BASIC＋Standard問題

1 32351 と 23009 の最大公約数を求めよ。

2 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $28x+95y=3$　　(2) $103x-75y=7$

3 (1) 方程式 $xy-2x+5y=1$ の整数解をすべて求めよ。

(2) 方程式 $3xy+3x+y=5$ を満たす 2 つの整数 x, y の組をすべて求めよ。

4 n は自然数とする。$n^2-28n+160$ が素数となるような n をすべて求めよ。

5 (1) 1960 の正の約数の個数を求めよ。

(2) 1960 の正の約数の総和を求めよ。

6 n を正の整数とする。$N=1890n$ とすると，$\sqrt{N}$ が整数になるような最小の n の値を求めよ。

7 $5x^2+2xy+y^2-4x+4y+7=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を求めよ.

8 次の等式を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。

(1) $xyz=x+y+z$　$(x<y<z)$

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$　$(x\leqq y\leqq z)$

実戦問題

9 $\dfrac{40}{21}$, $\dfrac{16}{39}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち，最も小さいものを求めよ。

10 方程式 $48x+539y=77$ を満たす整数解 x, y をすべて求めよ.

11 次の等式を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

12 自然数 N を 5 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(5)}$ になり，7 進法で表すと 3 桁の数 $cab_{(7)}$ になるという。a, b, c を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

13 100! を素因数分解すると，$2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^{16}\cdot 11^9\cdot 13^7\cdots\cdots$ となる。a, b, c の値を求めよ。

14 素数 p, q, r に対して $2p^3qr+19p^2q^2r-10pq^3r=111111$ が成り立つとき，p, q, r の値を求めよ。

1 解答 173

2 解答 k は整数とする。

(1) $x=95k+51$, $y=-28k-15$　(2) $x=75k-56$, $y=103k-77$

3 解答 $(x,\ y)=(-4,\ -7),\ (-2,\ -1),\ (4,\ 1),\ (-6,\ 11),\ (-8,\ 5),\ (-14,\ 3)$

解答 $(x,\ y)=(-1,\ -4),\ (0,\ 5)$

4 解答 $n=7,\ 21$

5 解答 (1) 24　(2) 5130

6 解答 210

7 解答 $(x,\ y)=(1,\ -2),\ (1,\ -4)$

8 解答 (1) $(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$　(2) $(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 4)$

9 解答 $\dfrac{273}{8}$

10 解答 $x=-77+539t,\ y=7-48t$ (t は整数)

11 解答 $(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 6,\ 3),\ (3,\ 2,\ 6),\ (3,\ 6,\ 2),\ (6,\ 2,\ 3),\ (6,\ 3,\ 2),$
$(2,\ 4,\ 4),\ (4,\ 2,\ 4),\ (4,\ 4,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3)$

12 解答 $a=2,\ b=3,\ c=1$; $N=66$

13 解答 $a=97,\ b=48,\ c=24$

14 解答 (ア) 7　(イ) 3　(ウ) 13

$\boxed{1}$ $32351=23009\cdot 1+9342$

$23009=9342\cdot 2+4325$

$9342=4325\cdot 2+692$

$4325=692\cdot 6+173$

$692=173\cdot 4+0$

$$\begin{array}{rrrrr} 4 & 6 & 2 & 2 & 1 \\ 173\,)\,692 &)\,4325 &)\,9342 &)\,23009 &)\,32351 \\ 692 & 4152 & 8650 & 18684 & 23009 \\ \hline 0 & 173 & 692 & 4325 & 9342 \end{array}$$

よって，最大公約数は　173

$\boxed{2}$ (1)　$28x+95y=3$　……①

$x=17$，$y=-5$ は，$28x+95y=1$ の整数解の1 つである。

よって　$28\cdot 17+95\cdot(-5)=1$

両辺に 3 を掛けると

$28\cdot 51+95\cdot(-15)=3$　……②

①−② から　$28(x-51)+95(y+15)=0$　……③

28 と 95 は互いに素であるから，③ のすべての整数解は

$x-51=95k$，$y+15=-28k$ (k は整数)

したがって，① のすべての整数解は

$x=95k+51$，$y=-28k-15$ (k は整数)

$\boxed{参考}$1　28 と 95 に互除法を用いると

$95=28\cdot 3+11$　移項すると　$11=95-28\cdot 3$

$28=11\cdot 2+6$　移項すると　$6=28-11\cdot 2$

$11=6\cdot 1+5$　移項すると　$5=11-6\cdot 1$

$6=5\cdot 1+1$　移項すると　$1=6-5\cdot 1$

よって　$1=6-5\cdot 1=6-(11-6\cdot 1)\cdot 1$

$=6\cdot 2-11\cdot 1=(28-11\cdot 2)\cdot 2-11\cdot 1$

$=28\cdot 2-11\cdot 5=28\cdot 2-(95-28\cdot 3)\cdot 5$

$=28\cdot 17+95\cdot(-5)$

$\boxed{参考}$2　$a=28$，$b=95$ とおく。

$11=95-28\cdot 3$ より　$11=b-a\cdot 3=-3a+b$

$6=28-11\cdot 2$ より　$6=a-(-3a+b)\cdot 2$

$=7a-2b$

$5=11-6\cdot 1$ より　$5=(-3a+b)-(7a-2b)$

$=-10a+3b$

$1=6-5\cdot 1$ より　$1=(7a-2b)-(-10a+3b)$

$=17a-5b$

よって，$17a-5b=1$ より　$28\cdot 17+95\cdot(-5)=1$

(2)　$103x-75y=7$　……①

$x=-8$，$y=-11$ は，$103x-75y=1$ の整数解の 1 つである。

よって　$103\cdot(-8)-75\cdot(-11)=1$

両辺に7を掛けると

$$103\cdot(-56)-75\cdot(-77)=7 \quad \cdots\cdots ②$$

①−②から　$103(x+56)-75(y+77)=0 \quad \cdots\cdots ③$

103と75は互いに素であるから，③のすべての整数解は

$$x+56=75k,\ y+77=103k \quad (k\text{ は整数})$$

したがって，①のすべての整数解は

$$x=75k-56,\ y=103k-77 \quad (k\text{ は整数})$$

参考 1　103と75に互除法を用いると

$103=75\cdot1+28$　移項すると　$28=103-75\cdot1$

$75=28\cdot2+19$　移項すると　$19=75-28\cdot2$

$28=19\cdot1+9$　移項すると　$9=28-19\cdot1$

$19=9\cdot2+1$　移項すると　$1=19-9\cdot2$

よって　$1=19-9\cdot2=19-(28-19\cdot1)\cdot2$

$$=19\cdot3-28\cdot2=(75-28\cdot2)\cdot3-28\cdot2$$

$$=75\cdot3-28\cdot8=75\cdot3-(103-75\cdot1)\cdot8$$

$$=103\cdot(-8)-75\cdot(-11)$$

参考 2　$a=103$，$b=75$ とおく。

$28=103-75\cdot1$ より　$28=a-b$

$19=75-28\cdot2$ より　$19=b-(a-b)\cdot2$

$$=-2a+3b$$

$9=28-19\cdot1$ より　$9=(a-b)-(-2a+3b)$

$$=3a-4b$$

$1=19-9\cdot2$ より　$1=(-2a+3b)-(3a-4b)\cdot2$

$$=-8a+11b$$

よって，$-8a+11b=1$ より　$103\cdot(-8)-75\cdot(-11)=1$

3　$xy-2x+5y=(x+5)(y-2)+10$ であるから，方程式 $xy-2x+5y=1$ を変形すると

$$(x+5)(y-2)+10=1 \qquad \text{すなわち} \qquad (x+5)(y-2)=-9$$

x，y は整数であるから，$x+5$，$y-2$ はともに整数である。

積が -9 になる整数 $x+5$，$y-2$ の組は

$$(x+5,\ y-2)=(1,\ -9),\ (3,\ -3),\ (9,\ -1),\ (-1,\ 9),\ (-3,\ 3),\ (-9,\ 1)$$

よって，求める整数解は

$$(x,\ y)=(-4,\ -7),\ (-2,\ -1),\ (4,\ 1),\ (-6,\ 11),\ (-8,\ 5),\ (-14,\ 3)$$

$3xy+3x+y=5$ から　$(3x+1)(y+1)=6$

xは整数であるから，$3x+1$ は3で割ると1余る整数である。

よって　$(3x+1,\ y+1)=(-2,\ -3),\ (1,\ 6)$

したがって　$(x,\ y)=(-1,\ -4),\ (0,\ 5)$

$\boxed{4}$　$n^2-28n+160=(n-8)(n-20)$　または　$n^2-28n+160=(8-n)(20-n)$

$n-8>n-20$，$8-n<20-n$ であるから，$n^2-28n+160$ が素数であるとき

$n-20=1$　または　$8-n=1$

$n-20=1$ より　$n=21$，　$8-n=1$ より　$n=7$

$n=21$ のとき　$n^2-28n+160=13\cdot 1=13$　(素数)

$n=7$ のとき　$n^2-28n+160=1\cdot 13=13$　(素数)

よって，求める自然数 n は　$n=7,\ 21$

$\boxed{5}$ 1960 を素因数分解すると　$1960=2^3\cdot 5\cdot 7^2$

よって，1960 のすべての正の約数は $(1+2+2^2+2^3)(1+5)(1+7+7^2)$ を展開したときの項として 1 つずつ出てくる。

(1)　1960 の正の約数の個数は　$(3+1)(1+1)(2+1)=4\times 2\times 3=24$ (個)

(2)　1960 の正の約数の和は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+5)(1+7+7^2)=(1+2+4+8)(1+5)(1+7+49)$$
$$=15\times 6\times 57=5130$$

$\boxed{6}$ 1890 を素因数分解すると　$1890=2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7$

1890 に $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ を掛けると，$2^2\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7^2$ すなわち $(2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)^2$ になる。

よって，n の最小値は　$n=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=210$

$\boxed{7}$ 左辺を y について整理すると　$y^2+2(x+2)y+5x^2-4x+7=0$ …… ①

y は整数であるから，判別式 D について，$D\geqq 0$ であることが必要.

$$\frac{D}{4}=(x+2)^2-(5x^2-4x+7)\geqq 0$$

すなわち　$4x^2-8x+3\leqq 0$

よって　$(2x-1)(2x-3)\leqq 0$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$　　これを満たす整数 x は　$x=1$

このとき，① は　$y^2+6y+8=0$

ゆえに　$(y+2)(y+4)=0$　　よって　$y=-2,\ -4$

したがって　$(x,\ y)=(1,\ -2),\ (1,\ -4)$

$\boxed{8}$ (1)　$x<y<z$ であるから　$xyz=x+y+z<z+z+z=3z$

よって，$xyz<3z$ の両辺を正の数 z で割ると　$xy<3$

これを満たす $x<y$ である自然数 x，y の組は　$x=1$，$y=2$

このとき，与えられた等式は　$2z=1+2+z$

よって　$z=3$

このとき，$y<z$ を満たす。

したがって　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$

(2)　$1 \leqq x \leqq y \leqq z$ であるから　$\dfrac{1}{z} \leqq \dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{x}$　……①

よって　$\dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{3z} \leqq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3x} = \dfrac{11}{6x}$

したがって　$x \leqq \dfrac{11}{8}$

x は自然数であるから　$x = 1$

このとき，与えられた等式は　$\dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{3z} = \dfrac{1}{3}$　……②

① から　$\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{3z} \leqq \dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{3y} = \dfrac{5}{6y}$

したがって　$y \leqq \dfrac{5}{2}$

y は自然数で，$1 = x \leqq y$ であるから　$y = 1,\ 2$

$y = 1$ のとき，② から　$\dfrac{1}{3z} = -\dfrac{1}{6}$

これを満たす自然数 z はない。

$y = 2$ のとき，② から　$\dfrac{1}{3z} = \dfrac{1}{12}$

よって　$z = 4$　($y \leqq z$ を満たす)

したがって　$(x,\ y,\ z) = (1,\ 2,\ 4)$

9　求める分数を $\dfrac{a}{b}$ (a，b は互いに素である自然数) とする。

$\dfrac{40}{21} \times \dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　a は 21 の倍数，b は 40 の約数　……①

$\dfrac{16}{39} \times \dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　a は 39 の倍数，b は 16 の約数　……②

求める分数 $\dfrac{a}{b}$ を最小にするには，a を最小にし，b を最大にするとよい。

①，② から

a は 21 と 39 の最小公倍数，b は 40 と 16 の最大公約数

とすればよい。

よって　$a = 273$，$b = 8$

したがって，求める分数は　$\dfrac{273}{8}$

10　方程式を変形して　$48x = 77(1 - 7y)$

48 と 77 は互いに素であるから，$x = 77s$ (s は整数) とおける．ゆえに　$48s = 1 - 7y$

よって　$7y=1-48s=(1+s)-49s$

ここで，$s+1=7t$（t は整数）とおけるから $y=t-7s=t-7(7t-1)=7-48t$

したがって　$x=77s=77(7t-1)=-77+539t$（t は整数）

11　x，y，z を入れ替えても，もとの式と変わらない。

x，y，z は自然数であるから，$1 \leqq x \leqq y \leqq z$　…… ① と仮定する。

$$\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{y} \leqq \frac{1}{x} \quad \cdots\cdots ②$$

よって　$1=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$

$$\leqq \frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$$

ゆえに　$x \leqq 3$

x は自然数であるから　$x=1,\ 2,\ 3$

[1]　$x=1$ のとき

与式から，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$ となり，これを満たす自然数 y，z はない。

[2]　$x=2$ のとき

与式から　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$　…… ③

② から　$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \leqq \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$

ゆえに　$y \leqq 4$

y は自然数で $2=x \leqq y$ であるから　$y=2,\ 3,\ 4$

$y=2$ のとき　③ から　$\dfrac{1}{z}=0$　　これを満たす自然数 z はない。

$y=3$ のとき　③ から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{6}$　　よって　$z=6$　（$y \leqq z$ を満たす）

$y=4$ のとき　③ から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　　よって　$z=4$　（$y \leqq z$ を満たす）

[3]　$x=3$ のとき

与式から　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$　…… ④

② から　$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \leqq \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$

ゆえに　$y \leqq 3$

y は自然数で，$3=x \leqq y$ であるから　$y=3$

このとき ④ から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$　　よって　$z=3$　（$y \leqq z$ を満たす）

以上から　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

よって，① の条件をはずして考えると，求める x，y，z の組は

$(2,\ 3,\ 6)$，$(2,\ 6,\ 3)$，$(3,\ 2,\ 6)$，$(3,\ 6,\ 2)$，$(6,\ 2,\ 3)$，$(6,\ 3,\ 2)$，$(2,\ 4,\ 4)$，
$(4,\ 2,\ 4)$，$(4,\ 4,\ 2)$，$(3,\ 3,\ 3)$

12　$abc_{(5)}$ は3桁の5進数であるから　$1 \leqq a \leqq 4$，$0 \leqq b \leqq 4$，$0 \leqq c \leqq 4$

$cab_{(7)}$ は3桁の7進数であるから　$1 \leqq c \leqq 6$，$0 \leqq a \leqq 6$，$0 \leqq b \leqq 6$

よって　$1 \leqq a \leqq 4$，$0 \leqq b \leqq 4$，$1 \leqq c \leqq 4$　…… ①

N を10進法で表すと

$$N = abc_{(5)} = a \cdot 5^2 + b \cdot 5^1 + c \cdot 5^0 = 25a + 5b + c$$

$$N = cab_{(7)} = c \cdot 7^2 + a \cdot 7^1 + b \cdot 7^0 = 49c + 7a + b$$

よって　$25a + 5b + c = 49c + 7a + b$

整理すると　$9a + 2b = 24c$　…… ②

ここで，① から

$$24c = 9a + 2b \leqq 9 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 44$$

ゆえに　$c \leqq \dfrac{11}{6} = 1.8\cdots\cdots$

よって，① から　$c = 1$

② に代入すると　$9a + 2b = 24$

これと ① を満たす整数 a，b は　$a = 2$，$b = 3$

したがって　$a = 2$，$b = 3$，$c = 1$

また　$N = 25 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 1 = 66$

13　1から100までの自然数うち

2の倍数の個数は，100を2で割った商で　50

2^2 の倍数の個数は，100を 2^2 で割った商で　25

2^3 の倍数の個数は，100を 2^3 で割った商で　12

2^4 の倍数の個数は，100を 2^4 で割った商で　6

2^5 の倍数の個数は，100を 2^5 で割った商で　3

2^6 の倍数の個数は，100を 2^6 で割った商で　1

$100 < 2^7$ であるから，2^n $(n \geqq 7)$ の倍数はない。

よって　$a = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$

次に，1から100までの自然数のうち，

3の倍数の個数は，100を3で割った商で　33

3^2 の倍数の個数は，100を 3^2 で割った商で　11

3^3 の倍数の個数は，100を 3^3 で割った商で　3

3^4 の倍数の個数は，100を 3^4 で割った商で　1

$100 < 3^5$ であるから，3^n $(n \geqq 5)$ の倍数はない。

よって　$b=33+11+3+1=48$

更に，1 から 100 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は，100 を 5 で割った商で　20

5^2 の倍数の個数は，100 を 5^2 で割った商で　4

$100<5^3$ であるから，5^n $(n\geqq 3)$ の倍数はない。

よって　$c=20+4=24$

14 与えられた等式から　$pqr(2p-q)(p+10q)=3\times 7\times 11\times 13\times 37$　……①

p，q，r は素数であるから，3，7，11，13，37 のいずれかである。

また，$2p-q\geqq 1$ であることがわかる。

もし $2p-q=1$ であるとすると，これを満たすのは $p=7$，$q=13$ のときだけである。

このとき $p+10q=137$ となり，① を満たさない。

よって，$2p-q$ は 3，7，11，13，37 のいずれかであり，更に，

$p+10q\geqq 7+10\cdot 3=37$ であるから　$p+10q=37$

これを満たすのは　$p=$ ア 7，$q=$ イ 3

このとき，$2p-q=11$ であるから　$r=$ ウ 13