BASIC問題

1　$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-2$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

2　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2n$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$一般項を求めよ。

4　$a_1=10$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

5　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n-2a_n$ で表されるとき，a_n を n の式で表せ。

STANDARD問題

6　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=16{a_n}^5$$

7　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_2=4$，$a_{n+2}-3a_{n+1}-10a_n=0$

(2)　$a_1=3$，$a_2=8$，$a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$

8　$a_1=1$，$b_1=3$，$a_{n+1}=3a_n+2b_n$，$b_{n+1}=2a_n+3b_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

9　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$ で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

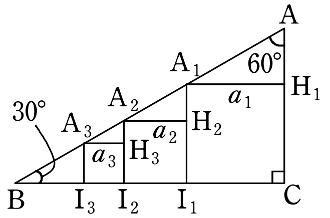
10　漸化式 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-4}{a_n-3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を，$b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ のおき換えを利用して求めよ。

実戦問題

11　$a_1=\dfrac{2}{3}$，$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

12　＊　$a_1=1$，$a_{n+1}=1+a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

13　$A=60°$，$B=30°$，AC$=1$ である直角三角形 ABC 内に，右の図のように，1 辺の長さが a_1，a_2，a_3，$\cdots$ の正方形が並んでいる。

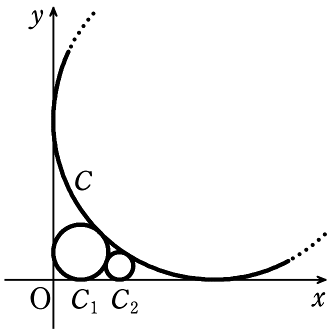


(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　右の図の $\triangle A_1A_2H_2$ と $\triangle ABC$ が相似であることに着目して，一般に a_n，a_{n+1} の間に成り立つ関係式を導け。

(3)　a_n の値を n を用いて表せ。

14　右図のように，xy 平面上の点 $(1,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。x 軸，y 軸の正の部分，円 C と接する円で C より小さいものを C_1 とする。更に，x 軸の正の部分，円 C，円 C_1 と接する円を C_2 とする。以下，順に x 軸の正の部分，円 C，円 C_n と接する円を C_{n+1} とする。また，円 C_n の中心の座標を $(a_n,\ b_n)$ とする。ただし，円 C_{n+1} は円 C_n の右側にあるとする。



(1)　a_1，b_1 をそれぞれ求めよ。

(2)　a_n，a_{n+1} の関係式を求めよ。

(3)　$c_n=\dfrac{1}{1-a_n}$ とおくことにより，数列 $\{a_n\}$ の一般項を n の式で表せ。

1 解答 $2\cdot 3^{n-1}+1$

2 解答 n^2-n+3

3 解答 (1) $a_n=\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}-1}$ (2) $a_n=\dfrac{1}{2\cdot 3^{n-1}-1}$

4 解答 $a_n=2^n(2n+3)$

5 解答 $a_n=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1$

6 解答 $a_n=2^{2\cdot 5^{n-1}-1}$

7 解答 (1) $a_n=\dfrac{1}{7}\{8\cdot 5^{n-1}+6\cdot(-2)^{n-1}\}$ (2) $a_n=4^{n-1}(4-n)$

8 解答 (1) $a_n+b_n=4\cdot 5^{n-1}$，$a_n-b_n=-2$

(2) $a_n=2\cdot 5^{n-1}-1$，$b_n=2\cdot 5^{n-1}+1$

9 解答 (1) $\alpha=-2$，$\beta=-1$ (2) $a_n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$

10 解答 $a_n=2-\dfrac{1}{n}$

11 解答 $a_n=\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$

12 解答 $a_n=n!$

13 解答 (1) $a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，$a_2=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}$ (2) $a_{n+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$

(3) $a_n=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^n$

14 解答 (1) (ア) $3-2\sqrt{2}$ (イ) $3-2\sqrt{2}$ (2) $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}(1-a_n)(1-a_{n+1})$

(3) $a_n=1-\dfrac{2}{n+\sqrt{2}}$

$\boxed{1}$ $a_{n+1}=3a_n-2$

$c=3c-2$ を解くと　$c=1$

漸化式を変形すると　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

$a_n-1=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=3b_n$

また　　$b_1=a_1-1=3-1=2$

数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公比 3 の等比数列であるから　$b_n=2\cdot 3^{n-1}$

よって　　$a_n=b_n+1=2\cdot 3^{n-1}+1$

$\boxed{2}$ 漸化式を変形すると　$a_{n+1}-a_n=2n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n=2n$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}2k=3+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

よって　$a_n=n^2-n+3$　……①

① において $n=1$ を代入すると　$a_1=3$

よって，① は $n=1$ でも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=n^2-n+3$

$\boxed{3}$ (1)　$a_1=\dfrac{1}{2}>0$ であり，漸化式により

$a_1>0$ から　$a_2>0$,　　　$a_2>0$ から　$a_3>0$,　　　…………

一般に，$a_n>0$ が成り立つ。

ゆえに，漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{a_n}\qquad すなわち\qquad \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+1$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=2b_n+1$　……①　　　　また　　$b_1=\dfrac{1}{a_1}=2$

① を変形すると　　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は　　$b_1+1=2+1=3$

ゆえに　　$b_n+1=3\cdot 2^{n-1}$　　すなわち　　$b_n=3\cdot 2^{n-1}-1$

したがって　　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}-1}$

(2)　$a_1=1>0$ であり，漸化式により

$a_1>0$ から　$a_2>0$,　　　$a_2>0$ から　$a_3>0$,　　　…………

一般に，$a_n>0$ が成り立つ。

ゆえに，漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}\qquad すなわち\qquad \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}+2$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=3b_n+2$　……①　　　　また　　$b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$

① を変形すると　　$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は　$b_1+1=1+1=2$

ゆえに　$b_n+1=2\cdot3^{n-1}$　すなわち　$b_n=2\cdot3^{n-1}-1$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{2\cdot3^{n-1}-1}$

$\boxed{4}$ $a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+2$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+2$

また　$b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{10}{2}=5$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5，公差 2 の等差数列であるから

$b_n=5+(n-1)\times2=2n+3$

したがって　$a_n=2^n\cdot b_n=2^n(2n+3)$

$\boxed{5}$ $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\{(n+1)-2a_{n+1}\}-(n-2a_n)=-2a_{n+1}+2a_n+1$

ゆえに　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}$　…… ①　　また，$a_1=S_1=1-2a_1$ から　$a_1=\dfrac{1}{3}$

① を変形すると　$a_{n+1}-1=\dfrac{2}{3}(a_n-1)$

よって，数列 $\{a_n-1\}$ は公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列で，初項は　$a_1-1=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$

したがって　$a_n-1=-\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　すなわち　$a_n=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1$

$\boxed{6}$ $a_1=2>0$ より，漸化式の形からすべての自然数 n について $a_n>0$ である。

漸化式について，両辺の 2 を底とする対数をとると　$\log_2 a_{n+1}=\log_2 16a_n{}^5$

ここで　$\log_2 16a_n{}^5=\log_2(2^4\cdot a_n{}^5)=4+5\log_2 a_n$

よって　$\log_2 a_{n+1}=4+5\log_2 a_n$

$\log_2 a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=4+5b_n$

変形すると　$b_{n+1}+1=5(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は公比 5 の等比数列で，初項は

$$b_1+1=\log_2 a_1+1=\log_2 2+1=1+1=2$$

ゆえに　$b_n+1=2\cdot 5^{n-1}$　　よって　$b_n=2\cdot 5^{n-1}-1$

したがって　$a_n=2^{b_n}=2^{2\cdot 5^{n-1}-1}$

$\boxed{7}$ (1)　$a_{n+2}-3a_{n+1}-10a_n=0$　……①

①から　$a_{n+2}+2a_{n+1}=5(a_{n+1}+2a_n)$　　また　$a_2+2a_1=4+2\cdot 2=8$

よって，数列 $\{a_{n+1}+2a_n\}$ は初項 8，公比 5 の等比数列であるから

$$a_{n+1}+2a_n=8\cdot 5^{n-1} \quad \cdots\cdots ②$$

①から　$a_{n+2}-5a_{n+1}=-2(a_{n+1}-5a_n)$　　また　$a_2-5a_1=4-5\cdot 2=-6$

よって，数列 $\{a_{n+1}-5a_n\}$ は初項 -6，公比 -2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-5a_n=-6\cdot(-2)^{n-1} \quad \cdots\cdots ③$$

②−③ から　$7a_n=8\cdot 5^{n-1}+6\cdot(-2)^{n-1}$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{7}\{8\cdot 5^{n-1}+6\cdot(-2)^{n-1}\}$

(2)　$a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$ を変形すると　$a_{n+2}-4a_{n+1}=4(a_{n+1}-4a_n)$

また　$a_2-4a_1=8-4\cdot 3=-4$

よって，数列 $\{a_{n+1}-4a_n\}$ は初項 -4，公比 4 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-4a_n=-4\cdot 4^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1}-4a_n=-4^n$$

両辺を 4^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{4^{n+1}}-\dfrac{a_n}{4^n}=-\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{a_n}{4^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}-b_n=-\dfrac{1}{4}$　　また　$b_1=\dfrac{a_1}{4}=\dfrac{3}{4}$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\dfrac{3}{4}$，公差 $-\dfrac{1}{4}$ の等差数列であるから

$$b_n=\frac{3}{4}+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{4-n}{4}$$

したがって　$a_n=4^n\cdot b_n=4^{n-1}(4-n)$

$\boxed{8}$ (1)　$a_{n+1}=3a_n+2b_n$　……①，　$b_{n+1}=2a_n+3b_n$　……②　とする。

①+② から　$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$

また　$a_1+b_1=1+3=4$

数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 4，公比 5 の等比数列であるから

$$a_n+b_n=4\cdot 5^{n-1} \quad \cdots\cdots ③$$

①−② から　　$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$

よって　　$a_n-b_n=a_{n-1}-b_{n-1}=\cdots\cdots=a_2-b_2=a_1-b_1$

ここで　　$a_1-b_1=1-3=-2$

ゆえに　　$a_n-b_n=-2$　……④

(2)　③+④ から　　$2a_n=4\cdot5^{n-1}-2$　　よって　　$a_n=2\cdot5^{n-1}-1$

③−④ から　　$2b_n=4\cdot5^{n-1}+2$　　よって　　$b_n=2\cdot5^{n-1}+1$

$\boxed{9}$ (1)　$b_n=a_n-(\alpha n+\beta)$ から　$a_n=b_n+\alpha n+\beta$　……①

$a_{n+1}=3a_n+4n$ と ① から　$b_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=3(b_n+\alpha n+\beta)+4n$

ゆえに　$b_{n+1}=3b_n+2(\alpha+2)n-\alpha+2\beta$

数列 $\{b_n\}$ が等比数列となるための条件は，$2(\alpha+2)n-\alpha+2\beta=0$ が，n の値に関係なく常に成り立つことである。

よって，$\alpha+2=0$，$-\alpha+2\beta=0$ から　$\alpha=-2$，$\beta=-1$

(2)　(1) の結果から，$b_n=a_n+2n+1$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$

ここで，$b_1=a_1+2\cdot1+1=1+2+1=4$ より，数列 $\{b_n\}$ は初項 4，公比 3 の等比数列であるから　$b_n=4\cdot3^{n-1}$　　よって　$a_n=b_n-2n-1=4\cdot3^{n-1}-2n-1$

$\boxed{10}$ $a_{n+1}-2=\dfrac{a_n-4}{a_n-3}-2$ から　$a_{n+1}-2=-\dfrac{a_n-2}{a_n-3}$　……①

ここで，ある自然数 n について $a_{n+1}=2$ と仮定すると，① から　$a_n=2$

ゆえに　$a_{n+1}=a_n=a_{n-1}=\cdots\cdots=a_1=2$

これは条件 $a_1=1$ に反する。　また　$a_1\fallingdotseq 2$

よって，すべての自然数 n について $a_{n+1}\fallingdotseq 2$ であり，① から $a_n\fallingdotseq 2$ である。

ゆえに，① の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}-2}=-\frac{a_n-3}{a_n-2}\qquad\text{よって}\qquad\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{a_n-2}-1$$

ゆえに　$b_{n+1}=b_n-1$　　　また　$b_1=\dfrac{1}{a_1-2}=\dfrac{1}{1-2}=-1$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ は初項 -1，公差 -1 の等差数列であるから

$$b_n=-1+(n-1)\cdot(-1)=-n\qquad\text{したがって}\qquad a_n=2+\frac{1}{b_n}=2-\frac{1}{n}$$

$\boxed{11}$ (解 1)　$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$

$a_{n-1}=\dfrac{n-2}{n+1}a_{n-2}$ であるから　　$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}\cdot\dfrac{n-2}{n+1}a_{n-2}$

これを繰り返して

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+1}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-4}{n-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}a_1$$

よって　　$a_n=\dfrac{3\cdot2\cdot1}{(n+2)(n+1)n}\cdot\dfrac{2}{3}$

すなわち　　$a_n=\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$

(解2)　漸化式の両辺に $n(n+1)(n+2)$ を掛けると

$$n(n+1)(n+2)a_n=(n-1)n(n+1)a_{n-1}$$

したがって

$$n(n+1)(n+2)a_n=(n-1)n(n+1)a_{n-1}=\cdots\cdots=1\cdot2\cdot3a_1=4$$

よって　$a_n=\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$

12　$n\geqq2$ のとき

$$a_{n+1}=1+a_1+2a_2+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n \quad \cdots\cdots①$$

$$a_n=1+a_1+2a_2+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1} \quad \cdots\cdots②$$

①−② から　$a_{n+1}-a_n=na_n$

ゆえに　$a_{n+1}=(n+1)a_n$

両辺を $(n+1)!$ で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{a_n}{n!}$

よって　$\dfrac{a_n}{n!}=\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\cdots\cdots=\dfrac{a_2}{2!}=\dfrac{1+a_1}{2}=1$

ゆえに　$a_n=n!$

また，$a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=n!$

13　(1)　$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{AA_1H_1}$ から　$\mathrm{AC}:\mathrm{AH_1}=\mathrm{BC}:\mathrm{A_1H_1}$

よって　$1:(1-a_1)=\sqrt{3}:a_1$　　よって　$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

同様に，$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{A_1A_2H_2}$ から　$1:(a_1-a_2)=\sqrt{3}:a_2$

$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ から　$a_2=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}$ から　$1:(a_n-a_{n+1})=\sqrt{3}:a_{n+1}$

よって　$a_{n+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$

(3)　(1)，(2) から $\{a_n\}$ は初項 $a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，公比 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ の等比数列であるから

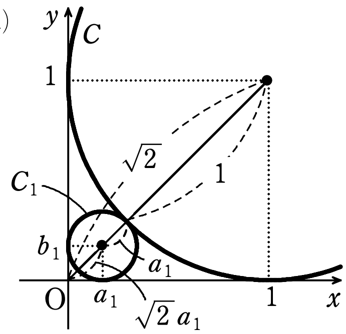
$$a_n=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$\boxed{14}$ (1) $\sqrt{2}a_1+a_1+1=\sqrt{2}$ であるから

$$a_1=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}={}^{ア}3-2\sqrt{2}$$

また　$b_1=a_1={}^{イ}3-2\sqrt{2}$

(1)



(2) 2 円 C，C_n は外接するから

$$\sqrt{(a_n-1)^2+(b_n-1)^2}=b_n+1$$

よって　$(a_n-1)^2+b_n{}^2-2b_n+1$

$$=b_n{}^2+2b_n+1$$

ゆえに　$b_n=\frac{1}{4}(a_n-1)^2$　…… ①

また，2 円 C_n，C_{n+1} は外接するから

$$\sqrt{(a_{n+1}-a_n)^2+(b_{n+1}-b_n)^2}=b_n+b_{n+1}$$

よって　$(a_{n+1}-a_n)^2+b_{n+1}{}^2-2b_{n+1}b_n+b_n{}^2$

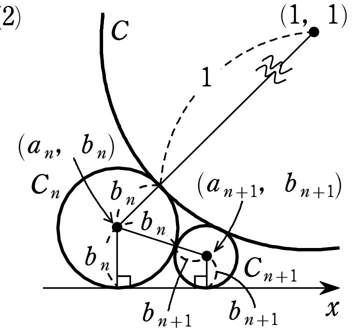
$$=b_n{}^2+2b_nb_{n+1}+b_{n+1}{}^2$$

ゆえに　$(a_{n+1}-a_n)^2=4b_nb_{n+1}$

① から　$(a_{n+1}-a_n)^2=\frac{1}{4}(a_n-1)^2(a_{n+1}-1)^2$

$a_n<a_{n+1}$，$a_n<1$，$a_{n+1}<1$ であるから　$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(1-a_n)(1-a_{n+1})$　…… ②

(2)



(3) $c_n=\frac{1}{1-a_n}$ とおくと　$1-a_n=\frac{1}{c_n}$，$a_n=1-\frac{1}{c_n}$

よって，② から　$1-\frac{1}{c_{n+1}}-\left(1-\frac{1}{c_n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{c_n}\cdot\frac{1}{c_{n+1}}$

整理して　$2(c_{n+1}-c_n)=1$　　ゆえに　$c_{n+1}=c_n+\frac{1}{2}$

また　$c_1=\frac{1}{1-a_1}=\frac{1}{1-(3-2\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$，公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$c_n=\frac{\sqrt{2}+1}{2}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+\sqrt{2}}{2}$$　　よって　$a_n=1-\frac{1}{c_n}=1-\frac{2}{n+\sqrt{2}}$