BASIC問題

$\boxed{1}$ 次の関数のグラフをかけ。また，(2) はその値域を求めよ。

(1) $y=\dfrac{3x+1}{2x-4}$　　(2) $y=\dfrac{x-2}{2x+1}$ $(-1\leqq x<0)$

$\boxed{2}$ 次の関数のグラフをかけ。また，その値域を求めよ。

(1) $y=\sqrt{x+4}-1$　　(2) $y=-\sqrt{1-2x}+2$

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+a}$ について，$f^{-1}(x)=f(x)$ が成り立つように，定数 a の値を定めよ。

$\boxed{4}$ $f(x)=2x-1$，$g(x)=ax+b$ について，$(g\circ f)(x)=8x-3$ が成り立つとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=ax+b$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f^{-1}(1)=2$，$f^{-1}(5)=4$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

STANDARD問題

$\boxed{6}$ 関数 $y=\log_4 x$ ……① のグラフを $^{ア}\boxed{}$ 軸方向に $^{イ}\boxed{}$ だけ平行移動したグラフの方程式は $y=\log_4 16x$ である。また，関数 ① のグラフを x 軸方向に $^{ウ}\boxed{}$，y 軸方向に $^{エ}\boxed{}$ だけ平行移動したグラフの方程式は $y=\log_4\dfrac{x+2}{64}$ である。

関数 $y=2^x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称な位置に移動したグラフの方程式は $y=$ $^{オ}\boxed{}$ ……② である。② のグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したグラフが 2 点 $(0,\ -1)$，$(4,\ 0)$ を通るとき，$a=$ $^{カ}\boxed{}$，$b=$ $^{キ}\boxed{}$ である。

$\boxed{7}$ $y=\dfrac{1}{8}\cdot 2^x$ は，$y=2^x$ を x 軸の正の方向に $^{ア}\boxed{}$ だけ平行移動したグラフであり，更に，$x=2$ を軸に線対称に移すと，$y=$ $^{イ}\boxed{}$ となる．

$\boxed{8}$ 関数 $y=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$ の周期は，$\boxed{\text{ア}}\pi$ である。

また，この関数のグラフは，$y=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$，$y$ 軸方向に $\boxed{\text{エ}}$ だけ平行移動したものである。

9　関数 $y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ の逆関数を求めよ。

10　＊　関数 $f(x)=\dfrac{2x+a}{x+1}$，$g(x)=\dfrac{3x+b}{x+c}$ を考える。

合成関数 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ が $(f\circ g)(x)=\dfrac{9x+8}{4x+3}$ を満たすとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

11　不等式 $\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{x}}\geqq x^2$ を解け.

12　不等式 $\sqrt{4x-x^2}>3-x$ を解け。

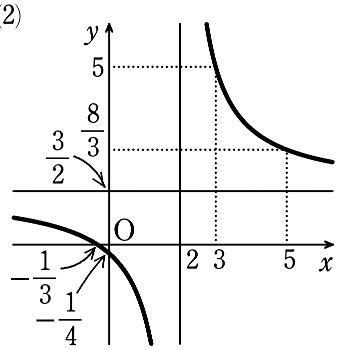
実戦問題

13　関数 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{3}$ の周期のうち，正で最小のものを求めよ。

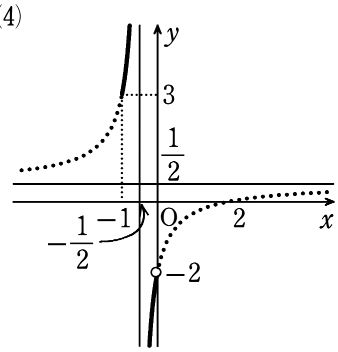
14　関数 $f(x)=\log_2(x+3)$ に対し，その逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。また，$g(x)=\sqrt{x+1}$ のとき，不等式 $g^{-1}(x)\geqq g(x)$ を満たす x の範囲を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答 (2) 〔図〕実線部分，$y<-2$，$3\leqq y$

(2)



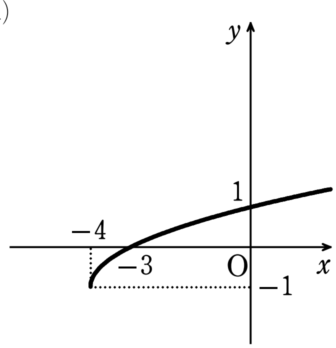
(4)



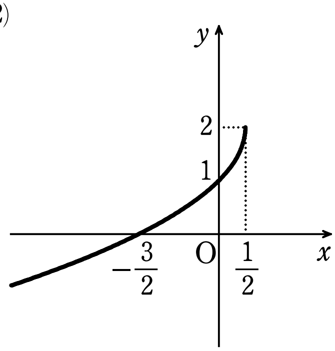
(

$\boxed{2}$ 解答 (1) 〔図〕，値域　$y\geqq-1$　　(2) 〔図〕，値域　$y\leqq 2$

(1)



(2)



$\boxed{3}$ 解答　$a=-2$

$\boxed{4}$ 解答　$a=4$，$b=1$

$\boxed{5}$ 解答　$a=2$，$b=-3$

$\boxed{6}$ 解答　(ア)　y　(イ)　2　(ウ)　-2　(エ)　-3　(オ)　$\log_2 x$　(カ)　-4

(キ)　-3

$\boxed{7}$ 解答　(ア)　3　(イ)　2^{-x+1}

$\boxed{8}$ 解答　(ア)　4　$\dfrac{(イ)}{(ウ)}$　$\dfrac{2}{3}$　(エ)　1

$\boxed{9}$ 解答　$y=x+\sqrt{x^2+1}$

$\boxed{10}$ 解答　$a=3$，$b=1$，$c=2$

$\boxed{11}$ 解答　$-3\leqq x<-2$，$0<x\leqq 1$

$\boxed{12}$ 解答　$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x\leqq 4$

$\boxed{13}$ 解答　12π

$\boxed{14}$ 解答　$f^{-1}(x)=2^x-3$，$x\geqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{1}$ (1)　$\dfrac{3x+1}{2x-4}=\dfrac{\frac{3}{2}(2x-4)+7}{2x-4}=\dfrac{7}{2x-4}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{\frac{7}{2}}{x-2}+\dfrac{3}{2}$

よって，$y=\dfrac{3x+1}{2x-4}$ のグラフは，$y=\dfrac{7}{2x}$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に $\dfrac{3}{2}$ だけ平行移動したものである。

漸近線は 2 直線 $x=2$，$y=\dfrac{3}{2}$　〔図〕

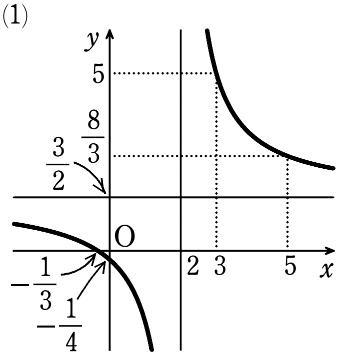
(2)　$\dfrac{x-2}{2x+1}=\dfrac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{5}{2}}{2x+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\frac{5}{2}}{2x+1}=-\dfrac{\frac{5}{4}}{x+\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}$

$x=-1$ のとき　$y=3$，$x=0$ のとき　$y=-2$

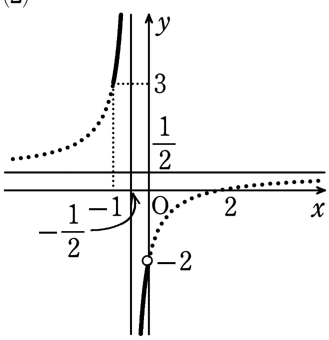
よって，この関数のグラフは，図の実線部分のようになる。

また，値域は　　$y<-2$，$3\leqq y$

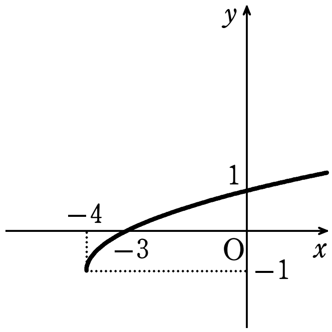
(1)



(2)

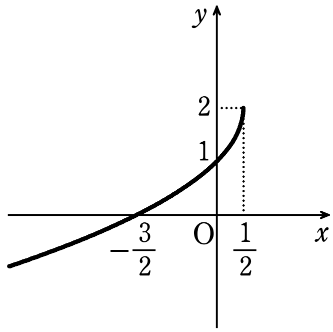


$\boxed{2}$ (1)　$y=\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -4，y 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，右の図のようになる。
グラフから，値域は　　$y \geqq -1$



(2)　$-\sqrt{1-2x}+2=-\sqrt{-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}+2$

よって，$y=-\sqrt{1-2x}+2$ のグラフは，
$y=-\sqrt{-2x}$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，右の図のようになる。
グラフから，値域は　　$y \leqq 2$



$\boxed{3}$ $y=\dfrac{2x+1}{x+a}$ とする。

$$\frac{2x+1}{x+a}=\frac{2(x+a)-2a+1}{x+a}=\frac{1-2a}{x+a}+2$$

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，y は定数関数となるから　$a \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$　　　　このとき　$y \fallingdotseq 2$

$y(x+a)=2x+1$ より　　$(y-2)x=1-ay$

$y \fallingdotseq 2$ であるから　　　$x=\dfrac{1-ay}{y-2}$

よって，逆関数は　　　$f^{-1}(x)=\dfrac{1-ax}{x-2}$

$\dfrac{2x+1}{x+a}=\dfrac{1-ax}{x-2}$ が x についての恒等式である。

両辺に $(x+a)(x-2)$ を掛けて，x について整理すると

$$(a+2)x^2+(a^2-4)x-a-2=0$$

よって　　$a+2=0$，$a^2-4=0$，$-a-2=0$

したがって　　$a=-2$

$\boxed{4}$ $(g\circ f)(x)=g(f(x))=a(2x-1)+b=2ax-a+b$

$(g\circ f)(x)=8x-3$ が成り立つから，$2ax-a+b=8x-3$ は x の恒等式である。

両辺の係数を比較すると　$2a=8$，$-a+b=-3$

これを解いて　$a=4$，$b=1$

$\boxed{5}$ $f^{-1}(1)=2$　から　$f(2)=1$

よって　$2a+b=1$　…… ①

$f^{-1}(5)=4$　から　$f(4)=5$

よって　$4a+b=5$　…… ②

①，② を解くと　$a=2$，$b=-3$

$\boxed{6}$

$$y=\log_4 16x=\log_4 x+2$$

よって，① のグラフを ${}^{ア}y$ 軸方向に ${}^{イ}2$ だけ平行移動すると，$y=\log_4 16x$ のグラフになる。

$$y=\log_4\frac{x+2}{64}=\log_4(x+2)-3$$

よって，① のグラフを x 軸方向に ${}^{ウ}-2$，y 軸方向に ${}^{エ}-3$ だけ平行移動すると，

$y=\log_4\dfrac{x+2}{64}$ のグラフになる。

$y=2^x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称移動すると，$y={}^{オ}\log_2 x$ のグラフになる。

このグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動すると

$$y=\log_2(x-a)+b$$

のグラフになる。

これが 2 点 $(0,\ -1)$，$(4,\ 0)$ を通るとき

$$\log_2(-a)+b=-1 \quad \cdots\cdots ③$$

$$\log_2(4-a)+b=0 \quad \cdots\cdots ④$$

ここで，真数は正であるから　$-a>0$ かつ $4-a>0$　　よって　$a<0$　…… ⑤

③−④ から　$\log_2(-a)-\log_2(4-a)=-1$

$$\log_2(-a)+1=\log_2(4-a)$$

$$\log_2(-2a)=\log_2(4-a)$$

よって　$-2a=4-a$　　ゆえに　$a={}^{カ}-4$　　これは ⑤ を満たす。

④ から　$b=-\log_2(4-a)=-\log_2 8={}^{キ}-3$

$\boxed{7}$ $y=\dfrac{1}{8}\cdot 2^x=2^{x-3}$　　よって，$y=2^x$ を x 軸の正の方向に ${}^{ア}3$ だけ平行移動.

$x=3$ を $x=2$ を軸に線対称に移すと $x=1$

よって，$y=2^{x-3}$ を $x=2$ を軸に線対称に移すと　$y=2^{-(x-1)}$　　すなわち　$y={}^{イ}2^{-x+1}$

$\boxed{8}$ $y=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)+1=2\sin\dfrac{1}{2}\left(\theta-\dfrac{2}{3}\pi\right)+1$

よって，周期は　$2\pi\div\dfrac{1}{2}={}^{ア}4\pi$

また，$y-1=2\sin\dfrac{1}{2}\left(\theta-\dfrac{2}{3}\pi\right)$ であるから，この関数のグラフは $y=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ のグラフを

θ 軸方向に $\dfrac{{}^{イ}2}{{}^{ウ}3}\pi$，$y$ 軸方向に ${}^{エ}1$ だけ平行移動したものである。

$\boxed{9}$ $y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ の両辺に $2x$ を掛けて　　$2xy=x^2-1$

変形すると　　$(x-y)^2=y^2+1$　…… ①

ここで，$x>0$ から

$$x-y=x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)>0$$

よって，① から　　$x-y=\sqrt{y^2+1}$

ゆえに　　$x=y+\sqrt{y^2+1}$

したがって，求める逆関数は，x と y を入れ替えて　　$y=x+\sqrt{x^2+1}$

$\boxed{10}$ $f(g(x))=f\left(\dfrac{3x+b}{x+c}\right)=\dfrac{2\cdot\dfrac{3x+b}{x+c}+a}{\dfrac{3x+b}{x+c}+1}=\dfrac{(a+6)x+2b+ac}{4x+b+c}$

$f(g(x))=\dfrac{9x+8}{4x+3}$ から　$\dfrac{(a+6)x+2b+ac}{4x+b+c}=\dfrac{9x+8}{4x+3}$

分母を払って整理すると

$(12-4a)x^2+(14-3a+b+9c-4ac)x+(2b+8c-3ac)=0$

これが x について恒等式であるから

$12-4a=0$　……①，$14-3a+b+9c-4ac=0$　……②，

$2b+8c-3ac=0$　……③

①，②，③ から　$a=3$，$b=1$，$c=2$

(別解)　$f(g(x))=\dfrac{(a+6)x+2b+ac}{4x+b+c}$ から　$\dfrac{(a+6)x+2b+ac}{4x+b+c}=\dfrac{9x+8}{4x+3}$

これが x についての恒等式である。分母の x の係数は 4 で等しいから他の係数も等しい。よって

$a+6=9$ ……④，$2b+ac=8$ ……⑤，$b+c=3$ ……⑥

④，⑤，⑥ から　$a=3$，$b=1$，$c=2$

$\boxed{11}$ $\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{x}}\geqq x^2$ から　$x\neq 0$，$x\neq -2$，$\dfrac{3x}{x+2}\geqq x^2$

ゆえに　$\dfrac{x(x-1)(x+3)}{x+2}\leqq 0$

よって　$-3\leqq x<-2$，$0<x\leqq 1$

12　$4x-x^2 \geqq 0$ から　$0 \leqq x \leqq 4$　…… ①

[1]　$3-x<0$ すなわち $x>3$ のとき

① から　　$3<x \leqq 4$

このとき，$\sqrt{4x-x^2} \geqq 0$ であるから与えられた不等式は成り立つ。

[2]　$3-x \geqq 0$ すなわち $x \leqq 3$ のとき

① から　　$0 \leqq x \leqq 3$　…… ②

このとき，$\sqrt{4x-x^2} \geqq 0$，$3-x \geqq 0$ であるから与えられた不等式の両辺を 2 乗して

$$4x-x^2>(3-x)^2$$

整理すると　　$2x^2-10x+9<0$

これを解くと　$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x<\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$

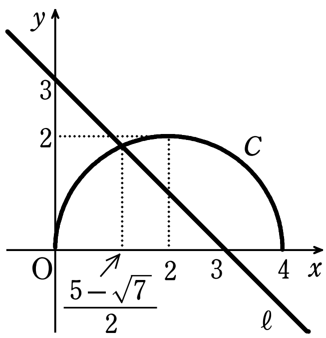
$2<\sqrt{7}<3$ であるから，② より　　$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x \leqq 3$

[1]，[2] より　　$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x \leqq 4$

別解　曲線 $C: y=\sqrt{4x-x^2}$ とすると　　$y \geqq 0$，$(x-2)^2+y^2=2^2$

から C は点 $(2,\ 0)$ を中心とする半径 2 の円の $y \geqq 0$ の部分である。

また，直線 $\ell: y=3-x$ とすると，C と ℓ は右の図のようになる。



C と ℓ の交点の x 座標は $\sqrt{4x-x^2}=3-x$　…… ③

の実数解である。

両辺を 2 乗して　$4x-x^2=(3-x)^2$

これを解くと　　$x=\dfrac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$

③ に適するのは　$x=\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$

図から，不等式の解は　　$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x \leqq 4$

13　$\sin\dfrac{x}{2}$ の周期は　$2 \times 2\pi=4\pi$，$\sin\dfrac{x}{3}$ の周期は　$3 \times 2\pi=6\pi$

4 と 6 の最小公倍数は 12 であるから，求める周期は　12π

14 $y=\log_2(x+3)$ の値域はすべての実数で，これを x について解くと　$x+3=2^y$

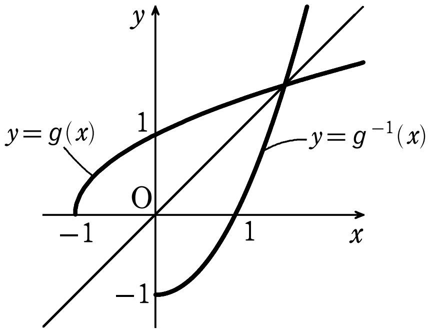
すなわち　$x=2^y-3$　　ゆえに　$f^{-1}(x)=2^x-3$

また，$y=\sqrt{x+1}$ の値域は $y\geqq 0$ で，これを x について解くと　$y^2=x+1$

すなわち　$x=y^2-1$ $(y\geqq 0)$

ゆえに　$g^{-1}(x)=x^2-1$ $(x\geqq 0)$

$y=g^{-1}(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称で，位置関係は右の図のようになる。



よって，$g^{-1}(x)\geqq g(x)$ を満たす x の範囲は

$g^{-1}(x)\geqq x$ を満たす x の範囲に等しい。

ゆえに，$x^2-1\geqq x$ から

$$x\leqq\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\leqq x$$

$x\geqq 0$ であるから，$g^{-1}(x)\geqq g(x)$ を満たす x の範囲は　$x\geqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$