を定めよ。

13 関数 $f(x)$ は $\begin{cases} x \leqq 0 \text{ では } f(x)=x(x+1) \\ x \geqq 0 \text{ では } f(x)=x(1-x) \end{cases}$ で与えられるとする.

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフを描け.

(2)　積分 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ を求め，曲線 $y=F(x)$ をグラフに示せ.

$\boxed{1}$ 解答 (1)　8　　(2)　$-\dfrac{7}{6}$

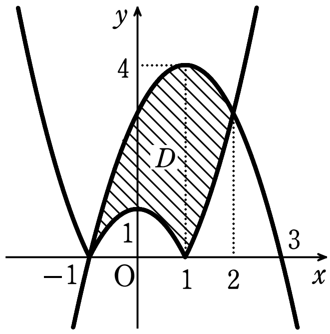
$\boxed{2}$ 解答 $f(x)=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$

$\boxed{3}$ 解答 $f(x)=10x-2$，$a=2$

$\boxed{4}$ 解答 5

$\boxed{5}$ 解答 $\dfrac{37}{12}$

$\boxed{6}$ 解答 (1)　〔図〕，境界線を含む　　(2)　$\dfrac{19}{3}$



$\boxed{7}$ 解答 順に $y=x+\dfrac{13}{4}$，$\dfrac{2}{3}$

$\boxed{8}$ 解答 (1)　$a=1$，$b=9$，$c=-3$　　(2)　$\dfrac{625}{12}$

$\boxed{9}$ 解答 $\dfrac{3\sqrt[3]{4}-6}{2}$

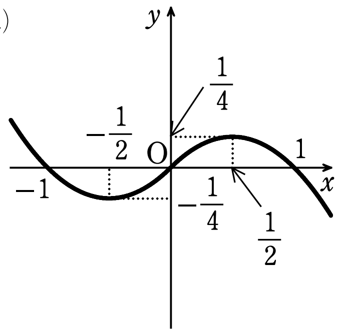
$\boxed{10}$ 解答 $a=3$，$g(x)=x-2$

$\boxed{11}$ 解答 (1)　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$　　(2)　$x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=1$　　(3)　$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{3}$

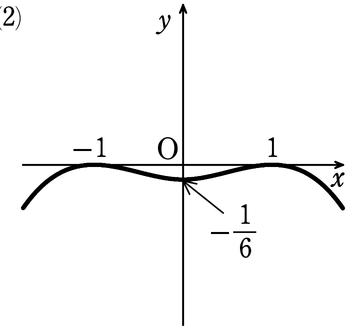
$\boxed{12}$ 解答 $m=\dfrac{4}{9}$

$\boxed{13}$ (2) $x\leqq 0$ のとき $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}$，$x\geqq 0$ のとき $F(x)=-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}$

(1)



(2)



1 (1) $\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-2x+5)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3-x^2+5x\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{4}-1-1+5\right)-\left(\frac{1}{4}+1-1-5\right)$

$=8$

別解 $\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-2x+5)dx=\int_{-1}^{1}(x^3-2x)dx+\int_{-1}^{1}(-3x^2+5)dx$

$=0+2\int_{0}^{1}(-3x^2+5)dx=2\left[-x^3+5x\right]_{0}^{1}=2(-1^3+5\cdot1-0)=8$

(2) (与式)$=\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_{0}^{2}(x^2-x)dx-\int_{0}^{2}(x^2-x)dx+\int_{-1}^{0}(2x-1)dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_{-1}^{0}(2x-1)dx$

$=\int_{-1}^{0}\{(x^2-x)+(2x-1)\}dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^2+x-1)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{0}$

$=0-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{7}{6}$

2 右辺を変形して　$f(x)=1+2x\int_{0}^{1}tf(t)\,dt+2\int_{0}^{1}f(t)\,dt$

$\int_{0}^{1}tf(t)\,dt=a$，$\int_{0}^{1}f(t)\,dt=b$ とおくと，a，b は定数であり

$f(x)=2ax+2b+1$

よって　$a=\int_{0}^{1}t(2at+2b+1)dt=\int_{0}^{1}\{2at^2+(2b+1)t\}dt$

$=\left[\frac{2}{3}at^3+\frac{2b+1}{2}t^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{2}{3}a+\frac{2b+1}{2}$

ゆえに　$2a-6b-3=0$　…… ①

一方　$b=\int_{0}^{1}(2at+2b+1)dt=\left[at^2+(2b+1)t\right]_{0}^{1}$

$=a+2b+1$

よって　$a+b+1=0$　…… ②

①，② を連立して解くと　$a=-\frac{3}{8}$，$b=-\frac{5}{8}$

ゆえに　$f(x)=2\left(-\frac{3}{8}\right)x+2\left(-\frac{5}{8}\right)+1=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

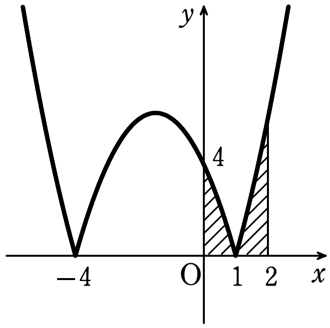
3 等式の両辺を x で微分すると　$f(x)=10x-a$

また，もとの等式の両辺に $x=a$ を代入すると　$0=5a^2-a^2-7a-2$

ゆえに，$4a^2-7a-2=0$ から　$(4a+1)(a-2)=0$　　$a>0$ であるから　$a=2$ 答

よって　$f(x)=10x-2$ 答

4 $|x^2+3x-4|=|(x+4)(x-1)|$



$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$|x^2+3x-4|=-(x^2+3x-4)$$

$1\leqq x\leqq 2$ のとき

$$|x^2+3x-4|=x^2+3x-4$$

したがって

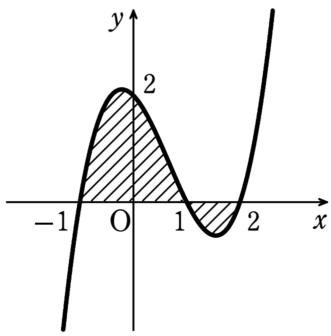
$$(\text{与式})=\int_0^1\{-(x^2+3x-4)\}dx+\int_1^2(x^2+3x-4)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_1^2$$

$$=5$$

5 方程式 $(x+1)(x-1)(x-2)=0$ を解くと

$$x=-1,\ 1,\ 2$$



グラフは右の図のようになり

$-1\leqq x\leqq 1$ で　$y\geqq 0$

$1\leqq x\leqq 2$ で　$y\leqq 0$

また　　$y=(x+1)(x-1)(x-2)=x^3-2x^2-x+2$

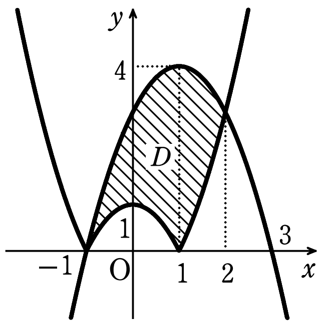
よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^1(x^3-2x^2-x+2)dx-\int_1^2(x^3-2x^2-x+2)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^1-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2$$

$$=\frac{8}{3}-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{37}{12}$$

6 (1)　$y=|x^2-1|$ のグラフは，$y=x^2-1$ の $y<0$ の部分を上に折り返したものである。



また　　$y=-x^2+2x+3$

$$=-(x-1)^2+4$$

よって，領域 D は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

(2)　2つのグラフ $y=|x^2-1|$，$y=-x^2+2x+3$ の $x>1$ における共有点について，

$x^2-1=-x^2+2x+3$ とすると

$2x^2-2x-4=0$　　　よって　　$(x+1)(x-2)=0$

$x>1$ であるから $x=2$

ゆえに，領域 D の面積は，図より

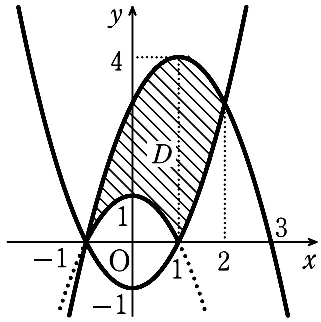
$$\int_{-1}^{1}\{(-x^2+2x+3)-(-x^2+1)\}dx+\int_{1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(2x+2)dx+\int_{1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$$

$$=\Big[x^2+2x\Big]_{-1}^{1}+\Big[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\Big]_{1}^{2}$$

$$=(1+2)-(1-2)+\left(-\frac{16}{3}+4+8\right)-\left(-\frac{2}{3}+1+4\right)$$

$$=\frac{19}{3}$$



別解　領域 D の面積は，放物線 $y=x^2-1$ と放物線 $y=-x^2+2x+3$ で囲まれた部分の面積から，放物線 $y=x^2-1$ と放物線 $y=1-x^2$ で囲まれた部分の面積を引いたものである。

ゆえに，求める面積は

$$\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx$$

$$-\int_{-1}^{1}\{(1-x^2)-(x^2-1)\}dx$$

$$=-2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx+2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx$$

$$=\frac{2}{6}\{2-(-1)\}^3-\frac{2}{6}\{1-(-1)\}^3=\frac{19}{3}$$

$\boxed{7}$ $y=-x^2+2x+3$ …… ①，$y=-x^2+6x-3$ …… ② とおく．

① において　$y'=-2x+2$

放物線 ① 上の点 $(t,\ -t^2+2t+3)$ における接線の方程式は

$$y=(-2t+2)(x-t)-t^2+2t+3$$

すなわち　$y=(-2t+2)x+t^2+3$ …… ③

② において　$y'=-2x+6$

放物線 ② 上の点 $(p,\ -p^2+6p-3)$ における接線の方程式は

$$y=(-2p+6)(x-p)-p^2+6p-3$$

すなわち　$y=(-2p+6)x+p^2-3$ …… ④

③，④ が一致するとき

$$-2t+2=-2p+6,\ t^2+3=p^2-3$$

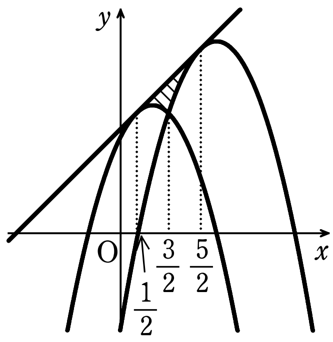
これを解いて　$t=\frac{1}{2}$，$p=\frac{5}{2}$

$t=\dfrac{1}{2}$ を ③ に代入して　$y=x+\dfrac{13}{4}$

これが求める直線の方程式である.

2 つの放物線 ①，② の交点の x 座標は $-x^2+2x+3=-x^2+6x-3$ を解いて　$x=\dfrac{3}{2}$

よって，求める面積を S とすると，図から



$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left\{\left(x+\frac{13}{4}\right)-(-x^2+2x+3)\right\}dx$$

$$+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\left\{\left(x+\frac{13}{4}\right)-(-x^2+6x-3)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)^3\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}$$

$\boxed{8}$ (1)　$f(x)=x^3+ax+b$，$g(x)=ax^2+bx+c$　とする。

$y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフがともに点 $\mathrm{P}(2,\ 19)$ を通るから

$f(2)=19$　かつ　$g(2)=19$

よって　　$8+2a+b=19$　…… ①

$4a+2b+c=19$　…… ②

また，点 P において共通接線をもつから，P における $y=f(x)$，$y=g(x)$ の接線の傾きが等しい。

すなわち　　$f'(2)=g'(2)$

$f'(x)=3x^2+a$，$g'(x)=2ax+b$ であるから

$12+a=4a+b$　…… ③

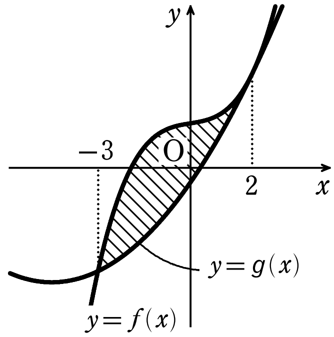
①，③ を解いて　　$a=1$，$b=9$

② に代入して　　$4+18+c=19$　　　よって　　$c=-3$

ゆえに　　$a=1$，$b=9$，$c=-3$

(2)　(1) より　$f(x)=x^3+x+9$,

$g(x)=x^2+9x-3$



2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標について,

$$x^3+x+9=x^2+9x-3$$

とすると

$$x^3-x^2-8x+12=0$$

よって　$(x-2)^2(x+3)=0$

ゆえに，共有点の x 座標は

$$2,\ -3$$

したがって，求める面積は

$$\int_{-3}^{2}\{(x^3+x+9)-(x^2+9x-3)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{2}(x^3-x^2-8x+12)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-4x^2+12x\right]_{-3}^{2}$$

$$=\left(\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3}-4\cdot2^2+12\cdot2\right)-\left\{\frac{(-3)^4}{4}-\frac{(-3)^3}{3}-4\cdot(-3)^2+12\cdot(-3)\right\}$$

$$=\frac{625}{12}$$

参考　$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$ である。

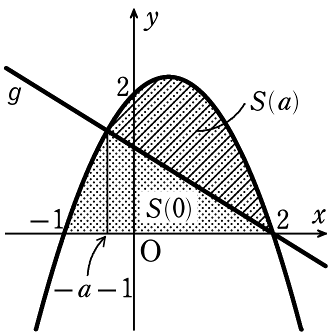
これを利用すると，面積は次のように求められる。

$$\int_{-3}^{2}\{(x^3+x+9)-(x^2+9x-3)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{2}(x+3)(x-2)^2dx=\frac{1}{12}\{2-(-3)\}^4=\frac{625}{12}$$

9　点 (2, 0) を通り，x 軸に垂直な直線は条件を満たさない。

よって，直線 g の方程式を　$y=a(x-2)$　とおく。



放物線 $y=2+x-x^2$ と直線 g で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。両者の交点の x 座標は，方程式 $2+x-x^2=a(x-2)$ を解いて　$x=2,\ -a-1$

条件を満たすとき

$-1<-a-1<2$　すなわち　$-3<a<0$　……①

$$S(a)=\int_{-a-1}^{2}\{(2+x-x^2)-a(x-2)\}dx$$

$$=-\int_{-a-1}^{2}(x+a+1)(x-2)dx$$

$$=\frac{1}{6}\{2-(-a-1)\}^3=\frac{1}{6}(a+3)^3$$

放物線 $y=2+x-x^2$ と x 軸 $[y=0(x-2)]$ で囲まれた図形の面積は $S(0)$ であり

$S(0)=\dfrac{1}{6}(0+3)^3=\dfrac{9}{2}$

面積を 2 等分するとき，$2S(a)=S(0)$ であるから

$2\cdot\dfrac{1}{6}(a+3)^3=\dfrac{9}{2}$　　よって　　$(a+3)^3=\dfrac{27}{2}$

ゆえに　　$a+3=\sqrt[3]{\dfrac{27}{2}}$　　よって　　$a=\dfrac{3\sqrt[3]{4}-6}{2}$　(これは ① を満たす)

したがって，g の傾きは　　$\dfrac{3\sqrt[3]{4}-6}{2}$

10　等式の両辺を x で微分すると　$g(x)+xg(a)=2x-2$　…… ①

また，等式の両辺に $x=a$ を代入すると　$0=a^2-2a-3$

よって　$(a-3)(a+1)=0$

ゆえに　$a=3$，-1

$a=3$ のとき，① より　$g(x)+xg(3)=2x-2$　…… ②

② に $x=3$ を代入すると　$g(3)+3g(3)=4$

よって　$g(3)=1$

② より　$g(x)=x-2$

$a=-1$ のとき，① より　$g(x)+xg(-1)=2x-2$

これに $x=-1$ を代入すると　$g(-1)-g(-1)=-4$

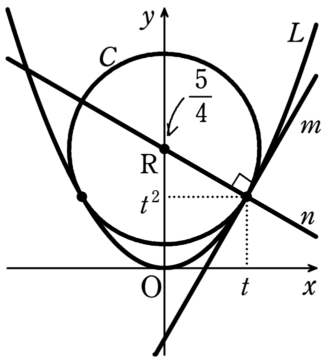
よって，$0=-4$ となり不適。

以上から　$a=3$，$g(x)=x-2$

11　(1)　$y=x^2$ から　　$y'=2x$

L と C の接点の x 座標を $t\,(t\neq 0)$ とし，この点での共通の接線を m とすると，m の傾きは　　$2t$

点 $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ と点 $(t,\ t^2)$ を通る直線を n とすると，



n の傾きは　　$\dfrac{t^2-\dfrac{5}{4}}{t-0}=\dfrac{4t^2-5}{4t}$

直線 m，n は直交するから　　$2t\cdot\dfrac{4t^2-5}{4t}=-1$

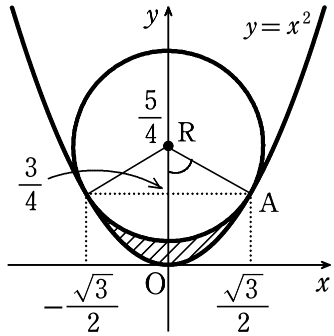
整理すると　　$t^2=\dfrac{3}{4}$　　　よって　　$t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，接点の座標は　　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

(2)　点 $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ と点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$ の距離は　　$\sqrt{\left(0-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{4}\right)^2}=1$

よって，円 C の方程式は　$x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=1$

(3)　右の図のように，接点を A とすると，



$\sin\angle\mathrm{ORA}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より　$\angle\mathrm{ORA}=\dfrac{\pi}{3}$

よって，求める面積は

$$2\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x^2dx\right\}$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=2\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$$

別解　(1)，(2)　円の方程式を $x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=r^2\ (r>0)$ とする。

これと $y=x^2$ から x^2 を消去すると　$y+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=r^2$

よって　$16y^2-24y+25-16r^2=0$　……①

円と放物線が異なる 2 点で接する条件は，① が重解をもつことである。

すなわち，① の判別式を D とすると　$D=0$

$$\frac{D}{4}=(-12)^2-16(25-16r^2)=256(r^2-1)$$

よって　$r^2=1$　　$r>0$ であるから　$r=1$

このとき，① の重解は　$x=\dfrac{-(-12)}{16}=\dfrac{3}{4}$

$x^2=\dfrac{3}{4}$ より　$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　接点の座標は　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

円の方程式は　$x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=1$

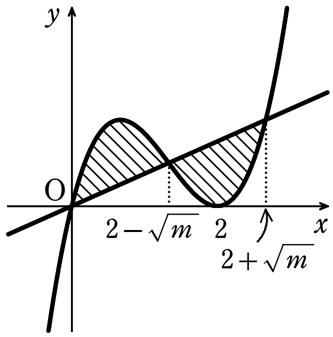
12　まず，曲線 $y=x^3-4x^2+4x$ と直線 $y=mx$ の共有点の x 座標を求める。

$x^3-4x^2+4x=mx$ とすると　$x(x^2-4x+4-m)=0$

$0<m<4$ であるから

$x=0,\ 2\pm\sqrt{m}$

$0<m<4$ のとき，囲まれてできる２つの図形は右の図のようになるから，$\alpha=2-\sqrt{m}$，$\beta=2+\sqrt{m}$ とおくと，条件より



$$\int_0^{\alpha}\{(x^3-4x^2+4x)-mx\}dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{mx-(x^3-4x^2+4x)\}dx$$

よって　$\int_0^{\alpha}\{(x^3-4x^2+4x)-mx\}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{(x^3-4x^2+4x)-mx\}dx=0$

ゆえに　$\int_0^{\beta}\{(x^3-4x^2+4x)-mx\}dx=0$

すなわち　$\int_0^{\beta}\{x^3-4x^2+(4-m)x\}dx=0$

よって　$\left[\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{4-m}{2}x^2\right]_0^{\beta}=0$

したがって　$\dfrac{\beta^4}{4}-\dfrac{4}{3}\beta^3+\dfrac{4-m}{2}\beta^2=0$　すなわち　$\dfrac{\beta^2}{12}\{3\beta^2-16\beta+6(4-m)\}=0$

$\beta\neq 0$ であるから　$3\beta^2-16\beta+6(4-m)=0$

$\beta=2+\sqrt{m}$ を代入して　$3(2+\sqrt{m})^2-16(2+\sqrt{m})+6(4-m)=0$

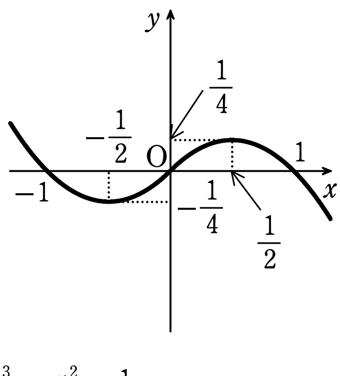
整理すると　$3(\sqrt{m})^2+4\sqrt{m}-4=0$　　よって　$(3\sqrt{m}-2)(\sqrt{m}+2)=0$

$\sqrt{m}+2>0$ であるから　$\sqrt{m}=\dfrac{2}{3}$　　ゆえに　$m=\dfrac{4}{9}$　これは $0<m<4$ を満たす。

$\boxed{13}$ (1)　$x\leqq 0$ のとき　$f(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

$x\geqq 0$ のとき　$f(x)=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

よって，$y=f(x)$ のグラフは，右図のようになる．



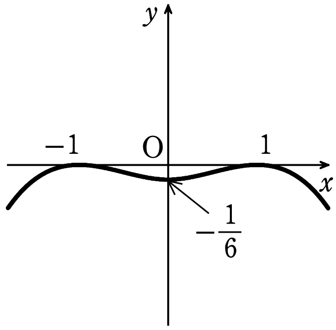
(2)　$x\leqq 0$ のとき　$F(x)=\int_{-1}^{x}t(t+1)dt=\left[\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x}=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}$

$x\geqq 0$ のとき　$F(x)=\int_{-1}^{0}t(t+1)dt+\int_0^{x}t(1-t)dt=-\dfrac{1}{6}+\left[\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{t^3}{3}\right]_0^{x}$

$$=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}$$

$F'(x)=f(x)$ から，$F(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{6}$	$\nearrow$	0	$\searrow$



ゆえに，$y=F(x)$ のグラフは右図のようになる．

BASIC問題

1　第 5 項が 10，第 10 項が 25 である等差数列 $\{a_n\}$ の，第 20 項から第 29 項までの和 S を求めよ。

2　ある等比数列の初項から第 n 項までの和が 54，初項から第 $2n$ 項までの和が 63 であるとき，この等比数列の初項から第 $3n$ 項までの和を求めよ.

3　次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$1\cdot3$，$3\cdot5$，$5\cdot7$，……，$(2n-1)(2n+1)$

4　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$\dfrac{1}{1\cdot5}$，$\dfrac{1}{5\cdot9}$，$\dfrac{1}{9\cdot13}$，……

5　初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2+5n+1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

6　3 つの数 -5，a，b がこの順に等差数列をなし，a，b，45 がこの順に等比数列をなす。このとき，a，b の値を求めよ。

STANDARD問題

7　初項 70 の等差数列 $\{a_n\}$ の第 10 項から第 20 項までの和が 0 であるとする。このとき，初項から第何項までの和が最大となるか。また，その最大値を求めよ。

8　数列 1，11，111，1111，…… の一般項 a_n と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

9　次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　1，$1+3$，$1+3+9$，$1+3+9+27$，……

(2)　1^2，1^2+2^2，$1^2+2^2+3^2$，$1^2+2^2+3^2+4^2$，……

10　次の和 S を求めよ。

(1)　$S=1+4x+7x^2+10x^3+\cdots\cdots+(3n-2)x^{n-1}$

(2)　$S=2^{n-1}+2\cdot2^{n-2}+3\cdot2^{n-3}+\cdots\cdots+(n-1)\cdot2+n$

実戦問題

11 p は素数，m，n は正の整数で $m<n$ とする。m と n の間にあって，p を分母とする既約分数の総和を求めよ。

12 2 以上の整数 n に対し，

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$ を求めよ。

13 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{76}\frac{2}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+5}}$ を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　685

$\boxed{2}$ 解答　$\dfrac{129}{2}$

$\boxed{3}$ 解答　$\dfrac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$

$\boxed{4}$ 解答　$\dfrac{n}{4n+1}$

$\boxed{5}$ 解答　$a_1=7$，$n \geqq 2$ のとき　$a_n=2n+4$

$\boxed{6}$ 解答　$a=5$，$b=15$　または　$a=\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{15}{2}$

$\boxed{7}$ 解答　第 14 項または第 15 項，最大値は 525

$\boxed{8}$ 解答　$a_n=\dfrac{1}{9}(10^n-1)$，$S_n=\dfrac{1}{81}(10^{n+1}-9n-10)$

$\boxed{9}$ 解答　(1)　一般項が$\dfrac{3^k-1}{2}$であることから，和は$\dfrac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$

(2)　一般項が$\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$であることから，和は$\dfrac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

$\boxed{10}$ 解答　(1)　$x=1$ のとき　$S=\dfrac{1}{2}n(3n-1)$，

$x \fallingdotseq 1$ のとき　$S=\dfrac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$

(2)　$S=2^{n+1}-n-2$

$\boxed{11}$ 解答　$\dfrac{1}{2}(m+n)(n-m)(p-1)$

$\boxed{12}$ 解答　$\dfrac{(n+2)(n-1)}{4n(n+1)}$

$\boxed{13}$ 解答　$7+3\sqrt{5}$

$\boxed{1}$ 初項を a，公差を d とする。

第 5 項が 10であるから　$a+(5-1)d=10$　すなわち　$a+4d=10$　……①

第 10 項が 25 であるから　$a+(10-1)d=25$　すなわち　$a+9d=25$　……②

①，② を解くと　$a=-2$，$d=3$

初項から第 29 項までの和は　$\dfrac{1}{2}\cdot 29\{2\cdot(-2)+(29-1)\cdot 3\}=1160$

初項から第 19 項までの和は　$\dfrac{1}{2}\cdot 19\{2\cdot(-2)+(19-1)\cdot 3\}=475$

よって　$S=1160-475=685$

$\boxed{2}$ 初項を a，公比を r とおく．また，初項から第 n 項までの和を S_n とおく．

$r=1$ とすると，条件から　$S_n=an=54$，$S_{2n}=2an=63$

これを満たす a，n は存在しないから不適．

$r \fallingdotseq 1$ とすると，条件から　$S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=54$，$S_{2n}=\dfrac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=63$

$\dfrac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}(r^n+1)$ と変形できるから　$54(r^n+1)=63$

よって　$r^n=\dfrac{1}{6}$　このとき $r \fallingdotseq 1$ を満たす．

ゆえに　$S_{3n}=\dfrac{a(r^{3n}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}(r^{2n}+r^n+1)$

$$=54\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{6}+1\right)=\frac{129}{2}$$

$\boxed{3}$ $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-1)=4\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}1=4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n$

$$=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)-n=\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-3\}=\frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$$

$\boxed{4}$ 第 k 項は

$$\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4k+1)-(4k-3)}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)$$

ゆえに，初項から第 n 項までの和は

$$\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{n}{4n+1}$$

$\boxed{5}$ 初項 a_1 は　$a_1=S_1=1^2+5\cdot1+1=7$ …… ①

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+5n+1)-\{(n-1)^2+5(n-1)+1\}$

$=(n^2+5n+1)-(n^2+3n-3)$

$=2n+4$

① より $a_1=7$ であるから，この式は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって　$a_1=7$，　$n\geqq2$ のとき　$a_n=2n+4$

$\boxed{6}$ -5，a，b がこの順に等差数列をなすから　$2a=-5+b$ …… ①

a，b，45 がこの順に等比数列をなすから　$b^2=45a$ …… ②

① から　$b=2a+5$ …… ③　② に代入して　$(2a+5)^2=45a$

整理して　$4a^2-25a+25=0$　これを解いて　$a=5,\ \frac{5}{4}$

③ から　$a=5$ のとき　$b=15$，　$a=\frac{5}{4}$ のとき　$b=\frac{15}{2}$

よって　$a=5$，$b=15$　または　$a=\frac{5}{4}$，$b=\frac{15}{2}$

$\boxed{7}$ (1)　等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると　$a_n=70+(n-1)d$ …… ①

第 10 項から第 20 項までの 11 項の和が 0 であるから

$\frac{1}{2}\cdot11(a_{10}+a_{20})=0$　すなわち　$a_{10}+a_{20}=0$

① から　$(70+9d)+(70+19d)=0$　よって　$d=-5$

① に代入して　$a_n=70+(n-1)\cdot(-5)=-5n+75$

$a_n<0$ とすると　$-5n+75<0$

ゆえに，$n>15$ から　第 16 項

(2)　この等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) より，a_1 から a_{14} までは正の数，a_{15} は 0，a_{16} からは負の数となるから，S_n は $n=14$ または $n=15$ のとき最大となり，最大値は

$$S_{14}=S_{15}=\frac{1}{2}\cdot14\{2\cdot70+13\cdot(-5)\}=\frac{1}{2}\cdot14\cdot75=525$$

よって，初項から第 14 項，または第 15 項までの和が最大で，最大値は 525

8 この数列は　1，$1+10$，$1+10+10^2$，……　となるから，一般項は

$$a_n=1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{n-1}=\frac{1(10^n-1)}{10-1}=\frac{1}{9}(10^n-1)$$

よって
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9}(10^k-1)=\frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}$$
$$=\frac{1}{81}(10^{n+1}-9n-10)$$

9 与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。

(1)　第 k 項は初項 1，公比 3，項数 k の等比数列の和である。

$$a_k=\frac{1\cdot(3^k-1)}{3-1}=\frac{3^k-1}{2}$$

よって，求める和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}3^k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{n}{2}$$
$$=\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$$

(2)　第 k 項は　$\displaystyle\sum_{m=1}^{k}m^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

よって，求める和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n^2+3n+2)$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

$\boxed{10}$ (1)　$x=1$ のとき

$$S=1+4+7+10+\cdots\cdots+(3n-2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(3k-2)=3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2n$$

$$=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

$x \neq 1$ のとき

$$S=1+4x+7x^2+\cdots\cdots+(3n-2)x^{n-1}$$

$$xS=\quad x+4x^2+\cdots\cdots+(3n-5)x^{n-1}+(3n-2)x^n$$

辺々引くと

$$(1-x)S=1+3(x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1})-(3n-2)x^n$$

$$=1+\frac{3x(1-x^{n-1})}{1-x}-(3n-2)x^n$$

$$=\frac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{1-x}$$

よって　$S=\dfrac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$

(2)　$2S=2^n+2\cdot2^{n-1}+3\cdot2^{n-2}+\cdots\cdots+(n-1)\cdot2^2+n\cdot2$

$$S=2^{n-1}+2\cdot2^{n-2}+\cdots\cdots+(n-2)\cdot2^2+(n-1)\cdot2+n$$

辺々引くと

$$S=2^n+2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots\cdots+2^2+2-n$$

$$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n$$

よって　　$S=2^{n+1}-n-2$

$\boxed{11}$ まず，q を自然数として，$m<\dfrac{q}{p}<n$ を満たす $\dfrac{q}{p}$ を求める。

$mp<q<np$ であるから

$$q=mp+1,\ mp+2,\ \cdots\cdots,\ np-1$$

よって　$\dfrac{q}{p}=\dfrac{mp+1}{p},\ \dfrac{mp+2}{p},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{np-1}{p}$　……①

これらの和を S_1 とすると

$$S_1=\frac{(np-1)-(mp+1)+1}{2}\left(\frac{mp+1}{p}+\frac{np-1}{p}\right)=\frac{np-mp-1}{2}(m+n)$$

① のうち $\dfrac{q}{p}$ が整数となるのは　$\dfrac{q}{p}=m+1,\ m+2,\ \cdots\cdots,\ n-1$

これらの和を S_2 とすると

$$S_2=\frac{(n-1)-(m+1)+1}{2}\{(m+1)+(n-1)\}=\frac{n-m-1}{2}(m+n)$$

求める総和を S とすると，$S=S_1-S_2$ であるから

$$S=\frac{np-mp-1}{2}(m+n)-\frac{n-m-1}{2}(m+n)$$

$$=\frac{1}{2}(m+n)\{(n-m)p-(n-m)\}$$

$$=\frac{1}{2}(m+n)(n-m)(p-1)$$

$\boxed{12}$ 求める和を S とする。

$\dfrac{1}{(k-1)k(k+1)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{(k-1)k}-\dfrac{1}{k(k+1)}\right\}$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}=\frac{(n+2)(n-1)}{4n(n+1)}$$

$\boxed{13}$ $\dfrac{2}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+5}}=\dfrac{2(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+5})}{(\sqrt{k+3}+\sqrt{k+5})(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+5})}$

$=\dfrac{2(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+5})}{k+3-(k+5)}=\sqrt{k+5}-\sqrt{k+3}$

したがって　　(与式)$=\displaystyle\sum_{k=1}^{76}(\sqrt{k+5}-\sqrt{k+3})$

$=(\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+(\sqrt{8}-\sqrt{6})+\cdots\cdots$

$+(\sqrt{79}-\sqrt{77})+(\sqrt{80}-\sqrt{78})+(\sqrt{81}-\sqrt{79})$

$=-\sqrt{4}-\sqrt{5}+\sqrt{80}+\sqrt{81}$

$=-2-\sqrt{5}+4\sqrt{5}+9=7+3\sqrt{5}$

BASIC問題

$\boxed{1}$ $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-2$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{2}$ $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2n$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{3}$ $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$一般項を求めよ。

$\boxed{4}$ $a_1=10$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{5}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n-2a_n$ で表されるとき，a_n を n の式で表せ。

STANDARD問題

$\boxed{6}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=16{a_n}^5$$

$\boxed{7}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_2=4$，$a_{n+2}-3a_{n+1}-10a_n=0$

(2)　$a_1=3$，$a_2=8$，$a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$

$\boxed{8}$ $a_1=1$，$b_1=3$，$a_{n+1}=3a_n+2b_n$，$b_{n+1}=2a_n+3b_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

$\boxed{9}$ $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$ で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

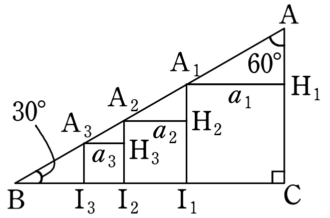
$\boxed{10}$ 漸化式 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-4}{a_n-3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を，$b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ のおき換えを利用して求めよ。

実戦問題

11 $a_1=\dfrac{2}{3}$，$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

12 ＊ $a_1=1$，$a_{n+1}=1+a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

13 $A=60^\circ$，$B=30^\circ$，$\mathrm{AC}=1$ である直角三角形 ABC 内に，右の図のように，1 辺の長さが a_1，a_2，a_3，$\cdots$ の正方形が並んでいる。

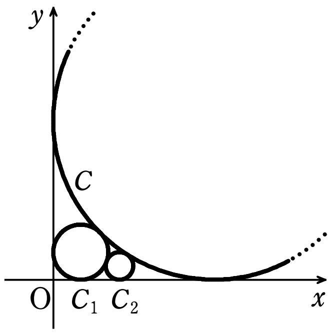


(1) a_1，a_2 の値を求めよ。

(2) 右の図の $\triangle\mathrm{A_1A_2H_2}$ と $\triangle\mathrm{ABC}$ が相似であることに着目して，一般に a_n，a_{n+1} の間に成り立つ関係式を導け。

(3) a_n の値を n を用いて表せ。

14 右図のように，xy 平面上の点 $(1,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。x 軸，y 軸の正の部分，円 C と接する円で C より小さいものを C_1 とする。更に，x 軸の正の部分，円 C，円 C_1 と接する円を C_2 とする。以下，順に x 軸の正の部分，円 C，円 C_n と接する円を C_{n+1} とする。また，円 C_n の中心の座標を $(a_n,\ b_n)$ とする。ただし，円 C_{n+1} は円 C_n の右側にあるとする。



(1) a_1，b_1 をそれぞれ求めよ。

(2) a_n，a_{n+1} の関係式を求めよ。

(3) $c_n=\dfrac{1}{1-a_n}$ とおくことにより，数列 $\{a_n\}$ の一般項を n の式で表せ。

1 解答 $2\cdot 3^{n-1}+1$

2 解答 n^2-n+3

3 解答 (1) $a_n=\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}-1}$ (2) $a_n=\dfrac{1}{2\cdot 3^{n-1}-1}$

4 解答 $a_n=2^n(2n+3)$

5 解答 $a_n=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1$

6 解答 $a_n=2^{2\cdot 5^{n-1}-1}$

7 解答 (1) $a_n=\dfrac{1}{7}\{8\cdot 5^{n-1}+6\cdot(-2)^{n-1}\}$ (2) $a_n=4^{n-1}(4-n)$

8 解答 (1) $a_n+b_n=4\cdot 5^{n-1}$，$a_n-b_n=-2$

(2) $a_n=2\cdot 5^{n-1}-1$，$b_n=2\cdot 5^{n-1}+1$

9 解答 (1) $\alpha=-2$，$\beta=-1$ (2) $a_n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$

10 解答 $a_n=2-\dfrac{1}{n}$

11 解答 $a_n=\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$

12 解答 $a_n=n!$

13 解答 (1) $a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，$a_2=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}$ (2) $a_{n+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$

(3) $a_n=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^n$

14 解答 (1) (ア) $3-2\sqrt{2}$ (イ) $3-2\sqrt{2}$ (2) $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}(1-a_n)(1-a_{n+1})$

(3) $a_n=1-\dfrac{2}{n+\sqrt{2}}$

$\boxed{1}$ $a_{n+1}=3a_n-2$

$c=3c-2$ を解くと　$c=1$

漸化式を変形すると　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

$a_n-1=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=3b_n$

また　　$b_1=a_1-1=3-1=2$

数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公比 3 の等比数列であるから　$b_n=2\cdot 3^{n-1}$

よって　　$a_n=b_n+1=2\cdot 3^{n-1}+1$

$\boxed{2}$ 漸化式を変形すると　$a_{n+1}-a_n=2n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n=2n$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}2k=3+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

よって　$a_n=n^2-n+3$　……①

① において $n=1$ を代入すると　$a_1=3$

よって，① は $n=1$ でも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=n^2-n+3$

$\boxed{3}$ (1)　$a_1=\dfrac{1}{2}>0$ であり，漸化式により

$a_1>0$ から　$a_2>0$，　　$a_2>0$ から　$a_3>0$，　　…………

一般に，$a_n>0$ が成り立つ。

ゆえに，漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{a_n}\qquad\text{すなわち}\qquad\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+1$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=2b_n+1$　……①　　　　また　　$b_1=\dfrac{1}{a_1}=2$

① を変形すると　　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は　　$b_1+1=2+1=3$

ゆえに　　$b_n+1=3\cdot 2^{n-1}$　　すなわち　　$b_n=3\cdot 2^{n-1}-1$

したがって　　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}-1}$

(2)　$a_1=1>0$ であり，漸化式により

$a_1>0$ から　$a_2>0$，　　$a_2>0$ から　$a_3>0$，　　…………

一般に，$a_n>0$ が成り立つ。

ゆえに，漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}\qquad\text{すなわち}\qquad\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}+2$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=3b_n+2$　……①　　　　また　　$b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$

① を変形すると　　$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は　$b_1+1=1+1=2$

ゆえに　$b_n+1=2\cdot 3^{n-1}$　すなわち　$b_n=2\cdot 3^{n-1}-1$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{2\cdot 3^{n-1}-1}$

$\boxed{4}$ $a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+2$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+2$

また　$b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{10}{2}=5$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5，公差 2 の等差数列であるから

$b_n=5+(n-1)\times 2=2n+3$

したがって　$a_n=2^n\cdot b_n=2^n(2n+3)$

$\boxed{5}$ $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\{(n+1)-2a_{n+1}\}-(n-2a_n)=-2a_{n+1}+2a_n+1$

ゆえに　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}$　…… ①　　また，$a_1=S_1=1-2a_1$ から　$a_1=\dfrac{1}{3}$

① を変形すると　$a_{n+1}-1=\dfrac{2}{3}(a_n-1)$

よって，数列 $\{a_n-1\}$ は公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列で，初項は　$a_1-1=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$

したがって　$a_n-1=-\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　すなわち　$a_n=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1$

$\boxed{6}$ $a_1=2>0$ より，漸化式の形からすべての自然数 n について $a_n>0$ である。

漸化式について，両辺の 2 を底とする対数をとると　$\log_2 a_{n+1}=\log_2 16a_n{}^5$

ここで　$\log_2 16a_n{}^5=\log_2(2^4\cdot a_n{}^5)=4+5\log_2 a_n$

よって　$\log_2 a_{n+1}=4+5\log_2 a_n$

$\log_2 a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=4+5b_n$

変形すると　$b_{n+1}+1=5(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は公比 5 の等比数列で，初項は

$$b_1+1=\log_2 a_1+1=\log_2 2+1=1+1=2$$

ゆえに　$b_n+1=2\cdot 5^{n-1}$　　よって　$b_n=2\cdot 5^{n-1}-1$

したがって　$a_n=2^{b_n}=2^{2\cdot 5^{n-1}-1}$

$\boxed{7}$ (1) $a_{n+2}-3a_{n+1}-10a_n=0$ ……①

①から　$a_{n+2}+2a_{n+1}=5(a_{n+1}+2a_n)$　　また　$a_2+2a_1=4+2\cdot 2=8$

よって，数列 $\{a_{n+1}+2a_n\}$ は初項 8，公比 5 の等比数列であるから

$$a_{n+1}+2a_n=8\cdot 5^{n-1} \quad \cdots\cdots ②$$

①から　$a_{n+2}-5a_{n+1}=-2(a_{n+1}-5a_n)$　　また　$a_2-5a_1=4-5\cdot 2=-6$

よって，数列 $\{a_{n+1}-5a_n\}$ は初項 -6，公比 -2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-5a_n=-6\cdot(-2)^{n-1} \quad \cdots\cdots ③$$

②−③から　$7a_n=8\cdot 5^{n-1}+6\cdot(-2)^{n-1}$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{7}\{8\cdot 5^{n-1}+6\cdot(-2)^{n-1}\}$

(2) $a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$ を変形すると　$a_{n+2}-4a_{n+1}=4(a_{n+1}-4a_n)$

また　$a_2-4a_1=8-4\cdot 3=-4$

よって，数列 $\{a_{n+1}-4a_n\}$ は初項 -4，公比 4 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-4a_n=-4\cdot 4^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1}-4a_n=-4^n$$

両辺を 4^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{4^{n+1}}-\dfrac{a_n}{4^n}=-\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{a_n}{4^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}-b_n=-\dfrac{1}{4}$　　また　$b_1=\dfrac{a_1}{4}=\dfrac{3}{4}$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\dfrac{3}{4}$，公差 $-\dfrac{1}{4}$ の等差数列であるから

$$b_n=\frac{3}{4}+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{4-n}{4}$$

したがって　$a_n=4^n\cdot b_n=4^{n-1}(4-n)$

$\boxed{8}$ (1) $a_{n+1}=3a_n+2b_n$ ……①，　$b_{n+1}=2a_n+3b_n$ ……②　とする。

①+②から　$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$

また　$a_1+b_1=1+3=4$

数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 4，公比 5 の等比数列であるから

$$a_n+b_n=4\cdot 5^{n-1} \quad \cdots\cdots ③$$

①−② から　$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$

よって　$a_n-b_n=a_{n-1}-b_{n-1}=\cdots\cdots=a_2-b_2=a_1-b_1$

ここで　$a_1-b_1=1-3=-2$

ゆえに　$a_n-b_n=-2$　……④

(2)　③+④ から　$2a_n=4\cdot5^{n-1}-2$　　よって　$a_n=2\cdot5^{n-1}-1$

③−④ から　$2b_n=4\cdot5^{n-1}+2$　　よって　$b_n=2\cdot5^{n-1}+1$

$\boxed{9}$ (1)　$b_n=a_n-(\alpha n+\beta)$ から　$a_n=b_n+\alpha n+\beta$　……①

$a_{n+1}=3a_n+4n$ と ① から　$b_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=3(b_n+\alpha n+\beta)+4n$

ゆえに　$b_{n+1}=3b_n+2(\alpha+2)n-\alpha+2\beta$

数列 $\{b_n\}$ が等比数列となるための条件は，$2(\alpha+2)n-\alpha+2\beta=0$ が，n の値に関係なく常に成り立つことである。

よって，$\alpha+2=0$，$-\alpha+2\beta=0$ から　$\alpha=-2$，$\beta=-1$

(2)　(1) の結果から，$b_n=a_n+2n+1$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$

ここで，$b_1=a_1+2\cdot1+1=1+2+1=4$ より，数列 $\{b_n\}$ は初項 4，公比 3 の等比数列であるから　$b_n=4\cdot3^{n-1}$　　よって　$a_n=b_n-2n-1=4\cdot3^{n-1}-2n-1$

$\boxed{10}$ $a_{n+1}-2=\dfrac{a_n-4}{a_n-3}-2$ から　$a_{n+1}-2=-\dfrac{a_n-2}{a_n-3}$　……①

ここで，ある自然数 n について $a_{n+1}=2$ と仮定すると，① から　$a_n=2$

ゆえに　$a_{n+1}=a_n=a_{n-1}=\cdots\cdots=a_1=2$

これは条件 $a_1=1$ に反する。　また　$a_1\fallingdotseq 2$

よって，すべての自然数 n について $a_{n+1}\fallingdotseq 2$ であり，① から $a_n\fallingdotseq 2$ である。

ゆえに，① の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}-2}=-\frac{a_n-3}{a_n-2}\qquad\text{よって}\qquad\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{a_n-2}-1$$

ゆえに　$b_{n+1}=b_n-1$　　また　$b_1=\dfrac{1}{a_1-2}=\dfrac{1}{1-2}=-1$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ は初項 -1，公差 -1 の等差数列であるから

$$b_n=-1+(n-1)\cdot(-1)=-n\qquad\text{したがって}\qquad a_n=2+\frac{1}{b_n}=2-\frac{1}{n}$$

$\boxed{11}$ (解 1)　$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$

$a_{n-1}=\dfrac{n-2}{n+1}a_{n-2}$ であるから　$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}\cdot\dfrac{n-2}{n+1}a_{n-2}$

これを繰り返して

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+1}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-4}{n-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}a_1$$

よって　$a_n=\dfrac{3\cdot2\cdot1}{(n+2)(n+1)n}\cdot\dfrac{2}{3}$

すなわち　$a_n=\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$

(解 2)　漸化式の両辺に $n(n+1)(n+2)$ を掛けると

$$n(n+1)(n+2)a_n=(n-1)n(n+1)a_{n-1}$$

したがって

$$n(n+1)(n+2)a_n=(n-1)n(n+1)a_{n-1}=\cdots\cdots=1\cdot2\cdot3a_1=4$$

よって　$a_n=\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$

$\boxed{12}$ $n\geqq2$ のとき

$$a_{n+1}=1+a_1+2a_2+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n \quad \cdots\cdots ①$$

$$a_n=1+a_1+2a_2+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1} \quad \cdots\cdots ②$$

①－② から　$a_{n+1}-a_n=na_n$

ゆえに　$a_{n+1}=(n+1)a_n$

両辺を $(n+1)!$ で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{a_n}{n!}$

よって　$\dfrac{a_n}{n!}=\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\cdots\cdots=\dfrac{a_2}{2!}=\dfrac{1+a_1}{2}=1$

ゆえに　$a_n=n!$

また，$a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=n!$

$\boxed{13}$ (1)　$\triangle ABC\backsim\triangle AA_1H_1$ から　$AC:AH_1=BC:A_1H_1$

よって　$1:(1-a_1)=\sqrt{3}:a_1$　　よって　$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

同様に，$\triangle ABC\backsim\triangle A_1A_2H_2$ から　$1:(a_1-a_2)=\sqrt{3}:a_2$

$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ から　$a_2=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\triangle ABC\backsim\triangle A_nA_{n+1}H_{n+1}$ から　$1:(a_n-a_{n+1})=\sqrt{3}:a_{n+1}$

よって　$a_{n+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$

(3)　(1)，(2) から $\{a_n\}$ は初項 $a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，公比 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ の等比数列であるから

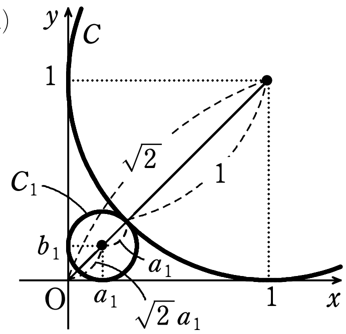
$$a_n=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$\boxed{14}$ (1)　$\sqrt{2}a_1+a_1+1=\sqrt{2}$ であるから

$$a_1=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}={}^{ア}3-2\sqrt{2}$$

また　$b_1=a_1={}^{イ}3-2\sqrt{2}$

(1)



(2)　2 円 C，C_n は外接するから

$$\sqrt{(a_n-1)^2+(b_n-1)^2}=b_n+1$$

よって　$(a_n-1)^2+b_n{}^2-2b_n+1$

$$=b_n{}^2+2b_n+1$$

ゆえに　$b_n=\frac{1}{4}(a_n-1)^2$　……①

また，2 円 C_n，C_{n+1} は外接するから

$$\sqrt{(a_{n+1}-a_n)^2+(b_{n+1}-b_n)^2}=b_n+b_{n+1}$$

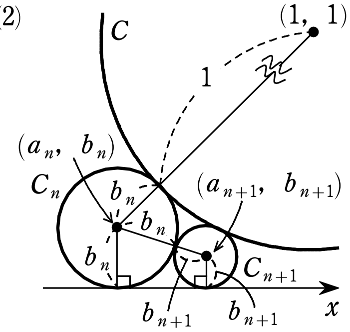
よって　$(a_{n+1}-a_n)^2+b_{n+1}{}^2-2b_{n+1}b_n+b_n{}^2$

$$=b_n{}^2+2b_nb_{n+1}+b_{n+1}{}^2$$

ゆえに　$(a_{n+1}-a_n)^2=4b_nb_{n+1}$

① から　$(a_{n+1}-a_n)^2=\frac{1}{4}(a_n-1)^2(a_{n+1}-1)^2$

(2)



$a_n<a_{n+1}$，$a_n<1$，$a_{n+1}<1$ であるから　$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(1-a_n)(1-a_{n+1})$　……②

(3)　$c_n=\frac{1}{1-a_n}$ とおくと　$1-a_n=\frac{1}{c_n}$，$a_n=1-\frac{1}{c_n}$

よって，② から　$1-\frac{1}{c_{n+1}}-\left(1-\frac{1}{c_n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{c_n}\cdot\frac{1}{c_{n+1}}$

整理して　$2(c_{n+1}-c_n)=1$　　ゆえに　$c_{n+1}=c_n+\frac{1}{2}$

また　$c_1=\frac{1}{1-a_1}=\frac{1}{1-(3-2\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$，公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$c_n=\frac{\sqrt{2}+1}{2}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+\sqrt{2}}{2}\qquad よって\quad a_n=1-\frac{1}{c_n}=1-\frac{2}{n+\sqrt{2}}$$

BASIC問題

$\boxed{1}$ 1辺の長さが1の正四面体OABCを考える．
OA，OBの中点をそれぞれP，QとしOCを$m:n$に内分する点をRとする．また，△PQRの重心をGとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$m$，$n$を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$の長さ$\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|$を求めよ．

$\boxed{2}$ $\vec{a}=(3,\ 0,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ 4,\ -1)$の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

$\boxed{3}$ 原点Oから，2点A$(5,\ -2,\ -3)$，B$(8,\ 0,\ -4)$を通る直線に垂線OHを下ろす。このとき，点Hの座標と線分OHの長さを求めよ。

$\boxed{4}$ 点A$(3,\ 1,\ 2)$，B$(1,\ 2,\ 1)$とxy平面上に動点Pがある。

(1) AP＋PBの最小値を求めよ。

(2) AP＋PBが最小となるときの点Pの座標を求めよ。

$\boxed{5}$ 四面体ABCDがある．点Pが$10\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}+3\overrightarrow{\mathrm{PD}}$を満たしているとき

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$を用いて表せ．

(2) 四面体ABCDと四面体PBCDの体積の比を求めよ．

$\boxed{6}$ 平行六面体OADB−CEGFにおいて，辺DGのGを越える延長上にGM＝2DGとなる点Mをとり，直線OMと平面ABCの交点をNとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2) 線分比ON：OMを求めよ。

$\boxed{7}$ 3点A$(3,\ 6,\ 0)$，B$(1,\ 4,\ 0)$，C$(0,\ 5,\ 4)$がある。

(1) △ABCの面積を求めよ。

(2) 点P$(3,\ 4,\ 5)$から平面ABCに垂線PHを下ろす。このとき，線分PHの長さを求めよ。

(3) 四面体PABCの体積を求めよ。

実戦問題

8 xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に $x^2+y^2=25$ により定まる円 C があり，平面 $z=4$ の上に $x=1$ により定まる y 軸に平行な直線 ℓ がある。C 上の点 P で，ℓ 上の点との距離の最小値が 5 であるような P の座標をすべて求めよ。

9 点 $(1,\ 1,\ 0)$ を通り $\overrightarrow{d_1}=(1,\ 1,\ -1)$ に平行な直線 ℓ_1 と，点 $(-1,\ 1,\ -2)$ を通り $\overrightarrow{d_2}=(0,\ -2,\ 1)$ に平行な直線 ℓ_2 がある。 ℓ_1，ℓ_2 上にそれぞれ点 P，Q をとるとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

10 四面体 OABC において，OA＝OB＝OC＝1 とする。$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) CH の長さを求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

11 すべての辺の長さが 1 の四角錐がある。この四角錐の頂点を O，底面を正方形 ABCD とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ をそれぞれ求めよ。

(3) 点 P，O，B，C が正四面体の頂点となるようなすべての点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\boxed{1}$ 解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{m}{3(m+n)}\vec{c}$　(2)　$\dfrac{\sqrt{11m^2+10mn+3n^2}}{6(m+n)}$

$\boxed{2}$ 解答　$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\boxed{3}$ 解答　$\mathrm{H}(2,\ -4,\ -2)$, $\mathrm{OH}=2\sqrt{6}$

$\boxed{4}$ 解答　(1)　$\sqrt{14}$　(2)　$\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3},\ 0\right)$

$\boxed{5}$ 解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}})$　(2)　$s=\dfrac{1}{3}$, $t=\dfrac{1}{2}$, $k=-\dfrac{2}{3}$

(3)　$2:5$

$\boxed{6}$ 解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$　(2)　$\mathrm{ON}:\mathrm{OM}=1:5$

$\boxed{7}$ 解答　(1)　6　(2)　3　(3)　6

$\boxed{8}$ 解答　$(4,\ \pm 3,\ 0)$, $(-2,\ \pm\sqrt{21},\ 0)$

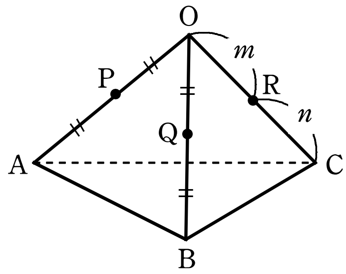
$\boxed{9}$ 解答　$\sqrt{6}$

$\boxed{10}$ 解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}$　(2)　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(3)　$\dfrac{1}{12}$

$\boxed{11}$ 解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\vec{a}}{2}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{m}{m+n}\vec{c}$



ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})$

$$=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{m}{3(m+n)}\vec{c}$$

(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

よって $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2=\dfrac{1}{36}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{36}|\vec{b}|^2+\dfrac{m^2}{9(m+n)^2}|\vec{c}|^2+\dfrac{1}{18}\vec{a}\cdot\vec{b}$

$$+\frac{m}{9(m+n)}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{m}{9(m+n)}\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=\frac{3(m+n)^2+4m^2+4m(m+n)}{36(m+n)^2}$$

$$=\frac{11m^2+10mn+3n^2}{36(m+n)^2}$$

ゆえに $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\dfrac{\sqrt{11m^2+10mn+3n^2}}{6(m+n)}$

2 求めるベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから $\vec{a}\cdot\vec{e}=0$ よって $x+z=0$ ……①

$\vec{b}\perp\vec{e}$ であるから $\vec{b}\cdot\vec{e}=0$ よって $3x+4y-z=0$ ……②

$|\vec{e}|=1$ であるから $|\vec{e}|^2=1$ よって $x^2+y^2+z^2=1$ ……③

①，② から $y=-x,\ z=-x$

③ に代入して $3x^2=1$ ゆえに $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ z=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$；$x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，求めるベクトルは $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

3 H は A，B を通る直線上にあるから，t を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表すことができる。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(8-5,\ 0-(-2),\ -4-(-3))=(3,\ 2,\ -1)$ であるから

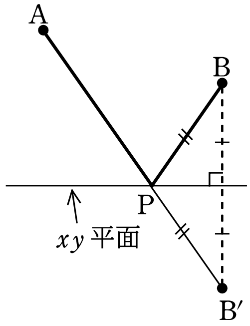
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(5,\ -2,\ -3)+t(3,\ 2,\ -1)$$
$$=(5+3t,\ -2+2t,\ -3-t)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

よって $3(5+3t)+2(-2+2t)-(-3-t)=0$ すなわち $t=-1$

したがって，点 H の座標は $(2,\ -4,\ -2)$

また，線分 OH の長さは　$\mathrm{OH}=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$



4 (1)　点 B と xy 平面に関して対称な点を B′ とすると，その座標は

$$(1,\ 2,\ -1)$$

P は xy 平面上にあるから　$\mathrm{PB}=\mathrm{PB'}$

ゆえに　$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=\mathrm{AP}+\mathrm{PB'}$

$\mathrm{AP}+\mathrm{PB'}$ が最小となるのは，A，P，B′ が一直線上にあるときである。

よって，$\mathrm{AP}+\mathrm{PB'}$ の最小値は線分 AB′ の長さに等しい。

したがって，求める最小値は

$$\mathrm{AB'}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\right|=\sqrt{(1-3)^2+(2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{14}$$

(2)　O を原点とし，点 P の座標を $(x,\ y,\ z)$ とする。

直線 AB′ 上の点 P のベクトル方程式は　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB'}}$（$t$ は実数）

(1) から　$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=(1,\ 2,\ -1)-(3,\ 1,\ 2)=(-2,\ 1,\ -3)$

ゆえに　$(x,\ y,\ z)=(3,\ 1,\ 2)+t(-2,\ 1,\ -3)$

$=(3-2t,\ 1+t,\ 2-3t)$　……①

ここで　点 P は xy 平面上にあるから　$z=0$

よって　$2-3t=0$ から　$t=\dfrac{2}{3}$　……②

したがって　点 P の座標は ② を ① に代入して

$$\left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ 0\right)$$

5 (1)　$10\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}+3\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ から

$$-10\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+2(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})$$

よって　$-4\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

(2)　(1) から　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\dfrac{1}{4}k(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}})$　……①

また，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{BC}}+t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(s\overrightarrow{\mathrm{BC}}+t\overrightarrow{\mathrm{BD}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\{s(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+t(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\}\\&=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\neq\vec{0}$ で $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ はどの 2 つも平行でないから，

①，② より　$-\dfrac{1}{4}k=1-s-t$，$-\dfrac{2}{4}k=s$，$-\dfrac{3}{4}k=t$

これを解くと $s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{1}{2}$，$k=-\dfrac{2}{3}$

(3) $\overrightarrow{AQ}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AP}$ から PA：AQ＝3：2

底面積が等しい四面体の体積は高さに比例するから，四面体 ABCD と四面体 PBCD の比は

$$2:(2+3)=2:5$$

$\boxed{6}$ 点 N は直線 OM 上にあるから，$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}$ となる実数 k がある。

ここで $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$

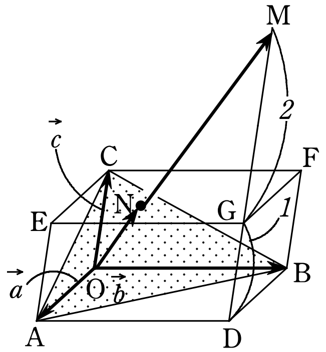
よって $\overrightarrow{ON}=k(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+3k\vec{c}$

点 N は平面 ABC 上にあるから $k+k+3k=1$

ゆえに $k=\dfrac{1}{5}$

したがって $\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

また ON：OM＝1：5



$\boxed{7}$ (1) $\overrightarrow{AB}=(1-3,\ 4-6,\ 0-0)=(-2,\ -2,\ 0)$

$\overrightarrow{AC}=(0-3,\ 5-6,\ 4-0)=(-3,\ -1,\ 4)$

よって $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\times(-3)+(-2)\times(-1)+0\times4=8$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2}=2\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{26}$

ゆえに $\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{8}{2\sqrt{2}\times\sqrt{26}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$0°<\angle BAC<180°$ より $\sin\angle BAC>0$ であるから

$$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

したがって，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{26}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=6$$

別解 $$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{8\cdot26-8^2}=6$$

(2) 点 H は平面 ABC 上にあるから，s，t，u を実数として

$\overrightarrow{PH}=s\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PB}+u\overrightarrow{PC}$，$s+t+u=1$ と表される。

ここで，$\overrightarrow{PA}=(0,\ 2,\ -5)$，$\overrightarrow{PB}=(-2,\ 0,\ -5)$，$\overrightarrow{PC}=(-3,\ 1,\ -1)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PH}&=s(0,\ 2,\ -5)+t(-2,\ 0,\ -5)+u(-3,\ 1,\ -1)\\&=(-2t-3u,\ 2s+u,\ -5s-5t-u)\end{aligned}$$

PH⊥(平面 ABC) であるから　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から　$(-2t-3u)\times(-2)+(2s+u)\times(-2)+(-5s-5t-u)\times 0=0$

よって　$t+u=s$　……①

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ から　$(-2t-3u)\times(-3)+(2s+u)\times(-1)+(-5s-5t-u)\times 4=0$

よって　$11s+7t-2u=0$　……②

① を $s+t+u=1$ に代入すると　$s+s=1$　ゆえに　$s=\dfrac{1}{2}$

これを ①，② に代入して　$t+u=\dfrac{1}{2}$，$7t-2u=-\dfrac{11}{2}$

これを解いて　$t=-\dfrac{1}{2}$，$u=1$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(-2,\ 2,\ -1)$

よって　$\mathrm{PH}=|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}=3$

(3)　(1)，(2) の結果から，四面体 PABC の体積は

$$\frac{1}{3}\times S\times \mathrm{PH}=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot 3=6$$

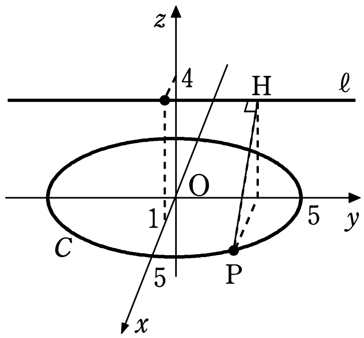
8　点 P は C 上にあるから，P$(5\cos\theta,\ 5\sin\theta,\ 0)$ とおける。

点 P から ℓ に下ろした垂線を PH とすると　H$(1,\ 5\sin\theta,\ 4)$

点 P と ℓ 上の点の距離の最小値は PH である。

PH＝5 より

$(5\cos\theta-1)^2+(5\sin\theta-5\sin\theta)^2+(0-4)^2=5^2$



よって，$5\cos\theta-1=\pm 3$ から　$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$-\dfrac{2}{5}$

$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ のとき　$\sin\theta=\pm\dfrac{3}{5}$，

$\cos\theta=-\dfrac{2}{5}$ のとき　$\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

したがって，求める点 P の座標は　$(4,\ \pm 3,\ 0)$，$(-2,\ \pm\sqrt{21},\ 0)$

9　直線 ℓ_1 上の点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ とすると

$$\begin{aligned}(x_1,\ y_1,\ z_1)&=(1,\ 1,\ 0)+s(1,\ 1,\ -1)\\&=(1+s,\ 1+s,\ -s)\end{aligned}$$

直線 ℓ_2 上の点を $\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ とすると

$$\begin{aligned}(x_2,\ y_2,\ z_2)&=(-1,\ 1,\ -2)+t(0,\ -2,\ 1)\\&=(-1,\ 1-2t,\ -2+t)\end{aligned}$$

点 P，Q の座標を，それぞれ

P$(1+s,\ 1+s,\ -s)$，Q$(-1,\ 1-2t,\ -2+t)$

とおくと

$$\mathrm{PQ}^2=\{-1-(1+s)\}^2+\{(1-2t)-(1+s)\}^2+\{(-2+t)-(-s)\}^2$$

$=(-s-2)^2+(-s-2t)^2+(s+t-2)^2$

$=3s^2+6st+5t^2-4t+8$

$=3(s+t)^2+2t^2-4t+8$

$=3(s+t)^2+2(t-1)^2+6$

よって，PQ^2 は $s+t=0$，$t-1=0$ すなわち $s=-1$，$t=1$ のとき最小となる。

$PQ>0$ であるから，このとき PQ も最小となる。

よって， PQ の最小値は　$\sqrt{6}$

参考　$s=-1$，$t=1$ のとき

$$\overrightarrow{PQ}=(-1,\ -1,\ -2)$$

$$\vec{d_1}\cdot\overrightarrow{PQ}=1\times(-1)+1\times(-1)+(-1)\times(-2)=0$$

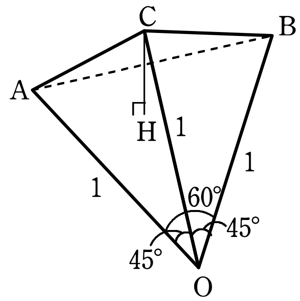
$$\vec{d_2}\cdot\overrightarrow{PQ}=0\times(-1)+(-2)\times(-1)+1\times(-2)=0$$

よって　$\vec{d_1}\perp\overrightarrow{PQ}$，$\vec{d_2}\perp\overrightarrow{PQ}$

したがって，PQ が最小となるとき $PQ\perp\ell_1$，$PQ\perp\ell_2$ が成り立つ。

10 (1)　点 H は平面 OAB 上にあるから，$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$（$s$，$t$ は実数）と表される。

よって　$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$



また　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=1$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$，

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA}$ であるから　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$　すなわち　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

よって　$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　ゆえに　$s\cdot1^2+t\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$

すなわち　$2s+t=\sqrt{2}$　…… ①

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OB}$ であるから　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$　すなわち　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$

よって　$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　ゆえに　$s\cdot\dfrac{1}{2}+t\cdot1^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$

すなわち　$s+2t=\sqrt{2}$　…… ②

①，② を解くと　$s=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$t=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　したがって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}$

(2)　(1) より，$\overrightarrow{CH}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}-\vec{c}$ であるから

$$|\overrightarrow{CH}|^2=\left|\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}-\vec{c}\right|^2$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2|\vec{a}|^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+1+\frac{2}{9}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|>0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\mathrm{CH}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3)　$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

よって，四面体 OABC の体積は　$\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{CH}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{12}$

11 (1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(2)　△OAB，△OBC，△OCD は１辺の長さが１の正三角形であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ ,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$$

また，同様にして，(1) から

$$\frac{1}{2}=\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{b}+|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}+1$$

ゆえに　$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ (x，y，z は実数) とする。

△OBC の重心を G とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{GP}}=x\vec{a}+\left(y-\dfrac{1}{3}\right)\vec{b}+\left(z-\dfrac{1}{3}\right)\vec{c}$

点 P が満たすべき条件は　$\overrightarrow{\mathrm{GP}}\perp\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{GP}}\perp\vec{c}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{GP}}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{GP}}\cdot\vec{c}=0$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=1$

(2) から　$\dfrac{1}{2}x+\left(y-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{1}{3}\right)=0$ …… ①

$\dfrac{1}{2}\left(y-\dfrac{1}{3}\right)+\left(z-\dfrac{1}{3}\right)=0$ …… ②

$x^2+y^2+z^2+xy+yz=1$ …… ③

② から　$y=1-2z$　このとき，① から　$x=3z-1$

これらを ③ に代入して整理すると　$2z(3z-2)=0$　ゆえに　$z=0,\ \dfrac{2}{3}$

よって　$(x,\ y,\ z)=(-1,\ 1,\ 0),\ \left(1,\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

BASIC問題

$\boxed{1}$ 2点A$(2,\ 5)$，B$(3,\ 1)$からの距離の比が$1:2$である点Pの軌跡を求めよ。

$\boxed{2}$ 連立不等式$\begin{cases}(x-3)^2+y^2>25\\4x-3y>12\end{cases}$の表す領域を図示せよ。

$\boxed{3}$ x，yが3つの不等式$x-3y\geqq -6$，$x+2y\geqq 4$，$3x+y\leqq 12$を同時に満たすとき，$2x+y$の最大値，最小値を求めよ。

STANDARD問題

$\boxed{4}$ 放物線$y=3x^2+12ax+4a^2-6a$について，次の問いに答えよ。

(1)　頂点Pの座標を$(x,\ y)$とするとき，x，yをそれぞれaで表せ。

(2)　aがすべての実数値をとって変化するとき，点Pの軌跡を求めよ。

$\boxed{5}$ 2点A$(3,\ 0)$，B$(0,\ -3)$と放物線$y=x^2$上の動点Qとでできる△ABQの重心Gの軌跡を求めよ。

$\boxed{6}$ mの値が変化するとき，次の2直線の交点Pの軌跡を求めよ。

$$mx-y+5m=0,\quad x+my-5=0$$

$\boxed{7}$ 放物線$y=(x-3)^2$と直線$y=mx$が異なる2点A，Bで交わっている。mの値が変化するとき，線分ABの中点Pの軌跡を求めよ。

$\boxed{8}$ 2直線$x-2y-2=0$，$4x-2y+1=0$のなす角の二等分線の方程式を求めよ。ただし，2直線のなす角の二等分線は，2直線から等距離にある点の軌跡であるものとする。

$\boxed{9}$ 方程式$x^2+ax+b=0$の2つの異なる解が$-1<x<2$の範囲にある。a，bの満たす関係式を求めよ。また，点$(a,\ b)$の存在する範囲を図示せよ。

実戦問題

10 点 $(x,\ y)$ が，不等式 $(x-3)^2+(y-1)^2 \leqq 1$ の表す領域上を動くとき，次の式の最大値，最小値を求めよ。

(1) $\dfrac{y}{x}$

(2) x^2+y^2

11 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ が $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta<1$ を満たして動くとき，点 $\mathrm{Q}(\alpha+\beta,\ \alpha\beta)$ の動く範囲を図示せよ.

12 a がすべての実数値をとって変化するとき，直線 $y=2ax-a^2+1$ ……① が通りうる点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ。

13 次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$\begin{cases} x^2+y^2-1 \leqq 0 \\ x+2y-2 \leqq 0 \end{cases}$$

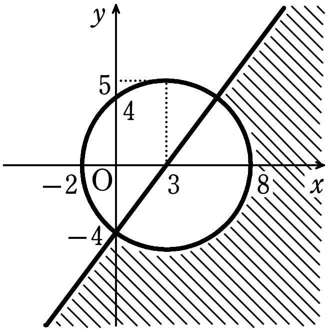
(1) 領域 D を図示せよ。

(2) a を実数とする。点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$ax+y$ の最小値を a を用いて表せ。

(3) a を実数とする。点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$ax+y$ の最大値を a を用いて表せ。

$\boxed{1}$ 解答 中心 $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{19}{3}\right)$，半径 $\dfrac{2\sqrt{17}}{3}$ の円

$\boxed{2}$ 解答 〔図〕境界線を含まない



$\boxed{3}$ 解答 $x=3$，$y=3$ のとき最大値 9；$x=0$，$y=2$ のとき最小値 2

$\boxed{4}$ 解答 (1) $x=-2a$，$y=-8a^2-6a$ (2) 放物線 $y=-2x^2+3x$

$\boxed{5}$ 解答 放物線 $y=3x^2-6x+2$

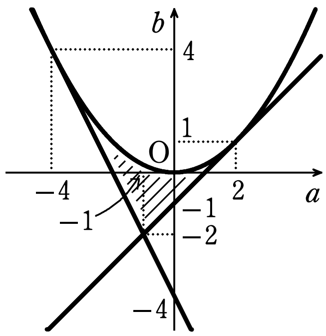
$\boxed{6}$ 解答 原点を中心とする半径 5 の円 ただし，点 $(-5,\ 0)$ を除く

$\boxed{7}$ 解答 放物線 $y=2x^2-6x$ の $x<-3$，$3<x$ の部分

$\boxed{8}$ 解答 $2x+2y+5=0$，$2x-2y-1=0$

$\boxed{9}$ 解答 $b<\dfrac{a^2}{4}$，$b>a-1$，$b>-2a-4$，$-4<a<2$

〔図〕境界線を含まない



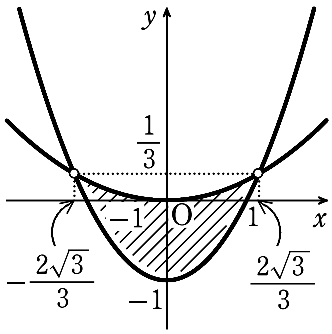
$\boxed{10}$ 解答 (1) $x=\dfrac{12}{5}$，$y=\dfrac{9}{5}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{4}$；$x=3$，$y=0$ のとき最小値 0

(2) $x=3+\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$y=1+\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ のとき最大値 $11+2\sqrt{10}$；

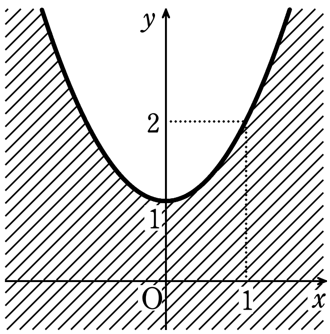
$x=3-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$y=1-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ のとき最小値 $11-2\sqrt{10}$

11

解答 〔図〕 境界線のうち，放物線 $y=x^2-1$ 上の点は含まないで，他は含む



12 解答 〔図〕，境界線を含む



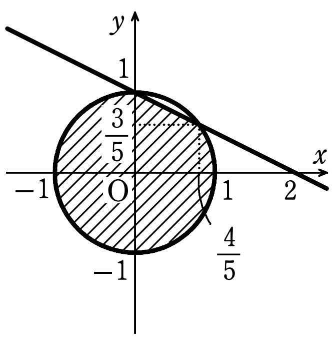
13 解答 (1) 〔図〕 境界線を含む　(2) $-\sqrt{a^2+1}$

(3) $a<0$，$\dfrac{4}{3}\leqq a$ のとき $\sqrt{a^2+1}$；

$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき 1；

$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{4}{3}$ のとき $\dfrac{4}{5}a+\dfrac{3}{5}$

(1)



$\boxed{1}$ 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

AP : BP＝1 : 2 から　　2AP＝BP

AP＞0，BP＞0 であるから，これは $4\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ と同値である。

よって　　$4\{(x-2)^2+(y-5)^2\}=(x-3)^2+(y-1)^2$

整理すると　　$x^2-\dfrac{10}{3}x+y^2-\dfrac{38}{3}y+\dfrac{106}{3}=0$

すなわち　　$\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{19}{3}\right)^2=\dfrac{68}{9}$

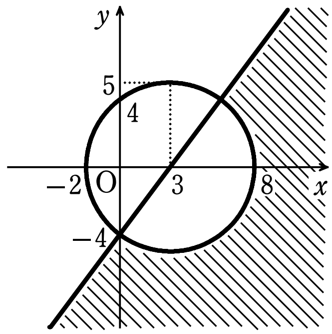
したがって，求める軌跡は　　中心 $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{19}{3}\right)$，半径 $\dfrac{2\sqrt{17}}{3}$ の円

$\boxed{2}$ $4x-3y>12$ を変形すると　$y<\dfrac{4}{3}x-4$

求める領域は，円 $(x-3)^2+y^2=25$ の外部と直線

$y=\dfrac{4}{3}x-4$ の下側との共通部分で，図の斜線部分で

ある。ただし，境界線を含まない。



$\boxed{3}$ 与えられた連立不等式の表す領域を A とする。
領域 A は 3 点 $(4,\ 0)$，$(3,\ 3)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする
三角形の周および内部である。

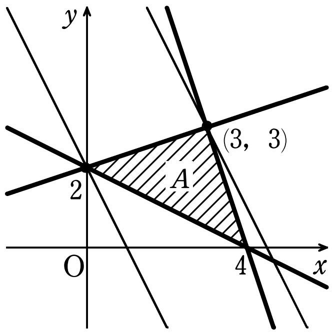
$$2x+y=k \quad \cdots\cdots ①$$

とおくと，これは傾きが -2，y 切片が k である直
線を表す。
図から，直線 ① が

点 $(3,\ 3)$ を通るとき，k は最大で　$k=9$

点 $(0,\ 2)$ を通るとき，k は最小で　$k=2$

よって　　$x=3$，$y=3$ のとき最大値 9；$x=0$，$y=2$ のとき最小値 2



$\boxed{4}$ (1)　$y=3x^2+12ax+4a^2-6a$ を変形すると　　$y=3(x+2a)^2-8a^2-6a$

よって，点 P の座標は　　$(-2a,\ -8a^2-6a)$

したがって　　$x=-2a$，$y=-8a^2-6a$

(2)　$x=-2a$ から　　$a=-\dfrac{x}{2}$

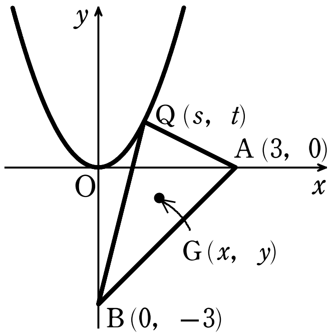
これを $y=-8a^2-6a$ に代入して

$$y=-8\left(-\frac{x}{2}\right)^2-6\left(-\frac{x}{2}\right)\qquad \text{すなわち}\qquad y=-2x^2+3x$$

$x=-2a$ であるから，a がすべての実数値をとって変化するとき，x もすべての実数値をとる。

よって，求める軌跡は　　放物線 $y=-2x^2+3x$

5 点 Q は直線 AB 上にないから，図形 ABQ は常に三角形になる。



点 Q の座標を $(s,\ t)$ とすると，Q は放物線 $y=x^2$ 上にあるから　　$t=s^2$　……①

また，重心 G の座標を $(x,\ y)$ とすると，条件から

$$x=\frac{3+0+s}{3},\quad y=\frac{0+(-3)+t}{3}$$

すなわち　　$s=3x-3,\ t=3y+3$

これらを ① に代入して　　$3y+3=(3x-3)^2$

整理すると　　$y=3x^2-6x+2$

よって，重心 G は放物線 $y=3x^2-6x+2$ 上にある。

逆に，この放物線上のすべての点 G$(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　放物線 $y=3x^2-6x+2$

6 2 直線の方程式を変形して

$$y=m(x+5)\quad \cdots\cdots ①$$
$$-my=x-5\quad \cdots\cdots ②$$

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$(x,\ y)$ は ①，② を満たす。

[1]　$y \fallingdotseq 0$ のとき，② から　　$m=-\dfrac{x-5}{y}$

これを ① に代入して　　$y=-\dfrac{x-5}{y}(x+5)$　　　よって　$x^2+y^2=25$　……③

③ において $y=0$ とすると　　$x=\pm 5$

したがって，$y \fallingdotseq 0$ のとき，点 P は，円 ③ から 2 点 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$ を除いた図形上にある。

[2]　$y=0$ のとき，② から　　$x=5$

$x=5$，$y=0$ を ① に代入すると　　$m=0$

よって，点 $(5,\ 0)$ は，$m=0$ のときの 2 直線の交点である。

[1]，[2] から，点 P は，原点を中心とする半径 5 の円から点 $(-5,\ 0)$ を除いた図形上にある。

逆に，この図形上の点 P は，条件を満たす。

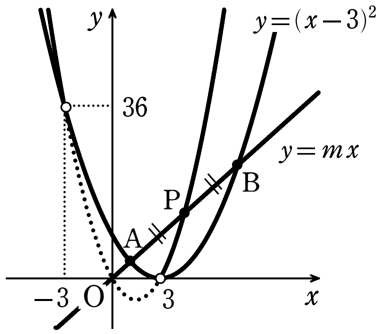
したがって，点 P の軌跡は

原点を中心とする半径 5 の円　ただし，点 $(-5,\ 0)$ を除く

参考 ① から第 1 の直線は定点 $(-5,\ 0)$ を通り，② から第 2 の直線は定点 $(5,\ 0)$ を通る。
また，この 2 直線は垂直であるから，点 P は 2 点 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$ を直径の両端とする円周上にあることがわかる。
ただし，① は直線 $x=-5$，② は直線 $y=0$ を表さないから，点 $(-5,\ 0)$ を除く。

7 $y=(x-3)^2$ と $y=mx$ から y を消去して整理すると

$$x^2-(m+6)x+9=0 \quad \cdots\cdots ①$$



判別式を D とすると

$$D=(m+6)^2-4\cdot1\cdot9$$
$$=m^2+12m=m(m+12)$$

放物線と直線が異なる 2 点で交わるのは，$D>0$ のときであるから　$m(m+12)>0$

ゆえに　$m<-12,\ 0<m$ ……②

2 つの交点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β とする。

α，β は ① の異なる 2 つの実数解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=m+6$$

よって，中点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m+6}{2} \quad \cdots\cdots ③ \qquad また \quad y=mx \quad \cdots\cdots ④$$

③ から　$m=2x-6$ ……⑤

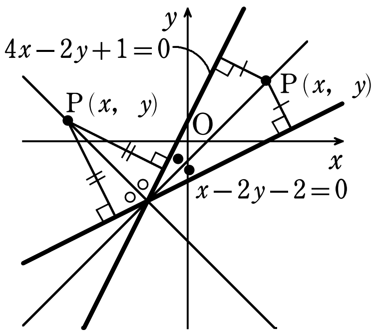
⑤ を ④ に代入して　$y=(2x-6)x$　すなわち　$y=2x^2-6x$

⑤ を ② に代入して　$2x-6<-12,\ 0<2x-6$　すなわち　$x<-3,\ 3<x$

よって，求める軌跡は　放物線 $y=2x^2-6x$ の $x<-3,\ 3<x$ の部分

8 2 直線のなす角の二等分線上の点を P$(x,\ y)$ とする。

点 P は 2 直線 $x-2y-2=0$，$4x-2y+1=0$ から等距離にあるから



$$\frac{|x-2y-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|4x-2y+1|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}$$

よって　$2|x-2y-2|=|4x-2y+1|$

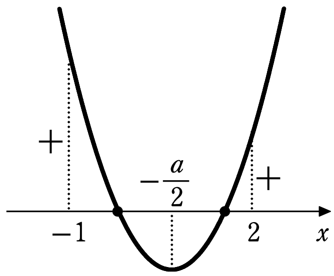
すなわち　$2(x-2y-2)=\pm(4x-2y+1)$

したがって，求める直線の方程式は

$$2x+2y+5=0,\ 2x-2y-1=0$$

$\boxed{9}$ $f(x)=x^2+ax+b$ とし，$f(x)=0$ の判別式を D とする。

放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸の方程式は　$x=-\dfrac{a}{2}$



方程式 $f(x)=0$ が $-1<x<2$ の範囲に 2 つの異なる解をもつための条件は

$D=a^2-4b>0$

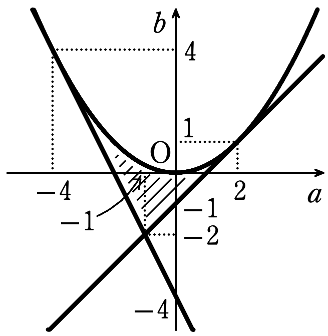
$f(-1)=1-a+b>0$,　$f(2)=4+2a+b>0$

軸について　$-1<-\dfrac{a}{2}<2$

すなわち

$b<\dfrac{a^2}{4}$，$b>a-1$，

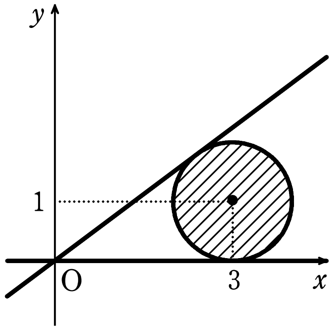
$b>-2a-4$，$-4<a<2$



よって，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含まない。

$\boxed{10}$ 与えられた不等式の表す領域は，右の図の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。



(1) $\dfrac{y}{x}=k$ とおくと，　$y=kx$　…… ①

① は原点を通り，傾き k の直線を表す。図から，直線 ① が円 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ に接するとき，k の値は最大，最小となる。

接するとき，円の中心 $(3,\ 1)$ と直線 ① の距離が円の半径 1 に等しいから　$\dfrac{|k\cdot 3-1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=1$

分母を払うと　$|3k-1|=\sqrt{k^2+1}$　　両辺を 2 乗して　$(3k-1)^2=k^2+1$

ゆえに　$4k^2-3k=0$　　よって　$k=0,\ \dfrac{3}{4}$

$k=0$ のとき，接点の座標は　$(3,\ 0)$

$k=\dfrac{3}{4}$ のとき，① は　$y=\dfrac{3}{4}x$　…… ②

また，円の中心 $(3,\ 1)$ を通り，直線 ② に垂直な直線の方程式は

$$y-1=-\frac{4}{3}(x-3)\quad すなわち\quad y=-\frac{4}{3}x+5\quad \cdots\cdots ③$$

接点は，2 直線 ②，③ の交点であるから，その座標は　$\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$

以上から　$x=\dfrac{12}{5}$，$y=\dfrac{9}{5}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{4}$；$x=3$，$y=0$ のとき最小値 0

(2) $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ …… ④ とおく。

④ は，原点を中心とし，半径 r の円を表す。

図から，2 円が内接するとき，r^2 の値は最大となる。このとき，2 円の中心間の距離は

$$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

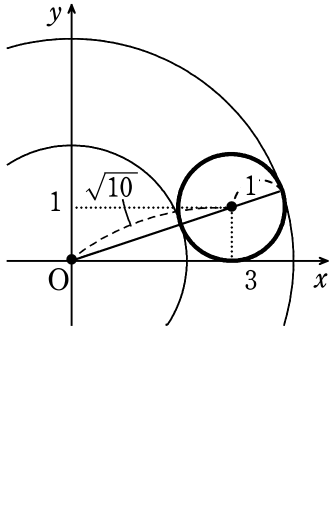
であるから　$r-1=\sqrt{10}$

よって　$r^2=(\sqrt{10}+1)^2=11+2\sqrt{10}$

また，2 円が外接するとき，r^2 の値は最小となる。

このとき　$r+1=\sqrt{10}$

よって　$r^2=(\sqrt{10}-1)^2=11-2\sqrt{10}$



接点は，円 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ と直線 $y=\dfrac{1}{3}x$

の交点である。

円と直線の式から x を消去すると　$(3y-3)^2+(y-1)^2=1$

すなわち　$10(y-1)^2=1$　　ゆえに　$y=1\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

このとき　$x=3y=3\pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$　(複号同順)

以上から　$x=3+\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$y=1+\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ のとき　最大値 $11+2\sqrt{10}$

$x=3-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$y=1-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ のとき　最小値 $11-2\sqrt{10}$

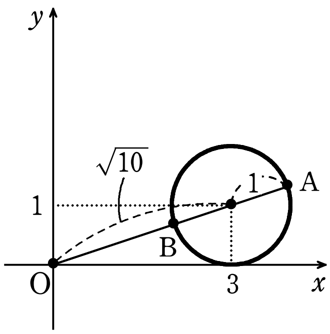
別解　x^2+y^2 は，原点と点 $(x,\ y)$ の距離の 2 乗を表す。右の図のように，円上の点で，原点 O から最も遠い点を A，最も近い点を B とすると，

$\mathrm{OA}=\sqrt{3^2+1^2}+1=\sqrt{10}+1$

$\mathrm{OB}=\sqrt{3^2+1^2}-1=\sqrt{10}-1$

よって，最大値は　$(\sqrt{10}+1)^2=11+2\sqrt{10}$

最小値は　$(\sqrt{10}-1)^2=11-2\sqrt{10}$



11　$x=\alpha+\beta$，$y=\alpha\beta$ とおく.

α，β は 2 次方程式 $t^2-xt+y=0$ の実数解であるから，

判別式 D について　$D=x^2-4y\geqq 0$

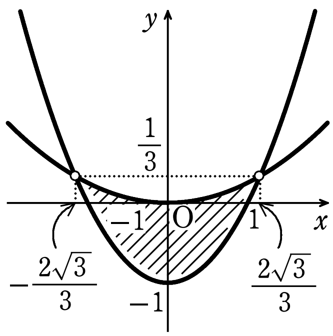
ゆえに　$y\leqq\dfrac{1}{4}x^2$

また，$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta<1$ から　$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta<1$

よって　$x^2-y<1$　　ゆえに　$y>x^2-1$

以上により，点 Q の存在範囲は　〔図〕

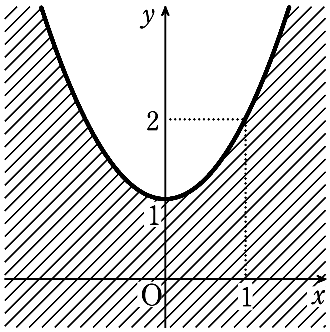
ただし，境界線のうち，放物線 $y=x^2-1$ 上の点は含まないで，他は含む.



12　$y=2ax-a^2+1$ …… ① を a について整理すると

$$a^2-2xa+y-1=0 \quad \cdots\cdots ②$$

直線 ① が点 $(x,\ y)$ を通るとき，① すなわち ② を満たす実数 a が存在するから，a の 2 次方程式 ② の判別式 D について，$D \geqq 0$ である。



$$\frac{D}{4}=(-x)^2-(y-1)=x^2-y+1$$

$D \geqq 0$ から　　$x^2-y+1 \geqq 0$

すなわち　　$y \leqq x^2+1$

よって，求める点 $(x,\ y)$ の存在範囲は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

$\boxed{13}$ (1)　$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ x+2y-2=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$　とおく。

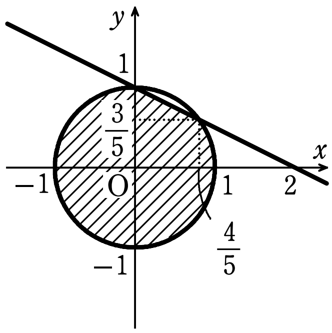
② から　　$x=-2(y-1)$

① に代入すると　　$4(y-1)^2+(y^2-1)=0$

$$(y-1)(4y-4+y+1)=0$$

$$(y-1)(5y-3)=0$$

ゆえに　　$y=1,\ \dfrac{3}{5}$



これと ② から　　$(x,\ y)=(0,\ 1),\ \left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$

よって，領域 D は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

(2)，(3) において $ax+y=k$ とおくと

$$y=-ax+k \quad \cdots\cdots ③, \qquad ax+y-k=0 \quad \cdots\cdots ④$$

直線 ③ は，傾きが $-a$，y 切片が k の直線を表す。

(2)　円 ① の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ④ の距離を 1 とすると

$$\frac{|-k|}{\sqrt{a^2+1^2}}=1 \qquad ゆえに \qquad k=\pm\sqrt{a^2+1}$$

よって，グラフから最小値は　$-\sqrt{a^2+1}$

(3)　(ア)　$-a>0$ または $-a \leqq -\dfrac{4}{3}$　すなわち　$a<0$ または $a \geqq \dfrac{4}{3}$ のとき

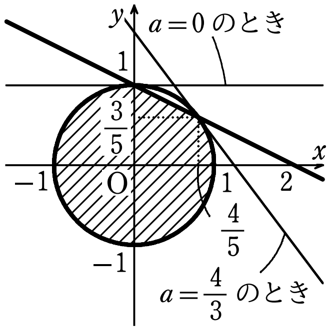
グラフと (2) から，最大値は　$\sqrt{a^2+1}$

(イ)　$-\dfrac{1}{2} \leqq -a \leqq 0$ すなわち $0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$(x,\ y)=(0,\ 1)$ で最大値 1

(ウ)　$-\dfrac{4}{3} < -a < -\dfrac{1}{2}$ すなわち $\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{4}{3}$ のとき

$(x,\ y)=\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$ で最大値 $\dfrac{4}{5}a+\dfrac{3}{5}$



STANDARD問題

1 数列 1，2，3，……，n において，異なる 2 つの項の積の和 を求めよ。($n \geqq 2$)

2 年始めに 10 万円ずつ毎年積み立てることにした．年利率 8 % の複利計算の場合，元利合計が 240 万円を初めて超えるのは何年後か．$\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$ として計算せよ．

3 分母と分子の和が 2，3，4，…… となるような分数を並べた次の数列において，$\dfrac{7}{15}$ は第何項か。また，第 99 項を求めよ。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \cdots\cdots$$

4 放物線 $y=-x^2+8x$ と直線 $y=x$ で囲まれる領域内 (境界を含む) にある格子点の個数を求めよ。

5 $a_n=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}$ とする。

(1)　$n=1$，2，3，4 に対して，a_n を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

6 袋の中に 1 から 7 までの数字が 1 つずつ書いてある 7 個の球がある。この袋から 1 個の球を無作為に取り出し，その数を記録してもとの袋に戻す。これを n 回繰り返したとき，記録した n 個の数の和が偶数である確率を p_n とする。ただし，$n=1$ のとき，p_1 は取り出した 1 個の球に書かれている数が偶数である確率とみなす。

(1)　p_{n+1} を p_n で表せ。　(2)　p_n を求めよ。

実戦問題

7 数列 1，2，3，……，n において，互いに隣り合わない 2 つの項の積の和を求めよ。($n \geqq 3$)

8 次のような分数の列がある。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots\cdots$$

(1)　$\dfrac{5}{9}$ は第何項か。　(2)　第 800 項を求めよ。

9 自然数を右の図のように並べる。

(1)　n が偶数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(2)　n が奇数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(3)　1000 は左から何番目，上から何段目にあるか。

1	3	4	10	11	…
2	5	9	12	…	…
6	8	13	…	…	…
7	14	…	…	…	…
15	17	…	…	…	…
16	…	…	…	…	…

10 (1)　$3x+2y \leqq 8$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$3x+2y \leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

11 3 文字 a，b，c を横に n 個書き並べたものを長さ n の単語と呼ぶことにする。ただし，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ とする。例えば，$abba$，$baca$，$caab$ はどれも長さ 4 の異なる単語である。

(1)　長さ 1，2 および 3 の単語を，それぞれ列挙せよ。

(2)　長さ n の単語のうち，a を奇数個含むものの数を x_n で，残りのものの数を y_n で表す。このとき，x_n，y_n を求めよ。

実戦問題（記述式）

12 x の関数 $f_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次の式で定める.

$$\begin{cases} f_0(x)=1,\ f_1(x)=x \\ f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)\ (n \geqq 2) \end{cases}$$

このとき，$f_n(2\cos\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ と表されることを示せ．ただし，$\sin\theta \fallingdotseq 0$ とする．

13 整数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次の式によって定義する．

$$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}\ \ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(1)　数学的帰納法を用いて $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ であることを示せ．

(2)　a_n，b_n を順次計算して，$a_n+b_n\sqrt{2}>1000$ となる最小の n を求めよ．

(3)　$b_n\sqrt{2}$ の小数部分が 0.001 以下となる最小の n とそのときの b_n の値を求めよ．

14 $a_1=1$，$a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_na_{n+1}=2(a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots\cdots+a_na_1)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を推測し，その推測が正しいことを証明せよ。

$\boxed{1}$ 解答 $\dfrac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$

$\boxed{2}$ 解答 14 年後

$\boxed{3}$ 解答 第 217 項，$\dfrac{8}{7}$

$\boxed{4}$ 解答 64 個

$\boxed{5}$ 解答 (1) $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{5}{6}$，$a_3=\dfrac{23}{24}$，$a_4=\dfrac{119}{120}$

(2) $a_n=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$，証明略

$\boxed{6}$ 解答 (1) $p_{n+1}=-\dfrac{1}{7}p_n+\dfrac{4}{7}$　(2) $p_n=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^n+\dfrac{1}{2}$

$\boxed{7}$ 解答 $\dfrac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1)$

$\boxed{8}$ 解答 (1) 第 39 項　(2) $\dfrac{39}{40}$

$\boxed{9}$ 解答 (1) $\dfrac{1}{2}n(n+1)$　(2) $\dfrac{1}{2}(n^2-n+2)$　(3) 左から 36 番目，上から 10 段目

$\boxed{10}$ 解答 (1) 10 個　(2) 337010 個

$\boxed{11}$ 解答 (1) 長さ 1 の単語：a，b，c

長さ 2 の単語：aa，bb，cc，ab，ba，bc，cb，ca，ac

長さ 3 の単語：aaa，bbb，ccc，aab，aba，baa，aac，aca，caa，bba，
bab，abb，bbc，bcb，cbb，cca，cac，acc，ccb，cbc，bcc，
abc，acb，bac，bca，cab，cba

(2) $x_n=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$，$y_n=\dfrac{1}{2}(3^n+1)$

$\boxed{12}$ 解答 略

$\boxed{13}$ 解答 (1) 略　(2) $n=8$　(3) $n=9$，$b_9=985$

$\boxed{14}$ 解答 $a_n=n$，証明略

$\boxed{1}$　求める和を S とする。

$(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+2(1\cdot2+1\cdot3+\cdots\cdots+2\cdot3+\cdots\cdots)$

であるから　$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2=\sum_{k=1}^{n} k^2+2S$

よって　$2S=\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2-\sum_{k=1}^{n} k^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2-n-2)$

$=\frac{1}{12}n(n+1)(n-1)(3n+2)$

したがって　$S=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$

$\boxed{2}$ n 年後の元利合計は，初項 10×1.08 (万円)，公比 1.08 の等比数列の和である．

よって，求める条件は　$\frac{10\times1.08(1.08^n-1)}{1.08-1}>240$

ゆえに　$135(1.08^n-1)>240$

よって　$1.08^n>\frac{25}{9}$

したがって　$n\log_{10}1.08>2\log_{10}5-2\log_{10}3$ ……①

ここで，$\log_{10}1.08=\log_{10}\frac{108}{100}=3\log_{10}3+2\log_{10}2-2=0.033$,

$2\log_{10}5-2\log_{10}3=2(1-\log_{10}2-\log_{10}3)=0.444$

ゆえに，①は　$0.033n>0.444$　　ゆえに　$n>13.4$ ……

これを満たす n の最小値は　$n=14$　　よって　14 年後.

③ 分母と分子の和が同じ分数を 1 つの群として，次のように区切って考える。

$$\frac{1}{1}\ \Big|\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1}\ \Big|\ \cdots$$

第 n 群には n 個の分数が入る。

(前半)　第 n 群に入る分数の分母と分子の和は $n+1$ であるから，$\frac{7}{15}$ は第 21 群にあり，

その 7 番目の数である。

第 1 群から第 20 群までの項の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+20=\frac{1}{2}\cdot 20(20+1)=210$$

$210+7=217$ であるから，$\frac{7}{15}$ は　第 217 項

(後半)　第 1 群から第 n 群までの項の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

よって，第 99 項が第 n 群に入るとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<99\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

ゆえに　$(n-1)n<198\leqq n(n+1)$　…… ①

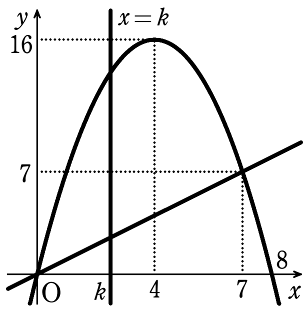
$13\cdot 14=182$，$14\cdot 15=210$ であるから，① を満たす自然数 n は　$n=14$

第 1 群から第 13 群までの項の個数は　$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14=91$

よって，第 99 項は第 14 群の 8 番目であるから　$\frac{8}{14-8+1}=\frac{8}{7}$

④ $-x^2+8x=x$ とすると　$x(x-7)=0$

よって，放物線 $y=-x^2+8x$ と直線 $y=x$ は 2 点 $(0,\ 0)$，$(7,\ 7)$ で交わる。



領域内の格子点で，直線 $x=k$ (k は整数) 上にあるものの座標を $(k,\ y)$ とおくと

$$k\leqq y\leqq -k^2+8k$$

よって，格子点の個数は

$$-k^2+8k-k+1=-k^2+7k+1$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 7$ であるから，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{7}(-k^2+7k+1)=-\sum_{k=0}^{7}k^2+7\sum_{k=0}^{7}k+\sum_{k=0}^{7}1$$

$$=-\sum_{k=1}^{7}k^2+7\sum_{k=1}^{7}k+\sum_{k=0}^{7}1$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot 7\cdot 8\cdot 15+7\cdot\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8+8$$

$$=64\ (個)$$

$\boxed{5}$ (1)　$a_1=\dfrac{1}{2!}=\dfrac{1}{2}$

ここで　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}+\dfrac{n+1}{(n+2)!}$

よって　$a_{n+1}=a_n+\dfrac{n+1}{(n+2)!}$　……①

ゆえに　$a_2=a_1+\dfrac{2}{3!}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{6}=\dfrac{5}{6}$,

$a_3=\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{4!}=\dfrac{23}{24}$，$a_4=\dfrac{23}{24}+\dfrac{4}{5!}=\dfrac{119}{120}$

(2)　(1) から，$n=1$，2，3，4 に対して　$a_n=\dfrac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$

すなわち　$a_n=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

よって，$a_n=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$ ……② と推測される。

[1]　$n=1$ のとき　(1) から，② は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，② が成り立つと仮定すると　$a_k=1-\dfrac{1}{(k+1)!}$

① から，$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1}=a_k+\frac{k+1}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}$$
$$=1-\frac{(k+2)-(k+1)}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+2)!}$$

ゆえに，$n=k+1$ のときにも ② は成り立つ。

[1]，[2] により，すべての自然数 n について ② は成り立つ。

$\boxed{6}$ (1)　$(n+1)$ 個の数の和が偶数になるには，次の [1]，[2] の場合がある。

[1]　n 個の数の和が偶数で，$(n+1)$ 回目に偶数が書かれた球を取り出す。

[2]　n 個の数の和が奇数で，$(n+1)$ 回目に奇数が書かれた球を取り出す。

[1]，[2] は互いに排反であるから　$p_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{3}{7}+(1-p_n)\cdot\dfrac{4}{7}$

ゆえに　$p_{n+1}=-\dfrac{1}{7}p_n+\dfrac{4}{7}$

(2)　(1) の式を変形すると　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{7}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{7}$，初項 $\left(p_1-\dfrac{1}{2}\right)$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$$

ゆえに　$p_n=-\dfrac{1}{14}\cdot\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{n}+\dfrac{1}{2}$

$\boxed{7}$ 求める和は

$$S-\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=S-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=\frac{1}{24}n(n-1)\{(n+1)(3n+2)-4(2n-1)-12\}$$

$$=\frac{1}{24}n(n-1)\cdot 3(n^2-n-2)=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1)$$

$\boxed{8}$ この数列を，次のように 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

$$\left\{\frac{1}{1}\right\},\ \left\{\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right\},\ \left\{\frac{1}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{5}{3}\right\},\ \left\{\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4}\right\},\ \cdots\cdots$$

このとき，第 n 群の m 番目の数は $\dfrac{2m-1}{n}$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$ と表される。

(1)　$\dfrac{5}{9}$ は第 9 群の 3 番目の数である。

また，第 1 群から第 n 群までに入る数の総数を l_n とすると

$$l_n=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

よって，第 1 群から第 8 群までに入る数の総数は

$$l_8=\frac{1}{2}\times 8\times 9=36$$

したがって，$36+3=39$ より，$\dfrac{5}{9}$ は第 39 項

(2)　第 800 項が第 n 群に含まれるとすると

$$l_{n-1}<800\leqq l_n$$

よって　　$(n-1)n<1600\leqq n(n+1)$

$n=40$ のとき　$(n-1)n=1560$,

$n(n+1)=1640$

n は自然数であるから　　$n=40$

第 1 群から第 39 群までに入る数の総数は

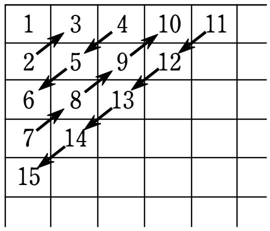
$$l_{39}=\frac{1}{2}\times 39\times 40=780$$

よって，第 800 項は第 40 群の 20 番目の数である。

したがって，第 800 項は　　$\dfrac{2\times 20-1}{40}=\dfrac{39}{40}$

9 並べられた自然数を，次のように区分する。

1 | 2, 3 | 4, 5, 6 | 7, 8, 9, 10 |, ……　　……①



(1)　1番上の段の左から n 番目の数は，n が偶数のとき，①の第 n 群の末項である。

よって，求める数は　$1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

(2)　1番上の段の左から n 番目の数は，n が奇数のとき，①の第 n 群の初項である。

$n\geqq 2$ のとき，第 $(n-1)$ 群の末項は

$$1+2+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

よって，n が3以上の奇数のとき，求める数は

$$\frac{1}{2}n(n-1)+1=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$$

これは $n=1$ のときにも適する。　答　$\frac{1}{2}(n^2-n+2)$

(3)　1000が①の第 n 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}n(n-1)<1000\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

また，$\frac{1}{2}n(n-1)$ は単調に増加する。

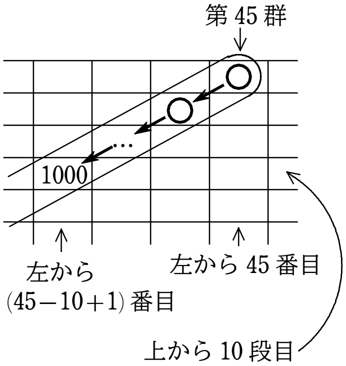
$\frac{44\cdot 45}{2}=990$，$\frac{45\cdot 46}{2}=1035$ であるから

$$n=45$$

よって，1000は第45群の $1000-990=10$ (番目)の数である。

したがって，1000は，左から

$45-10+1=36$ (番目)，上から10段目にある。



10 (1)　0 以上の整数 x のとりうる値は　　$x=0,\ 1,\ 2$

$3x+2y\leqq 8$ を満たす 0 以上の整数 y は

$x=0$ のとき，$2y\leqq 8$ から　　　$y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$x=1$ のとき，$3+2y\leqq 8$ から　$y=0,\ 1,\ 2$

$x=2$ のとき，$6+2y\leqq 8$ から　$y=0,\ 1$

以上から，求める整数の組 $(x,\ y)$ の個数は 10 個

(2)　$3x+2y\leqq 2008$ ……①　とする。

0 以上の整数 x のとりうる値は　　$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 669$

[1]　$x=2k\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334)$ のとき

① から　$6k+2y\leqq 2008$　　　　よって　$y\leqq 1004-3k$　……②

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334$ のそれぞれの k の値に対し，② を満たす 0 以上の整数 y は $(1005-3k)$ 個ある。

[2]　$x=2k+1\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334)$ のとき

① から　$6k+3+2y\leqq 2008$　　　　よって　$y\leqq 1002.5-3k$　……③

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 334$ のそれぞれの k の値に対し，③ を満たす 0 以上の整数 y は $(1003-3k)$ 個ある。

[1]，[2] から，① を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数は

$$\sum_{k=0}^{334}\{(1005-3k)+(1003-3k)\}=\sum_{k=0}^{334}(2008-6k)=\frac{1}{2}\times 335\times(2008+4)$$

$$=337010\quad(\text{個})$$

11 (1)　長さ 1 の単語：a，b，c

長さ 2 の単語：aa，bb，cc，ab，ba，bc，cb，ca，ac

長さ 3 の単語：aaa，bbb，ccc，aab，aba，baa，aac，aca，caa，bba，bab，abb，bbc，bcb，cbb，cca，cac，acc，ccb，cbc，bcc，abc，acb，bac，bca，cab，cba

(2)　x_{n+1} を次の [1]〜[3] の場合に分けて考える。

[1]　最初の文字が a のとき

残りの n 個の文字には a が偶数個含まれるから，単語の数は　y_n

[2]　最初の文字が b のとき

残りの n 個の文字には a が奇数個含まれるから，単語の数は　x_n

[3]　最初の文字が c のとき

残りの n 個の文字には a が奇数個含まれるから，単語の数は　x_n

よって　　$x_{n+1}=2x_n+y_n$　…… ①

また，長さ n の単語は，3 文字 a，b，c から重複を許して n 個並べたものであるから，全部で 3^n 個ある。

よって　　$x_n+y_n=3^n$　　　ゆえに　$y_n=3^n-x_n$　…… ②

② を ① に代入して　　$x_{n+1}=2x_n+(3^n-x_n)$

すなわち　　$x_{n+1}-x_n=3^n$　　　また，(1) から　　$x_1=1$

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k=1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)$$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに　　$x_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$　　　② に代入して　　$y_n=\frac{1}{2}(3^n+1)$

$\boxed{12}$ 数学的帰納法により証明する．

[1]　$n=0$ のとき

$$(\text{左辺})=f_0(2\cos\theta)=1$$

$$(\text{右辺})=\frac{\sin(0+1)\theta}{\sin\theta}=1$$

よって，成り立つ．

$n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=f_1(2\cos\theta)=2\cos\theta$$

$$(\text{右辺})=\frac{\sin(1+1)\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$$

よって，成り立つ．

[2]　$n=k-1,\ k\ (k\geqq 1)$ のとき成り立つと仮定する．

すなわち　$f_{k-1}(2\cos\theta)=\dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$

$$f_k(2\cos\theta)=\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=f_{k+1}(2\cos\theta)\\&=2\cos\theta f_k(2\cos\theta)-f_{k-1}(2\cos\theta)\\&=2\cos\theta\cdot\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}\\&=2\cos\theta\cdot\frac{\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{(2\cos^2\theta-1)\sin k\theta+2\sin\theta\cos\theta\cos k\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\cos 2\theta\sin k\theta+\sin 2\theta\cos k\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta}=(\text{右辺})\end{aligned}$$

よって，成り立つ．

以上から，$n\geqq 0$ であるすべての n について $f_n(2\cos\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ と表される．

$\boxed{13}$ (1)　$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ のとき $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ を数学的帰納法で証明する．

$(1+\sqrt{2})^{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(a_n+b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$ から

$a_{n+1}=a_n+2b_n$, $b_{n+1}=a_n+b_n$ が成り立つ．

[1]　$n=1$ のとき　$a_1=b_1=1$ で成り立つ．

[2]　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると　$(1-\sqrt{2})^k=a_k-b_k\sqrt{2}$

$n=k+1$ のとき

$(1-\sqrt{2})^{k+1}=(a_k-b_k\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=(a_k+2b_k)-(a_k+b_k)\sqrt{2}=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{2}$

$n=k+1$ のときも成り立つ．

よって，すべての自然数 n に対して成り立つ．

(2)　n を順次計算すると

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	3	7	17	41	99	239	577	1393
b_n	1	2	5	12	29	70	169	408	985

これから　$239+169\sqrt{2}<1000<577+408\sqrt{2}$

よって，$a_n+b_n\sqrt{2}>1000$ となる最小の自然数 n は　$n=8$

(3)　$(a_n+b_n\sqrt{2})(a_n-b_n\sqrt{2})=\{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\}^n=(-1)^n$

よって　$b_n\sqrt{2}=a_n-\dfrac{(-1)^n}{a_n+b_n\sqrt{2}}$

上の表から $\dfrac{(-1)^n}{a_n+b_n\sqrt{2}}$ は $n\geqq 8$ のとき絶対値が 0.001 より小さい．

更に n が奇数ならば $b_n\sqrt{2}=a_n+k$ $(0<k<0.001)$ と表される．

すなわち $b_n\sqrt{2}$ の小数部分が 0.001 以下となる最小の n は $n=9$ で　$b_9=985$

14　$n=1$ のとき　$a_1a_2=2{a_1}^2$

$a_1=1$ であるから　$a_2=2$

$n=2$ のとき　$a_1a_2+a_2a_3=2(a_1a_2+a_2a_1)$

よって　$1\cdot2+2a_3=2(1\cdot2+2\cdot1)$　ゆえに　$a_3=3$

$n=3$ のとき　$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4=2(a_1a_3+a_2a_2+a_3a_1)$

よって　$1\cdot2+2\cdot3+3a_4=2(1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1)$　ゆえに　$a_4=4$

したがって，$a_n=n$ ……① と推測できる。

この推測が正しいことを，数学的帰納法を用いて証明する。

[1]　$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$n\leqq k$ のとき，① が成り立つと仮定すると　$a_n=n$ $(n\leqq k)$

このとき，条件式で $n=k$ とすると

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_{k-1}a_k+a_ka_{k+1}$$
$$=2(a_1a_k+a_2a_{k-1}+\cdots\cdots+a_{k-1}a_2+a_ka_1)$$

よって
$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots\cdots+(k-1)k+ka_{k+1}$$
$$=2\{1\cdot k+2\cdot(k-1)+\cdots\cdots+(k-1)\cdot2+k\cdot1\}$$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}i(i+1)+ka_{k+1}=2\sum_{i=1}^{k}i(k+1-i)$

したがって
$$\begin{aligned}ka_{k+1}&=2\sum_{i=1}^{k}i(k+1-i)-\sum_{i=1}^{k-1}i(i+1)\\&=2\sum_{i=1}^{k-1}i(k+1-i)+2k\cdot1-\sum_{i=1}^{k-1}i(i+1)\\&=\sum_{i=1}^{k-1}i\{2(k+1-i)-(i+1)\}+2k=\sum_{i=1}^{k-1}i(2k+1-3i)+2k\\&=(2k+1)\sum_{i=1}^{k-1}i-3\sum_{i=1}^{k-1}i^2+2k\\&=(2k+1)\cdot\frac{1}{2}k(k-1)-3\cdot\frac{1}{6}k(k-1)(2k-1)+2k\\&=k(k-1)+2k=k(k+1)\end{aligned}$$

よって　$a_{k+1}=k+1$

ゆえに，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

したがって　$a_n=n$

BASIC問題

1 (1) $\dfrac{2i}{3+i}-\dfrac{2-i}{1-3i}$ を計算せよ。

(2) 等式 $(1+3i)(a-bi)=-2i$ を満たす実数 a，b の値を求めよ。

2 方程式 $2x^3-9x^2+6x-1=0$ の解を $x_1, x_2, x_3\ (x_1<x_2<x_3)$ とするとき，x_1, x_2, x_3 を求めよ。

3 方程式 $x^3=1$ の虚数解の１つを ω とするとき，$(1+\omega^2)^3(2+\omega)+(1+\omega)^3(2+\omega^2)$ の値を求めよ。

4 多項式 $P(x)$ を $x-1$，$x-2$ で割った余りがそれぞれ 5，7 である。$P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割った余りを求めよ。

STANDARD問題

5 $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$ を簡単にせよ。

6 方程式 $x^3-2x^2+ax+b=0$ が $2+i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値を求めよ。また，他の解を求めよ。

7 複素数 x が $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$ を満たすとする。もとの方程式の解を複素数の範囲ですべて求めよ。

8 整式 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ を $x(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ.

9 整式 $f(x)$ を $x+5$ で割ると余りが -11，$(x+2)^2$ で割ると余りが $x+3$ となる。このとき，$f(x)$ を $(x+5)(x+2)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

実戦問題

10 x の２次方程式 $x^2-(k-2)x+2k=0$ の解が次のようであるとき，定数 k の値を求めよ。

(1) ２つの解の差が 1

(2) ２つの実数解の絶対値の和が $2\sqrt{2}$

11 $x^2-x+1=0$ の１つの解を ω とするとき，$\omega^{12}+6\omega^{10}+15\omega^8+20\omega^6+15\omega^4+6\omega^2+1$ の値を求めよ.

12 x についての多項式 $P(x)$ を x^2+x+1 で割った余りが $x+1$，x^2-x+1 で割った余りが $x-1$ のとき，$P(x)$ を $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ で割った余りを求めよ。

13 $f(x)=x^2-\dfrac{4}{5}$ とおく。

(1) ２次方程式 $f(x)=x$ の２つの解を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とするとき，$f(f(\alpha))$，$f(f(\beta))$ の値を求めよ。

(2) 方程式 $f(f(x))=x$ を解け。

14 $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ のとき，x^4-10x^2，$x^{10}-10x^8+x^6+x^4+2x^2$ の値を求めよ。

1 解答 (1) $\dfrac{i-3}{10}$ (2) $a=-\dfrac{3}{5}$，$b=\dfrac{1}{5}$

2 解答 (ア) $2-\sqrt{3}$ (イ) $\dfrac{1}{2}$ (ウ) $2+\sqrt{3}$

3 解答 -3

4 解答 $2x+3$

5 解答 $a+b+c$

6 解答 $a=-3$，$b=10$，$x=-2$，$2-i$

7 解答 (前半) $t^2-2t-3=0$ (後半) $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

8 解答 $96x+24$

9 解答 $-x^2-3x-1$

10 解答 (1) $k=6\pm\sqrt{33}$ (2) $k=6-2\sqrt{10}$

11 解答 1

12 解答 x^3+x

13 解答 (1) 順に $\dfrac{5-\sqrt{105}}{10}$，$\dfrac{5+\sqrt{105}}{10}$ (2) $x=\dfrac{5\pm\sqrt{105}}{10}$，$\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$

14 解答 $x^4-10x^2=-1$，$x^{10}-10x^8+x^6+x^4+2x^2=59-24\sqrt{6}$

$\boxed{1}$ (1) (与式)$=\dfrac{2i(3-i)}{(3+i)(3-i)}-\dfrac{(2-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\dfrac{6i-2i^2}{9-i^2}-\dfrac{2+6i-i-3i^2}{1-9i^2}$

$=\dfrac{6i+2}{10}-\dfrac{5+5i}{10}=\dfrac{i-3}{10}$

(2) 左辺を展開すると　$a-bi+3ai-3bi^2=-2i$

よって　$(a+3b)+(3a-b)i=-2i$

a，b は実数より，$a+3b$，$3a-b$ も実数であるから　$a+3b=0$，$3a-b=-2$

これを解くと　$a=-\dfrac{3}{5}$，$b=\dfrac{1}{5}$

別解　等式より　$a-bi=\dfrac{-2i}{1+3i}$

(右辺)$=\dfrac{-2i(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{-2i(1-3i)}{1-9i^2}=\dfrac{-i+3i^2}{5}=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}i$

よって　$a-bi=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}i$

a，b は実数であるから　$a=-\dfrac{3}{5}$，$b=\dfrac{1}{5}$

$\boxed{2}$ $P(x)=2x^3-9x^2+6x-1$ とおくと　$P\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

よって，$P(x)\div(2x-1)$ を計算することにより　$P(x)=(2x-1)(x^2-4x+1)$

ゆえに　$(2x-1)(x^2-4x+1)=0$　よって　$x=\dfrac{1}{2}, 2\pm\sqrt{3}$

$x_1<x_2<x_3$ から　$x_1={}^{ア}2-\sqrt{3}$, $x_2={}^{イ}\dfrac{1}{2}$, $x_3={}^{ウ}2+\sqrt{3}$

$\boxed{3}$ 方程式 $x^3=1$ から　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω は $x^2+x+1=0$ の解である。

よって，ω は $\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$ を満たす。

これより　$1+\omega=-\omega^2$，$1+\omega^2=-\omega$

よって　$(1+\omega^2)^3(2+\omega)+(1+\omega)^3(2+\omega^2)=(-\omega)^3(2+\omega)+(-\omega^2)^3\{1+(1+\omega^2)\}$

$$=-\omega^3(2+\omega)-\omega^6(1-\omega)$$
$$=-1\cdot(2+\omega)-1^2\cdot(1-\omega)$$
$$=-2-\omega-1+\omega=-3$$

$\boxed{4}$ $P(x)$ を 2 次式 $(x-1)(x-2)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$$

この等式より　$P(1)=a+b$，$P(2)=2a+b$

$P(x)$ を $x-1$ で割った余りが 5 であるから　$P(1)=5$

$x-2$ で割った余りが 7 であるから　$P(2)=7$

よって　$a+b=5$，$2a+b=7$　　これを解くと　$a=2$，$b=3$

したがって，求める余りは　$2x+3$

$\boxed{5}$ (与式)$=\dfrac{-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

(分子)$=-a^3(b-c)+a(b^3-c^3)-bc(b^2-c^2)=-(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$=-(b-c)\{b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c^2-a^2)\}=-(b-c)(c-a)\{b^2+bc-a(c+a)\}$

$=-(b-c)(c-a)\{-c(a-b)-(a^2-b^2)\}=-(b-c)(c-a)(a-b)\{-c-(a+b)\}$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

よって　(与式)$=a+b+c$

$\boxed{6}$ $x=2+i$ が方程式の解であるから　$(2+i)^3-2(2+i)^2+a(2+i)+b=0$

整理すると　$(2a+b-4)+(a+3)i=0$

$2a+b-4$，$a+3$ は実数であるから　$2a+b-4=0$，$a+3=0$

これを解いて　$a=-3$，$b=10$

よって，方程式は　$x^3-2x^2-3x+10=0$

左辺を因数分解すると　$(x+2)(x^2-4x+5)=0$

よって，方程式の解は　$x=-2$，$2\pm i$

したがって，他の解は　$x=-2$，$2-i$

$x=3$ が方程式の解であるから　$3^3+a\cdot 3^2+11\cdot 3-6=0$

すなわち　$9a+54=0$　　よって　$a=-6$

このとき，方程式は　$x^3-6x^2+11x-6=0$

左辺は $x-3$ を因数にもつから，$x-3$ で割ると，商は x^2-3x+2 となり

$(x-3)(x^2-3x+2)=0$

$(x-3)(x-1)(x-2)=0$

よって，方程式の解は　$x=1$，2，3

したがって，残りの解は　$x=1$，2

$\boxed{7}$ $x=0$ は方程式の解でないから　$x\neq 0$

方程式の両辺を $x^2\ (\neq 0)$ で割ると　$x^2-2x-1-2\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

よって　$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1=0$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$ であるから　$(t^2-2)-2t-1=0$

ゆえに　$t^2-2t-3=0$　　すなわち　$(t+1)(t-3)=0$

よって　$t=-1$，3

[1]　$t=-1$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=-1$

両辺に x を掛けて整理すると　$x^2+x+1=0$

これを解くと　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

[2]　$t=3$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=3$

両辺に x を掛けて整理すると　$x^2-3x+1=0$

これを解くと　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

したがって，解は　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$\boxed{8}$ 求める余りは1次以下の整式または0であるから，$ax+b$ とおく．

商を $Q(x)$ とすると　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=x(x-1)Q(x)+ax+b$ が成り立つ．

$x=0$ とおくと　$1\cdot2\cdot3\cdot4=b$　ゆえに　$b=24$

$x=1$ とおくと　$2\cdot3\cdot4\cdot5=a+b$　ゆえに　$a+24=120$　よって　$a=96$

したがって，求める余りは　$96x+24$

別解　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$$

$$=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$$

また　$x(x-1)=x^2-x$

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^2+11x+46 \\ \cline{2-2}
x^2-x\,\big) & x^4+10x^3+35x^2+50x+24 \\
 & x^4-x^3 \\ \cline{2-2}
 & \quad 11x^3+35x^2 \\
 & \quad 11x^3-11x^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 46x^2+50x \\
 & \qquad\quad 46x^2-46x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 96x+24
\end{array}$$

よって，余りは　$96x+24$

$\boxed{9}$ $f(x)$ を3次式 $(x+5)(x+2)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c とすると，次の等式が成り立つ。

$$f(x)=(x+5)(x+2)^2Q(x)+ax^2+bx+c\quad(a,\ b,\ c\ は定数)$$

さらに，条件より，$f(x)$ を $(x+2)^2$ で割ったときの余りが $x+3$ であるから，

ax^2+bx+c を $(x+2)^2$ で割ったときの余りが $x+3$ となる。

すなわち　$ax^2+bx+c=a(x+2)^2+x+3$

よって　$f(x)=(x+5)(x+2)^2Q(x)+a(x+2)^2+x+3$

剰余の定理により，$f(-5)=-11$ から　$a(-5+2)^2+(-5)+3=-11$

これを解くと　$a=-1$

よって，余りは　$-(x+2)^2+x+3=-x^2-3x-1$

$\boxed{10}$　2 次方程式 $x^2-(k-2)x+2k=0$ の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=k-2 \quad \cdots\cdots ①, \qquad \alpha\beta=2k \quad \cdots\cdots ②$$

(1)　2 つの解の差が 1 であるのは，$\alpha-\beta=\pm 1$ すなわち $(\alpha-\beta)^2=1$ のときである。

$(\alpha-\beta)^2=1$ から　　$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1$

①，② を代入すると　　$(k-2)^2-4\cdot 2k=1$

すなわち　　$k^2-12k+3=0$　　　これを解いて　　$k=6\pm\sqrt{33}$

(2)　この 2 次方程式の判別式を D とすると　　$D=(k-2)^2-8k=k^2-12k+4$

実数解をもつための条件は，$D\geqq 0$ から　　$k\leqq 6-4\sqrt{2}$，$6+4\sqrt{2}\leqq k$　$\cdots\cdots$ ③

実数解をもつとき，2 つの実数解の絶対値の和が $2\sqrt{2}$ になることは $|\alpha|+|\beta|=2\sqrt{2}$ が成り立つことである。

$$\begin{aligned}|\alpha|+|\beta|=2\sqrt{2} &\iff (|\alpha|+|\beta|)^2=(2\sqrt{2})^2\\ &\iff \alpha^2+\beta^2+2|\alpha||\beta|=8\\ &\iff (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=8\end{aligned}$$

①，② を代入すると　　$(k-2)^2-2\cdot 2k+2|2k|=8$

すなわち　　$k^2-8k+4|k|-4=0$　$\cdots\cdots$ ④

[1]　$k\geqq 0$ のとき

④ は　　$k^2-4k-4=0$　　　これを解いて　　$k=2\pm 2\sqrt{2}$

$k\geqq 0$ を満たすものは　　$k=2+2\sqrt{2}$　　　これは ③ を満たさない。

[2]　$k<0$ のとき

④ は　　$k^2-12k-4=0$　　　これを解いて　　$k=6\pm 2\sqrt{10}$

$k<0$ を満たすものは　　$k=6-2\sqrt{10}$

$6-2\sqrt{10}<6-4\sqrt{2}$ であるから，これは ③ を満たす。

以上から　　$k=6-2\sqrt{10}$

$\boxed{11}$　$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ から　$\omega^3=-1$

また　$\omega^2-\omega+1=0$ から　$\omega^2-\omega=-1$

$\omega^{12}+6\omega^{10}+15\omega^8+20\omega^6+15\omega^4+6\omega^2+1$

$=(\omega^3)^4+20(\omega^3)^2+1+6\{(\omega^3)^3\omega+\omega^2\}+15\{(\omega^3)^2\omega^2+(\omega^3)\omega\}$

$=1+20+1+6(-\omega+\omega^2)+15(\omega^2-\omega)$

$=22+6\cdot(-1)+15\cdot(-1)=1$　答

参考　平凡に

$(\omega^3)^4+6(\omega^3)^3\omega+15(\omega^3)^2\omega^2+20(\omega^3)^2+15\omega^3\omega+6\omega^2+1$

$=1-6\omega+15\omega^2+20-15\omega+6\omega^2+1$

$=21\omega^2-21\omega+22=21\cdot(-1)+22=1$

としてもよい.

$\boxed{12}$　$P(x)$ を 4 次式 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)Q(x)+R(x)$$ （$R(x)$ は0または3次以下の整式）

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)Q(x)$ は x^2+x+1 で割り切れるから，$P(x)$ を x^2+x+1 で割った余りは，$R(x)$ を x^2+x+1 で割った余りと等しい。

よって，$R(x)$ は次のように表される。

$$R(x)=(x^2+x+1)(ax+b)+x+1$$ （a，b は定数）……①

また，$P(x)$ を x^2-x+1 で割った余りは，$R(x)$ を x^2-x+1 で割った余りと等しいから

$$R(x)=(x^2-x+1)(cx+d)+x-1$$ （c，d は定数）……②

①，② は同じ式を表すから

$$(x^2+x+1)(ax+b)+x+1=(x^2-x+1)(cx+d)+x-1$$

式を展開して整理すると

$$ax^3+(a+b)x^2+(a+b+1)x+b+1=cx^3+(d-c)x^2+(c-d+1)x+d-1$$

両辺の係数を比較して

$$a=c,\ a+b=d-c,\ a+b+1=c-d+1,\ b+1=d-1$$

これを解くと　$a=1$，$b=-1$，$c=1$，$d=1$

したがって，求める余り $R(x)$ は　$R(x)=(x^2+x+1)(x-1)+x+1=x^3+x$

13 (1)　$x^2-\dfrac{4}{5}=x$ から　$5x^2-5x-4=0$

$\alpha<\beta$ であるから　$\alpha=\dfrac{5-\sqrt{105}}{10}$，$\beta=\dfrac{5+\sqrt{105}}{10}$

また，α，β は方程式 $f(x)=x$ の解であるから　$f(\alpha)=\alpha$，$f(\beta)=\beta$

よって　$f(f(\alpha))=f(\alpha)=\alpha=\dfrac{5-\sqrt{105}}{10}$，$f(f(\beta))=f(\beta)=\beta=\dfrac{5+\sqrt{105}}{10}$

(2)　$f(f(x))=f\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)=\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)^2-\dfrac{4}{5}=x^4-\dfrac{8}{5}x^2-\dfrac{4}{25}$

よって，$f(f(x))=x$ から　$x^4-\dfrac{8}{5}x^2-\dfrac{4}{25}=x$

すなわち　$25x^4-40x^2-25x-4=0$ ……①

ここで，$f(f(\alpha))=\alpha$，$f(f(\beta))=\beta$ であるから，α，β は ① の2つの解である。

ゆえに，(1) より，① の左辺は $5(x-\alpha)(x-\beta)=5x^2-5x-4$ を因数にもつ。

① の左辺を因数分解すると　$(5x^2-5x-4)(5x^2+5x+1)=0$

したがって，$f(f(x))=x$ の解は　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{105}}{10}$，$\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$

別解　$f(x)-x=A$ とおくと

$$f(f(x))-x=f(x+A)-x=(x+A)^2-\frac{4}{5}-x=A^2+2xA+x^2-\frac{4}{5}-x$$
$$=A^2+2xA+A=A(A+2x+1)$$
$$=\left(x^2-\frac{4}{5}-x\right)\left\{\left(x^2-\frac{4}{5}-x\right)+2x+1\right\}$$

$$=\frac{1}{25}(5x^2-5x-4)(5x^2+5x+1)$$

よって，$f(f(x))=x$ から　　$(5x^2-5x-4)(5x^2+5x+1)=0$

したがって　　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{105}}{10}$，$\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$

参考　$5x^2+5x+1=0$ の 2 つの解 $a=\dfrac{-5-\sqrt{5}}{10}$，$b=\dfrac{-5+\sqrt{5}}{10}$ は，

$f(a)=b$，$f(b)=a$，$a\neq b$ を満たす実数である。

14　$x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ から　　$x^2=5-2\sqrt{6}$　…… ①

すなわち　　$x^2-5=-2\sqrt{6}$　　　　この両辺を 2 乗すると　$(x^2-5)^2=24$

よって　　$x^4-10x^2=-1$　　　　また　　$x^4-10x^2+1=0$　…… ②

ここで，多項式 $x^{10}-10x^8+x^6+x^4+2x^2$ を多項式 x^4-10x^2+1 で割ると

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^6 \qquad\qquad\qquad +1 \\ \hline
x^4-10x^2+1 & x^{10}-10x^8+x^6+x^4+2x^2 \\
 & x^{10}-10x^8+x^6 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad x^4+2x^2 \\
 & \qquad\qquad\qquad x^4-10x^2+1 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad\quad 12x^2-1
\end{array}
$$

これと ①，② から，求める式の値は

$$
\begin{aligned}
x^{10}-10x^8+x^6+x^4+2x^2&=(x^4-10x^2+1)(x^6+1)+12x^2-1\\
&=12x^2-1=12(5-2\sqrt{6})-1=59-24\sqrt{6}
\end{aligned}
$$