BASIC＋STANDARD問題

1 次の関数の増減，グラフの凹凸を調べてグラフの概形をかけ。

$$y=3x^4-16x^3+18x^2+8$$

2 関数 $f(x)=x-2\sqrt{x}$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフをかけ.

3 $0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，関数 $y=x-\sqrt{2}\sin x$ の増減，グラフの凹凸を調べてグラフの概形をかけ。

4 関数 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ のグラフをかけ。

5 関数 $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$ のグラフの概形をかけ。

6 次の関数のグラフの概形をかけ。 $y=x-1+\sqrt{1-x^2}$

7 関数 $y=x\sqrt{8-x^2}$ のグラフの概形をかけ。

8 関数 $y=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ のグラフの概形を描け.

9 関数 $f(x)=(x-1)^2e^{-x}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$ を用いよ。

実戦問題

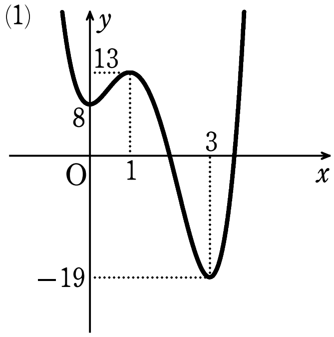
10 関数 $f(x)=\log\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)-\sqrt{1-x^2}-\log x$ $(0<x<1)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

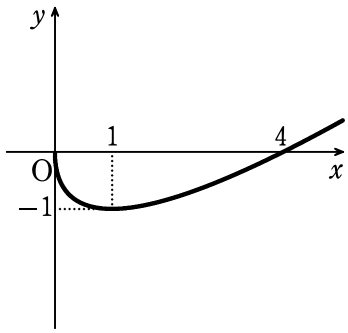
(3) 曲線 $y=f(x)$ 上を動く点をPとする。点Qは，曲線 $y=f(x)$ のPにおける接線上にあり，Pとの距離が1で，その x 座標がPの x 座標より小さいものとする。Qの軌跡を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　(1)〔図〕　(2)〔図〕

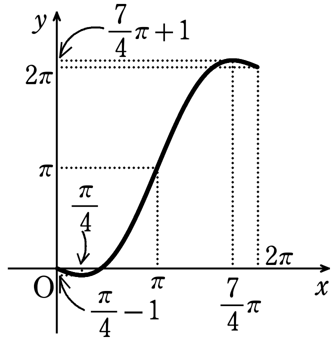


$\boxed{2}$

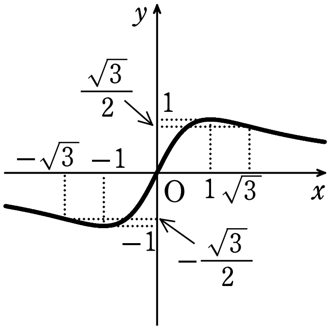
解答〔図〕



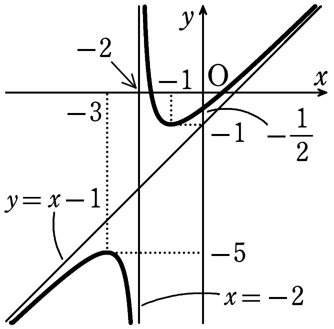
$\boxed{3}$ 解答〔図〕



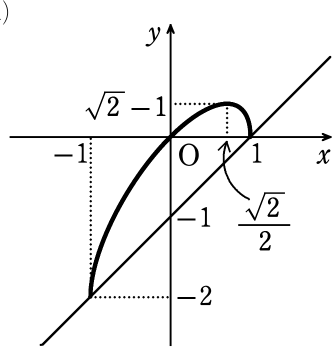
$\boxed{4}$ 解答



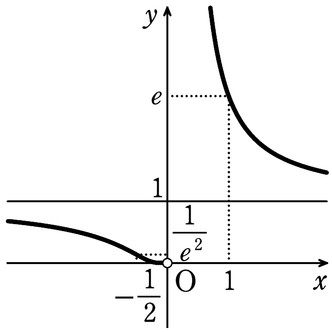
$\boxed{5}$ 解答



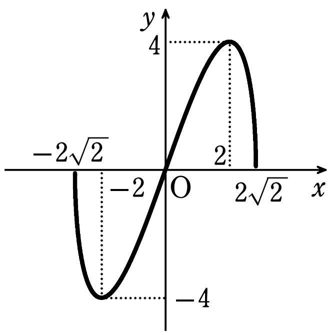
$\boxed{6}$ 解答　(1)



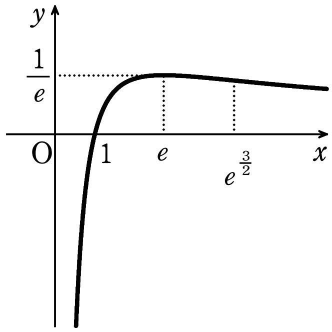
(2)



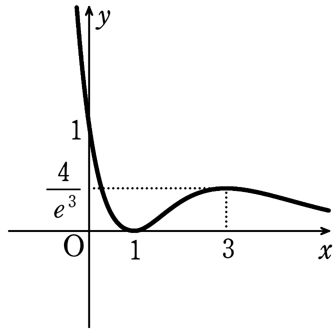
$\boxed{7}$ 解答



8　解答　〔図〕



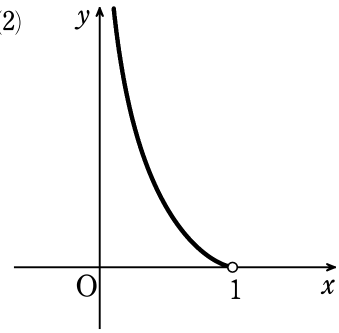
9　解答　(1)　$x=3$ で極大値 $\dfrac{4}{e^3}$，$x=1$ で極小値 0　　(2)



10　解答　(1)　$f'(x)=-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$　　(2)　〔図〕

(3)　直線 $x=0$ の $y>0$ の部分

(2)



1　(1)　$y'=12x^3-48x^2+36x=12x(x-1)(x-3)$

$y''=36x^2-96x+36=12(3x^2-8x+3)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 1,\ 3$

$y''=0$ とすると　　$3x^2-8x+3=0$

よって　　$x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-3\cdot 3}}{3}=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$

y'，y'' の符号を調べて，この関数の増減，グラフの凹凸を表にすると次のようにな

る。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	↘	極小	↗

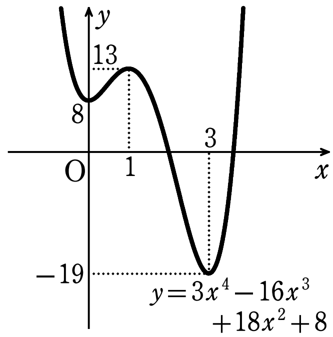
ゆえに，y は

$x=0$ で極小値 8,

$x=1$ で極大値 13,

$x=3$ で極小値 -19 をとる。

よって，グラフの概形は右図のようになる。

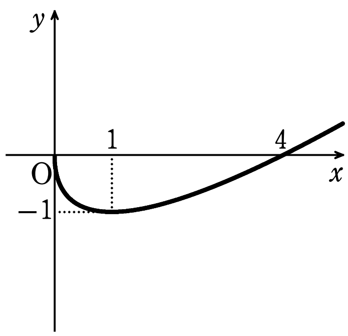


$\boxed{2}$ $f(x)=x-2\sqrt{x}$，$f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$f'(x)$ とすると $x=1$　また $x\geqq 0$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$



$\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x)=-\infty$

また，曲線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標を求めると $x-2\sqrt{x}=0$　　$x=2\sqrt{x}$

両辺を平方して $x^2=4x$　　よって　$x=0, 4$

以上により，$y=f(x)$ のグラフは，上の図のようになる．

$\boxed{3}$　　$y'=1-\sqrt{2}\cos x$，$y''=\sqrt{2}\sin x$

$y'=0$ とすると　　$\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　　よって　　$x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{7}{4}\pi$

$y''=0$ とすると　　$\sin x=0$　　　よって　　$x=0$，π，2π

y'，y'' の符号を調べて，この関数の増減，グラフの凹凸を表にすると，次のようになる。

x	0	……	$\dfrac{\pi}{4}$	……	π	……	$\dfrac{7}{4}\pi$	……	2π
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y	0	↘	極小	↗	変曲点 π	↗	極大	↘	2π

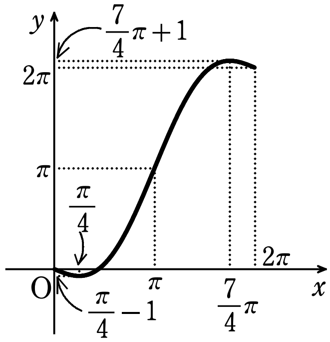
ゆえに，y は

$x=\dfrac{\pi}{4}$ で極小値 $\dfrac{\pi}{4}-1$，

$x=\dfrac{7}{4}\pi$ で極大値 $\dfrac{7}{4}\pi+1$

をとる。

以上から，グラフの概形は右図のようになる。



$\boxed{4}$ $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ の定義域は実数全体である。

また，　$y'=\dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$，$y''=\dfrac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

であるから

$y'=0$ となる x の値は　$x=\pm1$

$y''=0$ となる x の値は　$x=0$，$\pm\sqrt{3}$

よって，y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

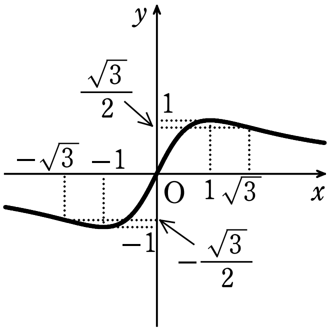
x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↘	変曲点 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↘	極小 -1	↗	変曲点 0	↗	極大 1	↘	変曲点 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↘

ここで,

$$\lim_{x\to\infty} y=0,\qquad \lim_{x\to-\infty} y=0$$

であるから，x 軸はこの曲線の漸近線である。

以上から，曲線の概形は図のようになる。



$\boxed{5}$ この関数の定義域は $x\neq-2$ である。

$y=x-1+\dfrac{1}{x+2}$ であるから　　$y'=1-\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$，$y''=\dfrac{2}{(x+2)^3}$

$y'=0$ となる x の値は　$x=-1,\ -3$　　$y''=0$ となる x の値は存在しない。

よって，増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
y	↗	極大 -5	↘		↘	極小 -1	↗

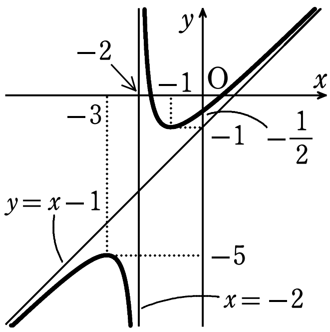
また，$\displaystyle\lim_{x\to-2+0} y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-2-0} y=-\infty$ であるから，

直線 $x=-2$ はこの曲線の漸近線である。

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{y-(x-1)\}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{y-(x-1)\}=0$

であるから，直線 $y=x-1$ もこの曲線の漸近線である。

以上から，この関数のグラフの概形は右の図のようになる。



$\boxed{6}$ (1)　$1-x^2\geqq0$ であるから，定義域は　　$-1\leqq x\leqq1$

$-1<x<1$ のとき

$$y'=1+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y''=-\frac{1\cdot\sqrt{1-x^2}-x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$y'=0$ とすると　　$\sqrt{1-x^2}=x$

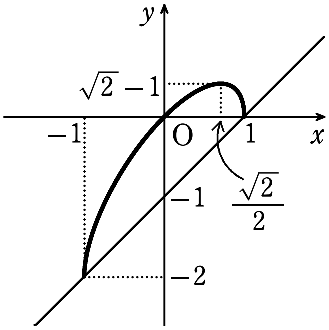
$\sqrt{1-x^2}>0$ であるから　　$x>0$

両辺を 2 乗して　　$1-x^2=x^2$　　　　すなわち　　$2x^2=1$

$x>0$ であるから　　$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	
y	-2	↗	$\sqrt{2}-1$	↘	0



また　　$\displaystyle\lim_{x\to-1+0} y'=\lim_{x\to-1+0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to1-0} y'=\lim_{x\to1-0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=-\infty$

よって，グラフは〔図〕。

$\boxed{7}$　$8-x^2\geqq0$ であるから，定義域は　　$-2\sqrt{2}\leqq x\leqq2\sqrt{2}$

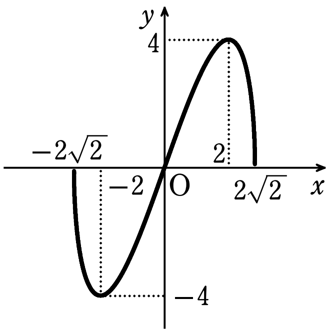
$-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$ のとき　　$y'=\sqrt{8-x^2}+x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}=\dfrac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}}$，

$$y''=\frac{-4x\sqrt{8-x^2}-2(4-x^2)\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}}{8-x^2}=\frac{2x(x^2-12)}{(8-x^2)\sqrt{8-x^2}}$$

$-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$ で　　$y'=0$ とすると　$x=\pm2$，　$y''=0$ とすると　$x=0$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

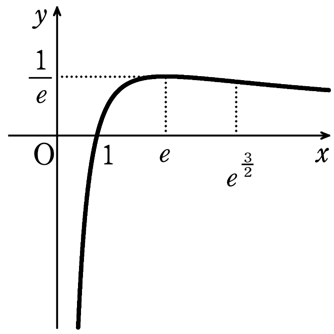
x	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y	0	↘	-4	↗	0	↗	4	↘	0



また　　$\displaystyle\lim_{x\to-2\sqrt{2}+0} y'=-\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to2\sqrt{2}-0} y'=-\infty$

よって，グラフは〔図〕

$\boxed{8}$ $y=\dfrac{\log x}{x},\ y'=\dfrac{1-\log x}{x^2},\ y''=\dfrac{2\log x-3}{x^3}$



$y=0$ とおくと　$\log x=0$ から　$x=1$

$y'=0$ とおくと　$1-\log x=0$ から　$x=e$

$y''=0$ とおくと　$2\log x-3=0$ から　$x=e^{\frac{3}{2}}$

$x=e$ のとき $y=\dfrac{1}{e}$, $x=e^{\frac{3}{2}}$ のとき $y=\dfrac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}y=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0,$

$x>1$ で $y>0$　よって，グラフは図 のようになる．

$\boxed{9}$ $f(x)=(x-1)^2e^{-x}$，$f'(x)=2(x-1)e^{-x}+(x-1)^2\cdot(-e^{-x})$

$$=(x-1)(2-x+1)e^{-x}$$

$$=-(x-1)(x-3)e^{-x}$$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって，$f(x)$ は $x=3$ で極大値 $\dfrac{4}{e^3}$，$x=1$ で極小値 0 をとる。

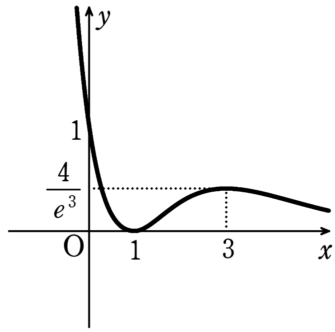
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 0	↗	極大 $\dfrac{4}{e^3}$	↘

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-1)^2e^{-x}=\lim_{x\to\infty}(x-1)^2e^{-(x-1)}\cdot e^{-1}$

$$=0\cdot e^{-1}=0$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)^2e^{-x}=\infty$

$y=f(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。



$\boxed{10}$ (1)　$f'(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{x}$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}=\frac{x\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{x\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}-\frac{1}{x}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

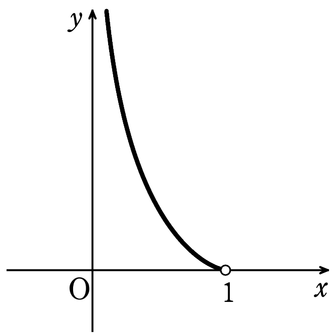
(2)　(1) から，$0<x<1$ において　$f'(x)<0$

よって，$y=f(x)$ は $0<x<1$ で単調に減少する。

また　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x=-\infty$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$

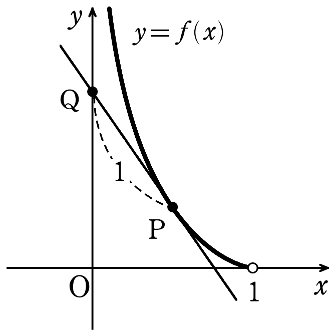
したがって，グラフの概形は右の図のようになる。



(3)　点 P の座標を $(t,\ f(t))$ $(0<t<1)$ とすると，曲線 $y=f(x)$ の点 P における接線の傾きは

$$f'(t)=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は $\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right)$ に平行で，大きさが 1 であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$
$$=(t,\ f(t))+\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+\left(\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right)^2}}\left(-1,\ \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right)$$
$$=\left(t,\ \log\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)-\sqrt{1-t^2}-\log t\right)+\left(-t,\ \sqrt{1-t^2}\right)$$
$$=\left(0,\ \log\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)-\log t\right)$$

ゆえに，点 Q は y 軸上を動く。

$g(t)=\log\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)-\log t$ $(0<t<1)$ とおく。

$0<t<1$ において，$\log\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)$，$-\log t$ はともに減少関数であるから，$g(t)$ は減少関数である。

また　$\displaystyle\lim_{t\to+0}g(t)=\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to1-0}g(t)=0$

よって，$g(t)$ のとりうる値の範囲は　$g(t)>0$

以上から，求める点 Q の軌跡は　直線 $x=0$ の $y>0$ の部分