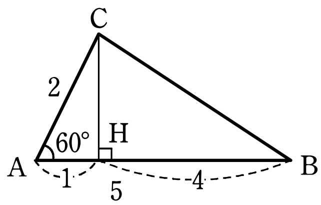
BASIC問題

1 △ABCにおいて，辺BCを2：1に内分する点をD，外分する点をEとし，△ABCの重心をGとする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$　(5) $\overrightarrow{\mathrm{GD}}$

2 右の図は，AB＝5，AC＝2，∠BAC＝60° の△ABCの頂点Cから，底辺ABに垂線CHを下ろしたものである。次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

3 $\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$，$\vec{x}=(p,\ q)$ とする。$\vec{x}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行で，$\vec{x}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ が垂直であるとき，p，q の値を求めよ。

4 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3\sqrt{2}$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=3$ のとき，次のものを求めよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$　(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ

5 $\vec{a}=(9,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ -2)$ とし，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。$|\vec{c}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。ただし，tは実数とする。

6 平行四辺形ABCDの辺ABを3：2に内分する点をE，辺ADを2：1に内分する点をF，線分BFと線分CEの交点をKとする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

STANDARD問題

7 三角形ABCの内心をIとし，辺BC，CA，ABの長さを，それぞれ a，b，c とする。$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=r\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 r，s を，a，b，c を用いて表せ。

8 三角形ABCの3辺の長さをAB＝4，BC＝3，CA＝2とする。この三角形の外心をOとおく。$\overrightarrow{\mathrm{CO}}$を $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$で表せ。

9 △ABCと点Pがあり，$2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たしている。

(1) △PAB，△PBC，△PCAの面積の比を求めよ。

(2) 直線AP上に点Qをとり，△QABと△QBCの面積比が3：1になるようにする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{QA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QC}}$ が満たす関係式を求めよ。

10 △OABにおいて，OA＝3，OB＝4，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=8$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で，s，t が $3s+t\leqq 3$，$s+t\geqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ を満たしながら動くとき，点Pが描く図形の面積を求めよ。

11 A$(-1,\ 5)$，B$(2,\ 4)$，$\vec{d}=(1,\ -2)$ とする。次の直線の媒介変数表示を，媒介変数を t として求めよ。また，t を消去した式で表せ。

(1)　A を通り，$\vec{d}$ に平行な直線　　(2)　2 点 A，B を通る直線

12 次のような直線の方程式を，ベクトルを用いて求めよ。

(1)　点 A$(5,\ 3)$ を通り，$\vec{n}=(1,\ -2)$ に垂直な直線

(2)　O は原点とする。点 A$(3,\ -1)$ を通り，OA に垂直な直線

13 平面上の異なる 2 つの定点 O，A と任意の点 P に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$\left|2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=4$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

実戦問題

14 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1 : 1 に内分する点を E，辺 BC を 2 : 1 に内分する点を F，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP : PQ を求めよ。

15 △ABC の外心 O から直線 BC，CA，AB に引いた垂線の足をそれぞれ P，Q，R とする．$0<t<1$ の範囲で関係式 $(t+1)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-t(t+1)\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$ を満たしているとき，次の問いに答えよ．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(2)　$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ．

16 平面上において同一直線上にない異なる 3 点 A, B, C があるとき，次の各問いに対して，それぞれの式を満たす点 P の集合を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\leqq\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

1 解答 (1) $\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$ (2) $-\vec{b}+2\vec{c}$ (3) $\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$ (4) $-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

(5) $\dfrac{1}{3}\vec{c}$

2 解答 (1) 5 (2) -3 (3) 0 (4) 20

3 解答 $p=1$, $q=3$

4 解答 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ (2) $\theta=45^\circ$

5 解答 $t=3$ で最小値 $3\sqrt{5}$

6 解答 $\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\dfrac{13}{19}\vec{a}+\dfrac{4}{19}\vec{b}$

7 解答 $r=\dfrac{b}{a+b+c}$, $s=\dfrac{c}{a+b+c}$

8 解答 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\dfrac{11}{15}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\dfrac{28}{45}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

9 解答 (1) 4：2：3

(2) $4\overrightarrow{\mathrm{QA}}+9\overrightarrow{\mathrm{QB}}+12\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\vec{0}$ または $4\overrightarrow{\mathrm{QA}}-9\overrightarrow{\mathrm{QB}}-12\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\vec{0}$

10 解答 $4\sqrt{5}$

11 解答 (1) $\begin{cases}x=-1+t\\y=5-2t\end{cases}$; $2x+y-3=0$ (2) $\begin{cases}x=-1+3t\\y=5-t\end{cases}$; $x+3y-14=0$

12 解答 (1) $x-2y+1=0$ (2) $3x-y-10=0$

13 解答 (1) 線分 OA の中点を中心とする半径 2 の円

(2) 線分 OA を直径とする円

14 解答 19：3

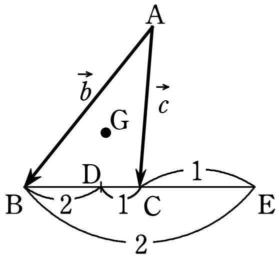
15 解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (2) 135°

16 解答 (1) 線分 BC を 2：1 の比に内分する点

(2) B を通り，直線 AB に垂直な直線

(3) 線分 BC を直径とする円周とその内部

$\boxed{1}$ 点 A に関する位置ベクトルと考える。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{-\vec{b}+2\vec{c}}{2-1}=-\vec{b}+2\vec{c}$

(3) 辺 BC の中点を M とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)-\vec{b}=-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{2}{3}(\vec{c}-\vec{b})=-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)=\dfrac{1}{3}\vec{c}$

$\boxed{2}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos 60^\circ=5\times 2\times\dfrac{1}{2}=5$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ の始点をそろえると，なす角は 150° である。

また，$\mathrm{CH}=\mathrm{AC}\sin 60^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{CH}}|\cos 150^\circ=2\times\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ の始点をそろえると，なす角は 90° であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{CH}}|\cos 90^\circ=5\times\sqrt{3}\times 0=0$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos\angle\mathrm{ABC}$

頂点 C から直線 AB に垂線 CH をおろすと　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos\angle\mathrm{ABC}=\mathrm{BH}$

また，$\mathrm{AH}=\mathrm{AC}\cos 60^\circ=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$　により

$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}-\mathrm{AH}=5-1=4$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\cdot(|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos\angle\mathrm{ABC})=\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BH}=5\times 4=20$

$\boxed{3}$ $\vec{a}-\vec{b}=(4,\ 2)-(3,\ -1)=(1,\ 3)$

$\vec{x}-\vec{b}=(p,\ q)-(3,\ -1)=(p-3,\ q+1)$

条件より $\vec{x}\neq\vec{0}$，$\vec{x}-\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから　$(p,\ q)\neq(0,\ 0),\ (3,\ -1)$ ……①

このとき，$\vec{x}\,/\!/\,(\vec{a}-\vec{b})$ から　$p\times 3-q\times 1=0$

よって　$3p-q=0$ ……②

また，$(\vec{x}-\vec{b})\perp\vec{a}$ から　$(p-3)\times 4+(q+1)\times 2=0$

よって　$2p+q=5$ ……③

②，③ を解いて　$p=1,\ q=3$　これは ① を満たす。

$\boxed{4}$ (1) $|3\vec{a}-\vec{b}|^2=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9\times1^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+(3\sqrt{2})^2$

$=9-6\vec{a}\cdot\vec{b}+18=27-6\vec{a}\cdot\vec{b}$

$|3\vec{a}-\vec{b}|=3$ より，$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=9$ であるから　　$27-6\vec{a}\cdot\vec{b}=9$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

(2) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{1\times3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　　$\theta=45^\circ$

$\boxed{5}$ $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(9,\ 3)+t(-1,\ -2)=(9-t,\ 3-2t)$

$|\vec{c}|^2=(9-t)^2+(3-2t)^2=5t^2-30t+90$

$=5(t-3)^2+45$

よって，$|\vec{c}|^2$ は $t=3$ で最小値 45 をとる。

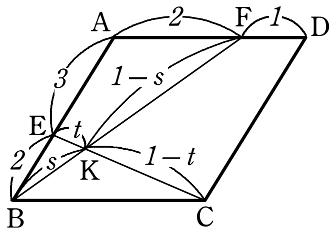
$|\vec{c}|\geqq0$ であるから，$|\vec{c}|^2$ が最小のとき $|\vec{c}|$ も最小となり，最小値は $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

したがって　　$t=3$ で　最小値 $3\sqrt{5}$

$\boxed{6}$ BK：KF$=s:(1-s)$，EK：KC$=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(1-s)\vec{a}+\dfrac{2}{3}s\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AE}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-t)\dfrac{3}{5}\vec{a}+t(\vec{a}+\vec{b})$



よって　$(1-s)\vec{a}+\dfrac{2}{3}s\vec{b}=\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}t\right)\vec{a}+t\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから

$1-s=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}t$，$\dfrac{2}{3}s=t$

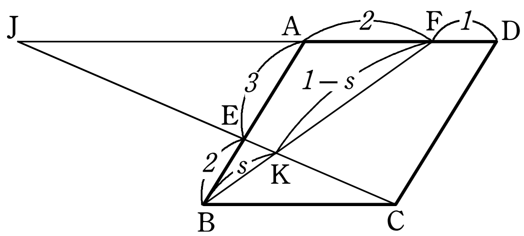
これを解いて　$s=\dfrac{6}{19}$，$t=\dfrac{4}{19}$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\dfrac{13}{19}\vec{a}+\dfrac{4}{19}\vec{b}$

別解　△ABF と直線 CE について，メネラウスの定理を利用する。

DA と CE の交点を J とすると

△EBC∽△EAJ

BC：AJ$=2:3$ から



$\mathrm{AJ}=\dfrac{3}{2}\mathrm{BC}=\dfrac{3}{2}\mathrm{AD}$

よって　$\dfrac{\mathrm{FJ}}{\mathrm{JA}}=\dfrac{\mathrm{FA}+\mathrm{AJ}}{\mathrm{JA}}$

$=\dfrac{\frac{2}{3}\mathrm{AD}+\frac{3}{2}\mathrm{AD}}{\frac{3}{2}\mathrm{AD}}=\dfrac{\frac{13}{6}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{13}{9}$

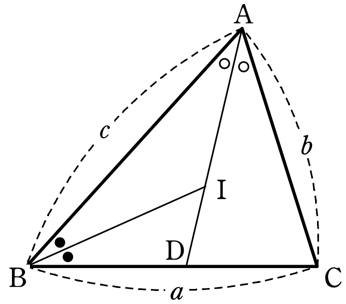
メネラウスの定理から

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\cdot\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{KF}}\cdot\frac{\mathrm{FJ}}{\mathrm{JA}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{s}{1-s}\cdot\frac{6.5}{4.5}=1$$

よって　$s=\dfrac{6}{19}$　　したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\left(1-\dfrac{6}{19}\right)\vec{a}+\dfrac{6}{19}\cdot\dfrac{2}{3}\vec{b}$

$$=\frac{13}{19}\vec{a}+\frac{4}{19}\vec{b}$$

$\boxed{7}$ △ABC の ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると　　BD：DC＝AB：AC＝c：b



よって　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

また，$\mathrm{BD}=a\cdot\dfrac{c}{b+c}=\dfrac{ac}{b+c}$ であるから

$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=c:\dfrac{ac}{b+c}=(b+c):a$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{b+c}{(b+c)+a}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$$=\frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから　　$r=\dfrac{b}{a+b+c}$，$s=\dfrac{c}{a+b+c}$

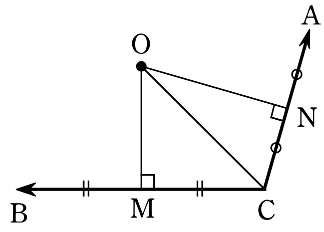
$\boxed{8}$ $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$ とすると　　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\vec{b}-\vec{a}|=4$

$|\vec{b}-\vec{a}|^2=16$ であるから　　$|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=16$

よって　　$9-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=16$

ゆえに　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$　　　すなわち　　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=-\dfrac{3}{2}$

外心 O は 3 辺の垂直二等分線の交点である。
よって，辺 BC，CA の中点をそれぞれ M，N とすると，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{NO}}$ である。



$$\overrightarrow{\mathrm{MO}}=\overrightarrow{\mathrm{MC}}+\overrightarrow{\mathrm{CO}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CB}}+a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$$=a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\left(b-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{NO}}=\overrightarrow{\mathrm{NC}}+\overrightarrow{\mathrm{CO}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\left(a-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MO}}=0$ であるから　　$a\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\left(b-\dfrac{1}{2}\right)|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2=0$

よって　　$-\dfrac{3}{2}a+9\left(b-\dfrac{1}{2}\right)=0$　　　ゆえに　　$-a+6b-3=0$　……①

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NO}}=0$ であるから　$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2+b\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$

よって　$4\left(a-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{2}b=0$　　ゆえに　$8a-3b-4=0$　……②

①，② から　$a=\dfrac{11}{15}$，$b=\dfrac{28}{45}$　　$\therefore$　$\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\dfrac{11}{15}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\dfrac{28}{45}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$\boxed{9}$ (1)　$2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ から　$2(-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+4(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$

ゆえに　$-9\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{7}{9}\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\frac{7}{9}\left(\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4+3}\right)$$

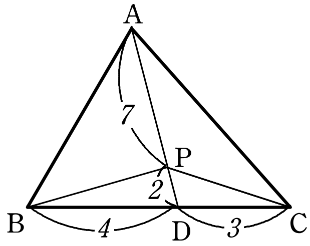
辺 BC を 4：3 に内分する点を D とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4+3}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

ゆえに，点 P は線分 AD を 7：2 に内分する点であるから，△ABC の面積を S とすると　$\triangle\mathrm{PBC}=\dfrac{2}{9}S$

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{7}{9}\triangle\mathrm{ABD}=\frac{7}{9}\cdot\frac{4}{7}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{4}{9}S$$

$$\triangle\mathrm{PCA}=\frac{7}{9}\triangle\mathrm{ADC}=\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{7}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3}{9}S$$



したがって

$$\triangle\mathrm{PAB}:\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}=\frac{4}{9}S:\frac{2}{9}S:\frac{3}{9}S=4:2:3$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$（$t$ は実数）とすると

[1]　$0<t<1$ のとき

$$\triangle\mathrm{QAB}=\frac{4}{7}tS,\ \triangle\mathrm{QBC}=(1-t)S$$

△QAB：△QBC＝3：1 から　$\dfrac{4}{7}t:(1-t)=3:1$

ゆえに，$t=\dfrac{21}{25}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{21}{25}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{21}{25}\left(\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

よって　$-\overrightarrow{\mathrm{QA}}=\dfrac{9}{25}(\overrightarrow{\mathrm{QB}}-\overrightarrow{\mathrm{QA}})+\dfrac{12}{25}(\overrightarrow{\mathrm{QC}}-\overrightarrow{\mathrm{QA}})$

整理すると　$4\overrightarrow{\mathrm{QA}}+9\overrightarrow{\mathrm{QB}}+12\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\vec{0}$

[2]　$t>1$ のとき

$$\triangle\mathrm{QAB}=\frac{4}{7}tS,\ \triangle\mathrm{QBC}=(t-1)S$$

△QAB：△QBC＝3：1 から　$\dfrac{4}{7}t:(t-1)=3:1$

ゆえに，$t=\dfrac{21}{17}$ であるから　$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{21}{17}\overrightarrow{AD}=\dfrac{21}{17}\left(\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right)$

よって　$-\overrightarrow{QA}=\dfrac{9}{17}(\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QA})+\dfrac{12}{17}(\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QA})$

整理すると　$4\overrightarrow{QA}-9\overrightarrow{QB}-12\overrightarrow{QC}=\vec{0}$

[3]　$t=0$，1 のとき

△QAB または △QBC が存在しないため不適。

[4]　$t<0$ のとき

△QBC に △QAB が含まれ，△QAB：△QBC＝3：1 とならないので不適。

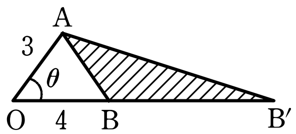
以上から　$4\overrightarrow{QA}+9\overrightarrow{QB}+12\overrightarrow{QC}=\vec{0}$　または　$4\overrightarrow{QA}-9\overrightarrow{QB}-12\overrightarrow{QC}=\vec{0}$

10　$3s+t\leqq 3$ の両辺を 3 で割ると　$s+\dfrac{t}{3}\leqq 1$　また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+\dfrac{t}{3}(3\overrightarrow{OB})$

$\dfrac{t}{3}=t'$，$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とおくと　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t'\overrightarrow{OB'}$，$s+t'\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$3s+t\leqq 3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ を満たすとき，点 P が描く図形は，△OAB′ の周および内部である。また，$s+t\geqq 1$ を満たすとき，点 P が描く図形は，直線 AB に関して，点 O と反対側にある領域である。

ただし，直線 AB を含む。これらの共通部分であるから，点 P が描く図形は，右の図のような △ABB′ の周および内部である。



ここで，∠AOB＝θ とすると

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\cdot OB\cos\theta$$

条件から　$8=3\cdot 4\cos\theta$　よって　$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$

$0°<\theta<180°$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

よって，求める面積は

$$\triangle OAB'-\triangle OAB=\frac{1}{2}OA\cdot OB'\sin\theta-\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}(4\cdot 3-4)=4\sqrt{5}$$

11　(1)　点 A を通り，$\vec{d}$ に平行な直線の媒介変数表示は

$$(x,\ y)=(-1,\ 5)+t(1,\ -2)$$

すなわち　$\begin{cases} x=-1+t \\ y=5-2t \end{cases}$

t を消去すると　$y=5-2(x+1)$　すなわち　$2x+y-3=0$

(2)　2 点 A，B を通る直線の媒介変数表示は

$$(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 5)+t(2,\ 4)$$

すなわち $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=5-t \end{cases}$

t を消去すると $x=-1+3(5-y)$ すなわち $x+3y-14=0$

12 直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n}$ であるから $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ ……①

$\vec{n}=(1,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-5,\ y-3)$ であるから，① より

$1\cdot(x-5)+(-2)\cdot(y-3)=0$ よって $x-2y+1=0$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ ……①

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ y+1)$ であるから，① より

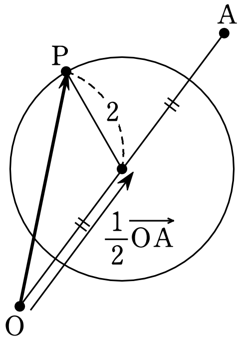
$3\cdot(x-3)+(-1)\cdot(y+1)=0$ よって $3x-y-10=0$

13 (1) $\left|2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=4$ を変形すると

$$2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=4$$

すなわち $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=2$

ゆえに，線分 OA の中点を中心とする半径 2 の円を表す。



(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を変形すると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

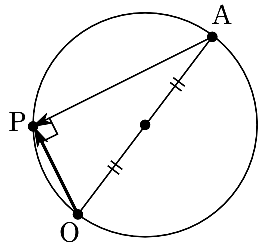
よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$

すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$ または

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

よって，線分 OA を直径とする円を表す。

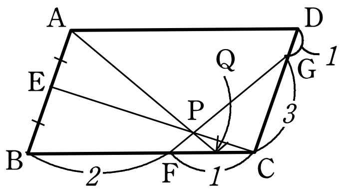


14 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}$$



$\mathrm{EP}:\mathrm{PC}=s:(1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AE}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}(1-s)\vec{a}+s(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}(1+s)\vec{a}+s\vec{b} \quad \cdots\cdots ①$$

また，FP：PG$=t:(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AF}}+t\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(1-t)\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)+t\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\left(1-\frac{3}{4}t\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t\right)\vec{b}\quad\cdots\cdots ②$$

①，② より　$\frac{1}{2}(1+s)\vec{a}+s\vec{b}=\left(1-\frac{3}{4}t\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t\right)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$\frac{1}{2}(1+s)=1-\frac{3}{4}t$，$s=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t$

これを解いて　$s=\frac{8}{11}$，$t=\frac{2}{11}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{19}{22}\vec{a}+\frac{8}{11}\vec{b}$

点 Q は直線 AP 上にあるから　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$　(k は実数)

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{19}{22}k\vec{a}+\frac{8}{11}k\vec{b}=\frac{3}{22}k\vec{a}+\frac{8}{11}k(\vec{a}+\vec{b})=\frac{3}{22}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{8}{11}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

点 Q は直線 BC 上にあるから　$\frac{3}{22}k+\frac{8}{11}k=1$　　よって　$k=\frac{22}{19}$

ゆえに　AP：PQ$=19:3$

15 (1)　直線 OP，OQ，OR はそれぞれ辺 BC，CA，AB の垂直二等分線であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

$(t+1)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-t(t+1)\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$ から

$$(t+1)\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}+(t-1)\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2}-t(t+1)\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=\vec{0}$$

すなわち　$-(1+t^2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t^2)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\left|\frac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$

$$=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\left\{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2\right\}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

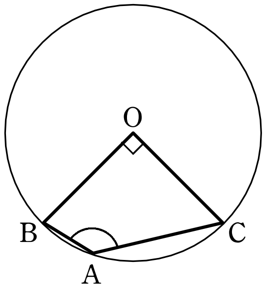
$$=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$0<t<1$ から $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

よって $\angle\mathrm{BOC}=90°$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}>0$，

$\dfrac{2t}{1+t^2}>0$ であるから，3 点 A，B，C の位置関係は右図のようになる．



よって $\angle\mathrm{BAC}=(360°-90°)\div2=135°$

16 (1) 条件の等式から $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$

よって，点 P は線分 BC を 2：1 の比に内分する点である．答

(2) 条件の等式から $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=0$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ は垂直である．

したがって，点 P の集合は点 B を通り，直線 AB に垂直な直線である．答

(3) 条件の不等式から $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})\leqq0$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\leqq0$

よって $(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\leqq0$

したがって，点 P の集合は，線分 BC を直径とする円周とその内部である．答

参考(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(c,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,y)$ とすると，$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\leqq0$

から $x(x-c)+y^2\leqq0$ ゆえに $\left(x-\dfrac{c}{2}\right)^2+y^2\leqq\left(\dfrac{c}{2}\right)^2$