数学②　第５回試練　数Ⅱの微分

BASIC問題

1 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-4}\frac{x^3+4x^2+2x+8}{x^2+x-12}$ を求めよ。

(2) $f(x)=x^4-2x^3+1$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ を求めよ。

2 関数 $y=x^3+3x^2$ のグラフについて，傾きが 9 であるような接線の方程式を求めよ。

3 関数 $y=x^3+2$ のグラフに点 C(0，4) から引いた接線の方程式を求めよ。

4 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=-3x^4+16x^3-18x^2$

(2) $y=x^4-6x^2-8x+10$

5 曲線 $y=3x^3-7x$ と直線 $y=2x-a$ の共有点の個数を求めよ。ただし，a は定数とする。

STANDARD問題

6 次の関数を，変数 t で微分せよ。ただし，t 以外の文字 V_0，β，h，v_0，g は定数である。

(1) $V=V_0(1+\beta t)$　　(2) $s=h+v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$

7 曲線 $y=x^3$ 上の点 P$(t,\ t^3)$ $[t\fallingdotseq 0]$ における接線が x 軸，y 軸およびこの曲線と再び交わる点を，それぞれ Q，R，S とする。

(1) S の x 座標を t で表せ。　　(2) QR：RS を求めよ。

8 関数 $f(x)=x^3+ax^2+12x+3$ が常に増加するように，定数 a の値の範囲を定めよ。

9 2 つの曲線 $y=x^3+ax^2$ と $y=x^2+bx+c$ が点 (2，4) において，共通の接線をもつとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

10 2 つの放物線 C_1：$y=x^2+1$，C_2：$y=-2x^2+4x-3$ の共通接線の方程式を求めよ。

11 $x^2+2y^2=4$ のとき，$x(x+4y^2)$ の最大値，最小値を求めよ。

12 曲線 $y=x^3-3x$ を C とする。曲線 C に点 A$(-2,\ k)$ から異なる 3 本の接線が引けるような定数 k の値の範囲を求めよ。

13 k を定数とする。3 次方程式 $x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x-k=0$ が異なる 3 つの実数解 α，β，γ (ただし $\alpha<\beta<\gamma$) をもつとき，次の問いに答えよ。

(1) k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) α，β，γ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $\alpha\gamma$ が最小となるときの k の値と，そのときの $\alpha\gamma$ の最小値を求めよ。

実戦問題

14　関数 $f(x)=x^3-3x^2+3ax+b$ (a，b は定数) について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極大値と極小値の差が 32 となるとき，a の値を求めよ。

(3)　(2) で求めた a の値に対し，$f(x)$ の区間 $-4 \leqq x \leqq 4$ における最大値が 5 であるとする。このとき，b の値とこの区間での $f(x)$ の最小値 m を求めよ。

15　a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする。区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。M の最小値とそのときの a の値を求めよ。

16　a は定数とする。関数 $f(x)=-x^3+3ax$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

1　解答　(1)　$-\dfrac{18}{7}$　　(2)　8

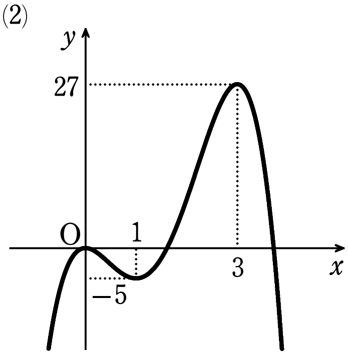
2　解答　$y=9x+27$，$y=9x-5$

3　解答　$y=3x+4$

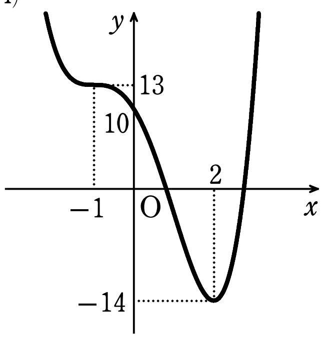
4　解答　(1)　$x=0$ で極大値 0，$x=1$ で極小値 -5，$x=3$ で極大値 27 〔図〕

(2)　$x=2$ で極小値 -14 〔図〕

(2)



(4)



5　解答　$a<-6$，$6<a$ のとき 1 個；$a=-6$，6 のとき 2 個；$-6<a<6$ のとき 3 個

6　解答　(1)　$\dfrac{dV}{dt}=V_0\beta$　　(2)　$\dfrac{ds}{dt}=v_0-gt$

7　解答　(1)　$-2t$　　(2)　1：3

8　解答　$-6\leqq a\leqq 6$

9　解答　$a=-1$，$b=4$，$c=-8$

10　解答　$y=4x-3$，$y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{9}$

11　解答　$x=\dfrac{4}{3}$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ で最大値 $\dfrac{208}{27}$；$x=-1$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ で最小値 -5

12　解答　$-2<k<6$

13　解答　(1)　$-10<k<\dfrac{7}{2}$　　(2)　$-\dfrac{5}{2}<\alpha<-1$，$-1<\beta<2$，$2<\gamma<\dfrac{7}{2}$

(3)　$k=-\dfrac{315}{64}$ で最小値 $-\dfrac{105}{16}$

14　解答　(1)　$a<1$　　(2)　$a=-3$　　(3)　$b=0$，$m=-76$

15　解答　$a=\dfrac{1}{4}$ で最小値 $\dfrac{1}{4}$

16　解答　$a\leqq 0$ のとき　　$x=0$ で最大値 0，

$0<a<1$ のとき　$x=\sqrt{a}$ で最大値 $2a\sqrt{a}$，

$1\leqq a$ のとき　　$x=1$ で最大値 $3a-1$

$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to-4}\frac{x^3+4x^2+2x+8}{x^2+x-12}=\lim_{x\to-4}\frac{x^2(x+4)+2(x+4)}{(x+4)(x-3)}=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)(x^2+2)}{(x+4)(x-3)}$

$$=\lim_{x\to-4}\frac{x^2+2}{x-3}=-\frac{18}{7}$$

(2) $f'(x)=4x^3-6x^2$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=4\cdot2^3-6\cdot2^2=8$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^4-2x^3+1-(2^4-2\cdot2^3+1)}{x-2}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^3(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x^3=8$$

$\boxed{2}$ $y=x^3+3x^2$ を微分すると　$y'=3x^2+6x$

接点の座標を $(a,\ a^3+3a^2)$ とすると，接線の傾きは $3a^2+6a$ であるから

$3a^2+6a=9$　　これを解くと　$a=-3,\ 1$

したがって，接点の座標は $(-3,\ 0)$，$(1,\ 4)$ であるから，求める接線の方程式は

$y-0=9\{x-(-3)\}$，$y-4=9(x-1)$

すなわち　$y=9x+27$，$y=9x-5$

$\boxed{3}$ $y=x^3+2$ を微分すると　$y'=3x^2$

接点の座標を $(a,\ a^3+2)$ とすると，接線の方程式は　$y-(a^3+2)=3a^2(x-a)$

すなわち　$y=3a^2x-2a^3+2$　……①

この直線が点 C$(0,\ 4)$ を通るから　$4=-2a^3+2$

式を整理して　$a^3=-1$　　a は実数であるから　$a=-1$

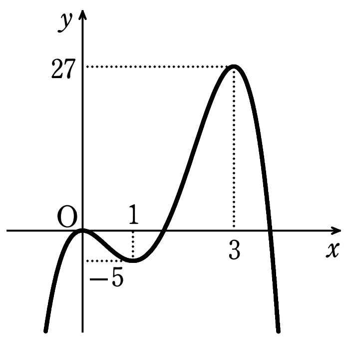
したがって，接線の方程式は，① より　$y=3x+4$

$\boxed{4}$ (1) $y'=-12x^3+48x^2-36x=-12x(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 1,\ 3$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↗	極大 0	↘	極小 -5	↗	極大 27	↘



よって，$x=0$ で極大値 0，　$x=1$ で極小値 -5，

$x=3$ で極大値 27　をとる。

グラフは〔図〕のようになる。

(2)　$y'=4x^3-12x-8=4(x^3-3x-2)$

ここで，$g(x)=x^3-3x-2$ とすると　$g(-1)=0$

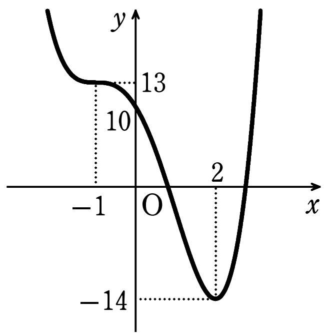
よって，$g(x)$ は $x+1$ で割り切れて

$$g(x)=(x+1)(x^2-x-2)=(x+1)^2(x-2)$$

ゆえに　$y'=4(x+1)^2(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

y の増減表は次のようになる。



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	13	↘	極小 -14	↗

よって，$x=2$ で極小値 -14 をとる。

グラフは〔図〕のようになる。

5　曲線 $y=3x^3-7x$ と直線 $y=2x-a$ の共有点の x 座標は，

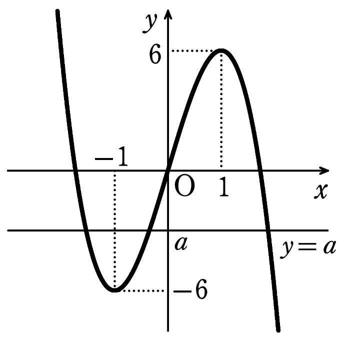
方程式 $3x^3-7x=2x-a$ すなわち $-3x^3+9x=a$ の実数解である。

$f(x)=-3x^3+9x$ とおくと　$f'(x)=-9x^2+9=-9(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 -6	↗	極大 6	↘



よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

与えられた曲線と直線の共有点の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に一致する。

したがって　$a<-6,\ 6<a$ のとき１個；

$a=-6,\ 6$　のとき２個；

$-6<a<6$　のとき３個

6　(1)　$V=V_0+V_0\beta t$ であるから

$$\frac{dV}{dt}=(V_0)'+V_0\beta(t)'=0+V_0\beta\cdot1=V_0\beta$$

(2)　$$\frac{ds}{dt}=(h)'+v_0(t)'-\frac{1}{2}g(t^2)'=0+v_0\cdot1-\frac{1}{2}g\cdot2t=v_0-gt$$

7　(1)　$y=x^3$ を微分すると　$y'=3x^2$

点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における，曲線の接線の方程式は

$$y-t^3=3t^2(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=3t^2x-2t^3 \quad \cdots\cdots ①$$

よって，点Sの x 座標は，方程式 $x^3=3t^2x-2t^3$ ……② の t 以外の解である。

②から　$x^3-3t^2x+2t^3=0$　　左辺を因数分解して　$(x-t)^2(x+2t)=0$

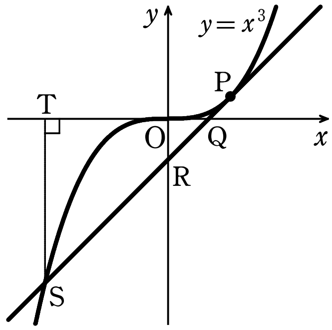
したがって，Sの x 座標は　$x=-2t$

(2)　①で，$y=0$ とすると　$0=3t^2x-2t^3$

すなわち　$t^2(3x-2t)=0$

$t^2 \neq 0$ であるから　$x=\dfrac{2}{3}t$

よって，Qの座標は　$\left(\dfrac{2}{3}t,\ 0\right)$



Sから x 軸に下ろした垂線をSTとすると，Tの座標は　$(-2t,\ 0)$

OR∥TSであるから　QR：RS＝OQ：OT

$\mathrm{OQ}=\left|\dfrac{2}{3}t\right|=\dfrac{2}{3}|t|$，$\mathrm{OT}=|-2t|=2|t|$ であるから

$$\mathrm{QR}:\mathrm{RS}=\frac{2}{3}|t|:2|t|=1:3$$

$\boxed{8}$ $f'(x)=3x^2+2ax+12$

$f(x)$ が常に増加するための条件は

$$f'(x) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 3x^2+2ax+12 \geqq 0$$

が常に成り立つことである。

よって，2次方程式 $3x^2+2ax+12=0$ の判別式 D について　$D \leqq 0$

$\dfrac{D}{4}=a^2-36=(a+6)(a-6)$ であるから　$(a+6)(a-6) \leqq 0$

したがって　$-6 \leqq a \leqq 6$

$\boxed{9}$ $f(x)=x^3+ax^2$，$g(x)=x^2+bx+c$ とすると

$$f'(x)=3x^2+2ax, \quad g'(x)=2x+b$$

2つの曲線はともに点 $(2,\ 4)$ を通るから　$f(2)=4$　$g(2)=4$

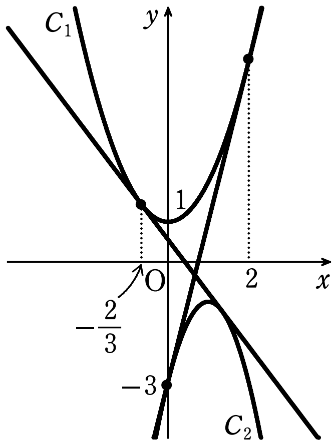
よって　$8+4a=4$　……①

$4+2b+c=4$　……②

また，点 $(2,\ 4)$ において，共通の接線をもつから　$f'(2)=g'(2)$

よって　$12+4a=4+b$　……③

①，②，③を解いて　$a=-1$，$b=4$，$c=-8$



10 [解法 1]　$y=x^2+1$ から　　$y'=2x$

C_1 上の点 $(a,\ a^2+1)$ における接線の方程式は

$$y-(a^2+1)=2a(x-a)$$

すなわち　　$y=2ax-a^2+1$　……①

直線①が C_2 に接するための条件は，y を消去した x の 2 次方程式

$$-2x^2+4x-3=2ax-a^2+1$$

すなわち　　$2x^2+2(a-2)x+(4-a^2)=0$

が重解をもつことである。

よって，この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-2(4-a^2)=0$$

ゆえに　　$3a^2-4a-4=0$　　　　よって　　$(a-2)(3a+2)=0$

これを解くと　　$a=2,\ -\frac{2}{3}$

①から，求める方程式は

$a=2$ のとき　　　$y=4x-3$，

$a=-\frac{2}{3}$ のとき　　$y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{9}$

[解法 2]　([解法 1] と 4 行目まで同じ)

$y=-2x^2+4x-3$ から　　$y'=-4x+4$

C_2 上の点 $(b,\ -2b^2+4b-3)$ における接線の方程式は

$$y-(-2b^2+4b-3)=(-4b+4)(x-b)$$

すなわち　　$y=(-4b+4)x+2b^2-3$　……②

①と②が一致するための条件は

$2a=-4b+4$ ……③　かつ　$-a^2+1=2b^2-3$ ……④

③から　　$a=-2(b-1)$

④に代入して　　$-4(b^2-2b+1)+1=2b^2-3$

よって　　$-2b(3b-4)=0$　　　　ゆえに　　$b=0,\ \frac{4}{3}$

②から，求める方程式は

$b=0$ のとき　　$y=4x-3$，

$b=\frac{4}{3}$ のとき　　$y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{9}$

11　$x^2+2y^2=4$ から　　$2y^2=4-x^2$　……①

よって　　$x(x+4y^2)=x\{x+2(4-x^2)\}=x(-2x^2+x+8)=-2x^3+x^2+8x$

ここで，$2y^2 \geqq 0$ であるから　$4-x^2 \geqq 0$　ゆえに　$-2 \leqq x \leqq 2$　……②

$f(x)=-2x^3+x^2+8x$ とおくと　$f'(x)=-6x^2+2x+8=-2(x+1)(3x-4)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ \frac{4}{3}$

② の範囲において，$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$\frac{208}{27}$	$\searrow$	4

よって，$f(x)$ は $x=\frac{4}{3}$ で最大値 $\frac{208}{27}$，$x=-1$ で最小値 -5 をとる。

$x=\frac{4}{3}$ のとき，① から　$2y^2=\frac{20}{9}$　よって　$y=\pm\frac{\sqrt{10}}{3}$

$x=-1$ のとき，① から　$2y^2=3$　よって　$y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

したがって　$x=\frac{4}{3}$，$y=\pm\frac{\sqrt{10}}{3}$ で最大値 $\frac{208}{27}$；

$x=-1$，$y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ で最小値 -5

12　$y=x^3-3x$ から　$y'=3x^2-3$

よって，曲線 C 上の点 $(t,\ t^3-3t)$ における接線の方程式は

$$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$$

すなわち　$y=3(t^2-1)x-2t^3$

このの接線が点 A $(-2,\ k)$ を通るから

$$k=3(t^2-1)\cdot(-2)-2t^3$$

すなわち　$-2t^3-6t^2+6=k$　……①

ここで，3 次関数のグラフにおいて，接点の x 座標が異なれば接線も異なる。

よって，点 A から曲線 C に異なる 3 本の接線が引けるための条件は，曲線 C 上の接点が 3 つ存在することであり，これは，t についての 3 次方程式 ① が異なる 3 つの実数解をもつことと同値である。

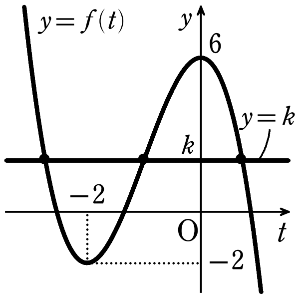
ゆえに，① の左辺を $f(t)$ とおくと，求める条件は，$y=f(t)$ のグラフと直線 $y=k$ が異なる 3 個の共有点をもつことである。

ここで　$f'(t)=-6t^2-12t=-6(t+2)t$

$f'(t)=0$ とすると　$t=-2,\ 0$

よって，$f(t)$ の増減表は次のようになり，$y=f(t)$ のグラフは右下のようになる。

t	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	極小 -2	$\nearrow$	極大 6	$\searrow$



グラフより，求める k の値の範囲は

$$-2<k<6$$

13 (1)　$x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x-k=0$ から　　$x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x=k$

この方程式の実数解の個数は，$y=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数に一致する。

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x$ とすると

$$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-1,\ 2$

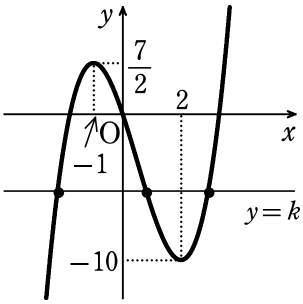
$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{7}{2}$	$\searrow$	-10	$\nearrow$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

ゆえに，直線 $y=k$ との共有点の個数がちょうど3個となる k の値の範囲は

$$-10<k<\frac{7}{2}$$



(2)　[1]　$k=-10$ のとき

方程式は　　$x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+10=0$　　よって　　$2x^3-3x^2-12x+20=0$

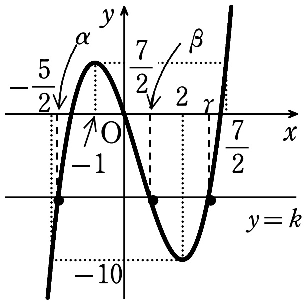
すなわち　　$(x-2)^2(2x+5)=0$　　したがって　　$x=-\dfrac{5}{2},\ 2$

[2]　$k=\dfrac{7}{2}$ のとき

方程式は　　$x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x-\dfrac{7}{2}=0$　　よって　　$2x^3-3x^2-12x-7=0$

すなわち　$(x+1)^2(2x-7)=0$

したがって　$x=-1,\ \dfrac{7}{2}$



[1], [2] から，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

ゆえに，k が $-10<k<\dfrac{7}{2}$ の範囲を動くとき

$$-\frac{5}{2}<\alpha<-1,\ -1<\beta<2,\ 2<\gamma<\frac{7}{2}$$

(3)　解と係数の関係により

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}\ \cdots\cdots ①,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-6\ \cdots\cdots ②,\quad \alpha\beta\gamma=k\ \cdots\cdots ③$$

①，② から　$\alpha\gamma=-6-\beta(\alpha+\gamma)=-6-\beta\left(\dfrac{3}{2}-\beta\right)=\beta^2-\dfrac{3}{2}\beta-6=\left(\beta-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{105}{16}$

(2) より，$-1<\beta<2$ であるから，$\alpha\gamma$ は $\beta=\dfrac{3}{4}$ で最小値 $-\dfrac{105}{16}$ をとる。

このとき，③ から　$k=\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{105}{16}\right)=-\dfrac{315}{64}$

14　(1)　$f(x)$ が極値をもつ条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

$$f'(x)=3x^2-6x+3a=3(x^2-2x+a)$$

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると，$D>0$ であればよいから

$$(-1)^2-1\cdot a=1-a>0\qquad よって\qquad a<1$$

(2)　$f'(x)=0$ の解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$ とすると，$f(x)$ の x^3 の係数が正であるから，$x=\beta$ で極大，$x=\alpha$ で極小となる。

$$\begin{aligned}f(\beta)-f(\alpha)&=(\beta^3-3\beta^2+3a\beta+b)-(\alpha^3-3\alpha^2+3a\alpha+b)\\&=(\beta^3-\alpha^3)-3(\beta^2-\alpha^2)+3a(\beta-\alpha)\\&=(\beta-\alpha)\{(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\beta+\alpha)+3a\}\\&=(\beta-\alpha)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3(\beta+\alpha)+3a\}\end{aligned}$$

ここで，解と係数の関係により　$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=a$

よって　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4a=4(1-a)$

$\beta<\alpha$ より，$\beta-\alpha<0$ であるから　$\beta-\alpha=-2\sqrt{1-a}$

ゆえに　$f(\beta)-f(\alpha)=-2\sqrt{1-a}\,(2^2-a-3\cdot2+3a)$

$$=-4\sqrt{1-a}\,(a-1)=4(\sqrt{1-a}\,)^3$$

$f(\beta)-f(\alpha)=32$ であるから　$4(\sqrt{1-a}\,)^3=32$　すなわち　$(\sqrt{1-a}\,)^3=8$

したがって　$\sqrt{1-a}=2$　$1-a=4$ から　$a=-3$　これは $a<1$ を満たす。

別解　($f(\beta)-f(\alpha)$ の計算)

(解 1)　$x=\alpha,\ \beta$ は，$f'(x)=0$ の解であるから，$x^2-2x+a=0$ を満たす。

$$
\begin{array}{r}
x-1 \\
x^2-2x+a \,\big)\, \overline{x^3-3x^2+3ax+b} \\
x^3-2x^2+ax \\
\hline
-x^2+2ax+b \\
-x^2+2x-a \\
\hline
2(a-1)x+a+b
\end{array}
$$

上の計算から　　$f(x)=(x^2-2x+a)(x-1)+2(a-1)x+a+b$

よって　　$f(\alpha)=2(a-1)\alpha+a+b$

$f(\beta)=2(a-1)\beta+a+b$

したがって　　$f(\beta)-f(\alpha)=2(a-1)(\beta-\alpha)=2(a-1)(-2\sqrt{1-a})$

$=4(\sqrt{1-a})^3$

(解 2)　$f(\beta)-f(\alpha)=\Big[f(x)\Big]_\alpha^\beta=\displaystyle\int_\alpha^\beta f'(x)dx=\int_\alpha^\beta 3(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=-\dfrac{3}{6}(\beta-\alpha)^3=-\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=-\dfrac{1}{2}(-2\sqrt{1-a})^3=4(\sqrt{1-a})^3$

(3)　$f(x)=x^3-3x^2-9x+b$ から　　$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-1$，3

$-4\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$b-76$	$\nearrow$	$b+5$	$\searrow$	$b-27$	$\nearrow$	$b-20$

よって，$f(x)$ は　$x=-1$ のとき最大値 $b+5$，

$x=-4$ のとき最小値 $b-76$　をとる。

したがって，$b+5=5$ から　　$b=0$　　　このとき　　$m=b-76=-76$

15　$f(-x)=-f(x)$ が成り立つから，$g(x)=|f(x)|$ とおくと

$g(-x)=|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|=g(x)$

よって，$g(x)$ は偶関数である。

ゆえに，区間 $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で最大値 M を考えればよい。

$f(x)=x^3-3ax$ から　　$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$

[1]　$a\leqq 0$ のとき

常に $f'(x)\geqq 0$ であるから，$f(x)$ は増加関数である。

また，$f(0)=0$ であるから，$0\leqq x\leqq 1$ において　　$f(x)\geqq 0$

よって　　$M=f(1)=1-3a$

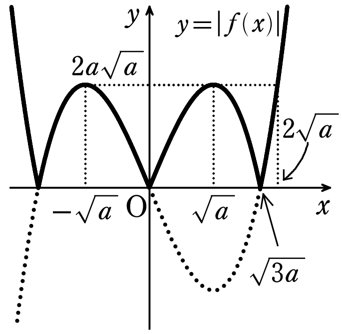
［2］ $a>0$ のとき

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm\sqrt{a}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

ゆえに，$y=|f(x)|$ のグラフは右の図のようになる。



$|f(\sqrt{a})|=2a\sqrt{a}$ であるから，$f(x)=2a\sqrt{a}$ となる x を求めると，$x^3-3ax=2a\sqrt{a}$ より

$$(x+\sqrt{a})^2(x-2\sqrt{a})=0$$

よって　　$x=-\sqrt{a}$，$2\sqrt{a}$

$x>0$ であるものは　　$x=2\sqrt{a}$

(i)　$0<2\sqrt{a}\leqq 1$ すなわち $0<a\leqq\dfrac{1}{4}$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$|f(x)|\leqq|f(1)|$ であるから　　$M=|f(1)|=1-3a$

(ii)　$\sqrt{a}\leqq 1<2\sqrt{a}$ すなわち $\dfrac{1}{4}<a\leqq 1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$|f(x)|\leqq|f(\sqrt{a})|$ であるから　　$M=|f(\sqrt{a})|=2a\sqrt{a}$

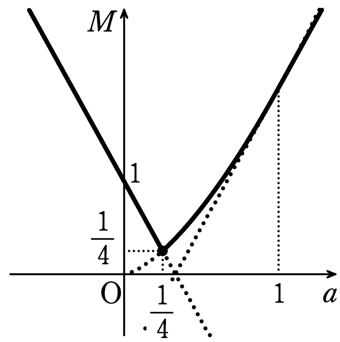
(iii)　$1<\sqrt{a}$ すなわち $1<a$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$|f(x)|\leqq|f(1)|$ であるから　　$M=|f(1)|=3a-1$

以上から　　$M=\begin{cases}1-3a & \left(a<\dfrac{1}{4}\right)\\ 2a\sqrt{a} & \left(\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq 1\right)\\ 3a-1 & (1<a)\end{cases}$

したがって，M は $a\leqq\dfrac{1}{4}$ では減少し，$a\geqq\dfrac{1}{4}$ では増加するから，$a=\dfrac{1}{4}$ で最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

参考　a の関数 M のグラフは，右の図のようになる。



16 $f'(x)=-3x^2+3a=-3(x^2-a)$

$a \leqq 0$ ならば $f'(x) \leqq 0$ であるから，$f(x)$ は常に減少する。

よって，$f(x)$ は $x=0$ で最大となる。

$a>0$ ならば $f'(x)=-3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$

$f'(x)=0$ とすると $x=\pm\sqrt{a}$

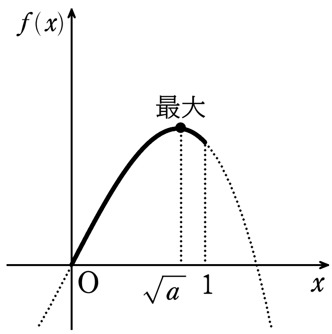
[1] $0<\sqrt{a}<1$ すなわち $0<a<1$ のとき

$0 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$f(x)$ は $x=\sqrt{a}$ で極大かつ最大となる。

[1]

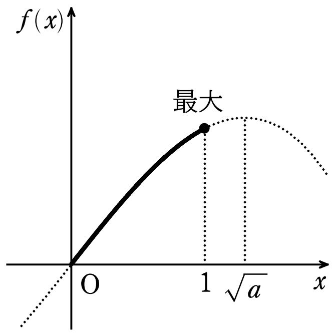


[2] $1 \leqq \sqrt{a}$ すなわち $1 \leqq a$ のとき

$0 \leqq x \leqq 1$ で $f'(x) \geqq 0$ であるから，$f(x)$ は常に増加。

よって，$f(x)$ は $x=1$ で最大となる。

[2]



以上から

$a \leqq 0$ のとき $x=0$ で最大値 0，

$0<a<1$ のとき $x=\sqrt{a}$ で最大値 $2a\sqrt{a}$，

$1 \leqq a$ のとき $x=1$ で最大値 $3a-1$