改・数学③第１０回テスト　極座標・パラ

確認問題（省略可）

1 (1) 次の極座標の点 A，B の直交座標を求めよ。A$\left(4,\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$，B$\left(3,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2) 次の直交座標の点 C，D の極座標 $(r,\ \theta)$ $[0\leqq\theta<2\pi]$ を求めよ。

$$C\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad D(-2,\ -2\sqrt{3})$$

2 次の曲線を極方程式で表せ。

(1) $x^2+y^2+2x=0$　　(2) $x^2-y^2=2$

3 次の極方程式を，直交座標に関する方程式で表せ。

(1) $r\cos\theta=1$　　(2) $r=2\sin\theta$

(3) $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=2$　　(4) $r^2\sin 2\theta=2$

BASIC問題

4 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(1) $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t} \\ y=t-\dfrac{1}{t} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{6t}{1+t^2} \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} x=\sin\theta \\ y=\cos 2\theta \end{cases}$

5 x，y が $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を満たす実数のとき，$x^2+6\sqrt{2}\,xy-6y^2$ の最小値とそのときの x，y の値を求めよ。

6 ＊ 放物線 $y=\dfrac{3}{4}x^2$ と楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ の共通接線の方程式を求めよ.

実戦問題

7 O を極とする極座標に関して，3 点 A$\left(6,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$，B$\left(4,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$，C$\left(2,\ -\dfrac{3}{4}\pi\right)$ が与えられているとき，次のものを求めよ。

(1) 線分 AB の長さ　　(2) △OAB の面積　　(3) △ABC の面積

8 ＊ $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ のとき，極方程式 $r=2(\cos\theta+\sin\theta)$ の表す曲線を図示し，その長さを求めよ。

9 点 $(0,\ 1)$ を通る傾き t の直線 ℓ が，2 直線 $y=2x-1$，$y=-2x-1$ と交わる点を，それぞれ A，B とし，線分 AB の中点を P とする。

(1) P の座標を媒介変数 t で表せ。

(2) t の値が変化するとき，P はどのような曲線を描くか。

$\boxed{1}$ 解答 (1) $A(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$，$B(0,\ -3)$　(2) $C\left(1,\ \frac{7}{4}\pi\right)$，$D\left(4,\ \frac{4}{3}\pi\right)$

$\boxed{2}$ 解答 (1) $r=-2\cos\theta$　(2) $r^2\cos 2\theta=2$

$\boxed{3}$ 解答 (1) $x=1$　(2) $x^2+y^2=2y$　(3) $y=-\sqrt{3}x+4$　(4) $xy=1$

$\boxed{4}$ 解答 (1) 双曲線 $x^2-y^2=4$　(2) 楕円 $9x^2+y^2=9$　ただし，点 $(-1,\ 0)$ は除く

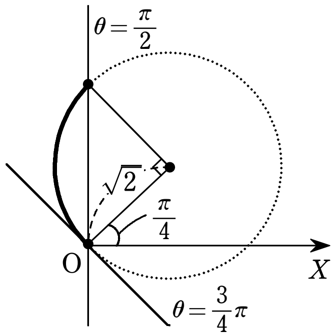
(3) 放物線 $y=1-2x^2$ の $-1\leqq x\leqq 1$ の部分

$\boxed{5}$ 解答 $(x,\ y)=(-\sqrt{6},\ \sqrt{3})$，$(\sqrt{6},\ -\sqrt{3})$ のとき最小値 -48

$\boxed{6}$ 解答 $y=\pm 2\sqrt{3}x-4$

$\boxed{7}$ 解答 (1) $2\sqrt{7}$　(2) $6\sqrt{3}$　(3) $\dfrac{5\sqrt{2}+12\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{8}$ 解答 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$



$\boxed{9}$ 解答 (1) $\left(\dfrac{2t}{4-t^2},\ \dfrac{4+t^2}{4-t^2}\right)$　(2) 双曲線 $4x^2-y^2=-1$　ただし，点 $(0,\ -1)$ を除く

$\boxed{1}$ (1) A：$x=4\cos\frac{5}{4}\pi=-2\sqrt{2}$，$y=4\sin\frac{5}{4}\pi=-2\sqrt{2}$

よって　$A(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$

B：$x=3\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$，$y=3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-3$

よって　$B(0,\ -3)$

(2) C：$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$

よって　$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\theta=\frac{7}{4}\pi$

したがって　　$\mathrm{C}\left(1,\ \frac{7}{4}\pi\right)$

D：$r=\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}=4$

よって　　$\cos\theta=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\frac{-2\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ から　　$\theta=\frac{4}{3}\pi$

したがって　　$\mathrm{D}\left(4,\ \frac{4}{3}\pi\right)$

$\boxed{2}$ (1)　$x^2+y^2+2x=0$

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を方程式に代入すると

$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+2r\cos\theta=0$

$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+2r\cos\theta=0$

$r^2+2r\cos\theta=0$

$r(r+2\cos\theta)=0$

よって，$r=0$ または $r=-2\cos\theta$

$r=-2\cos\theta$ において，$\theta=\frac{\pi}{2}$ とすると　$r=0$

$r=0$ は $r=-2\cos\theta$ に含まれるから，求める極方程式は　$r=-2\cos\theta$

(2)　$x^2-y^2=2$

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を方程式に代入すると

$r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=2$

$r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=2$

$r^2\cos 2\theta=2$

$\boxed{3}$ (1)　$r\cos\theta=1$

$x=r\cos\theta$ であるから　$x=1$

(2)　$r=2\sin\theta$

$r\fallingdotseq 0$ のとき，両辺に r をかけると　$r^2=2r\sin\theta$

よって　$x^2+y^2=2y$　……①

$r=0$ のとき，極 O を表すから，① において $x=0$，$y=0$ のときである。

したがって，求める方程式は　$x^2+y^2=2y$

参考　$x^2+(y-1)^2=1$ と変形できるから，この方程式は円を表す。

(3)　$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2$

$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)=2$

$$r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)=2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}r\cos\theta+\frac{1}{2}r\sin\theta=2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=2$$

よって　$y=-\sqrt{3}x+4$

(4)　$r^2\sin 2\theta=2$

$r^2\cdot 2\sin\theta\cos\theta=2$

$r\cos\theta\cdot r\sin\theta=1$

よって　$xy=1$

$\boxed{4}$ (1)　$x=t+\dfrac{1}{t}$　…… ①　　　$y=t-\dfrac{1}{t}$　…… ②

①，② を t，$\dfrac{1}{t}$ の連立方程式とみて解くと　　$t=\dfrac{x+y}{2}$，$\dfrac{1}{t}=\dfrac{x-y}{2}$

ゆえに　　$t\cdot\dfrac{1}{t}=\dfrac{x+y}{2}\cdot\dfrac{x-y}{2}$

よって　　双曲線 $x^2-y^2=4$

(2)　$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$y=\dfrac{6t}{1+t^2}$ から　　$(1+x)t^2=1-x$　…… ①

$yt^2-6t=-y$　…… ②

$x=-1$ は ① を満たさないから　　$x\neq-1$

①，② を t，t^2 の連立方程式とみて解くと　　$t=\dfrac{y}{3(1+x)}$，$t^2=\dfrac{1-x}{1+x}$

t を消去して　　$\left\{\dfrac{y}{3(1+x)}\right\}^2=\dfrac{1-x}{1+x}$　　　整理すると　　$9x^2+y^2=9$

よって　　楕円 $9x^2+y^2=9$　　　ただし，点 $(-1,\ 0)$ は除く。

(3)　$x=\sin\theta$ から　　$-1\leqq x\leqq 1$

また　　$y=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2x^2$

したがって　　放物線 $y=1-2x^2$ の $-1\leqq x\leqq 1$ の部分

$\boxed{5}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 $(x,\ y)$ は，

$$x=2\sqrt{6}\cos\theta,\quad y=2\sin\theta\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

と表されるから

$$x^2+6\sqrt{2}xy-6y^2=(2\sqrt{6}\cos\theta)^2+6\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}\cos\theta\cdot 2\sin\theta-6(2\sin\theta)^2$$

$$=24\cos^2\theta+48\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-24\sin^2\theta$$
$$=24(\cos^2\theta-\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)$$
$$=24(\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta)$$
$$=48\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{6}\leqq 2\theta+\frac{\pi}{6}<4\pi+\frac{\pi}{6}$

よって　$-1\leqq\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$

ゆえに，$x^2+6\sqrt{2}xy-6y^2$ は $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき最小となり，最小値は -48 である。

$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1$，$\frac{\pi}{6}\leqq 2\theta+\frac{\pi}{6}<4\pi+\frac{\pi}{6}$ から　$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi$，$\frac{7}{2}\pi$

よって　$\theta=\frac{2}{3}\pi$，$\frac{5}{3}\pi$

$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき　$x=-\sqrt{6}$，$y=\sqrt{3}$

$\theta=\frac{5}{3}\pi$ のとき　$x=\sqrt{6}$，$y=-\sqrt{3}$

ゆえに，最小値は -48 で，そのときの x，y の値は

$$(x,\ y)=(-\sqrt{6},\ \sqrt{3}),\ (\sqrt{6},\ -\sqrt{3})$$

$\boxed{6}$ $y=\frac{3}{4}x^2$ ……①，$x^2+\frac{y^2}{4}=1$ ……②

とおく．楕円 ② 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $x_1x+\frac{y_1y}{4}=1$ ……③

① と ③ から y を消去して　$16x_1x+3y_1x^2=16$　ゆえに　$3y_1x^2+16x_1x-16=0$

① と ③ が接するとき $\frac{D}{4}=0$ から　$(8x_1)^2-3y_1\cdot(-16)=0$

よって　$4x_1{}^2+3y_1=0$ … ④

一方，点 P は ② 上の点であるから　$x_1{}^2+\frac{y_1{}^2}{4}=1$ ……⑤

④, ⑤ から　$4-y_1{}^2+3y_1=0$　ゆえに　$(y_1+1)(y_1-4)=0$

よって　$y_1=-1,\ 4$ であるが，$-2\leqq y_1\leqq 2$であるから，$y_1=-1$ のみ適する．

このとき，⑤ から　$x_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，求める共通接線の方程式は　$y=\pm 2\sqrt{3}x-4$

$\boxed{7}$ (1) $\triangle$OAB において

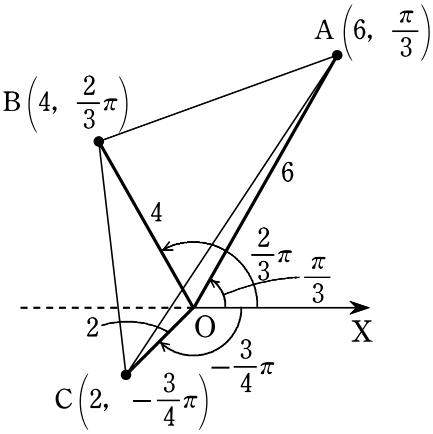
$\mathrm{OA}=6,\ \mathrm{OB}=4,$

$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$

よって，余弦定理により

$\mathrm{AB}^2=6^2+4^2-2\cdot6\cdot4\cos\dfrac{\pi}{3}=28$

ゆえに　$\mathrm{AB}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$



(2) $\triangle$OAB の面積を S_1 とすると

$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot4\sin\dfrac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$

(3) $\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{COA}=\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\pi}{4}$ で

あるから，$\triangle$OBC，$\triangle$OAC の面積をそれぞれ S_2，S_3 とすると

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=4\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

$$S_3=\frac{1}{2}\cdot6\cdot2\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=6\left(\sin\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$$

よって，$\triangle$ABC の面積を S とすると

$$S=S_1+S_2-S_3=6\sqrt{3}+(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}=\frac{5\sqrt{2}+12\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$$

別解　3 点 A，B，C を直交座標で表すと

$\mathrm{A}(3,\ 3\sqrt{3})$，$\mathrm{B}(-2,\ 2\sqrt{3})$，$\mathrm{C}(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-5,\ -\sqrt{3})$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-\sqrt{2}-3,\ -\sqrt{2}-3\sqrt{3})$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\left|-5(-\sqrt{2}-3\sqrt{3})-(-\sqrt{3})(-\sqrt{2}-3)\right|=\dfrac{5\sqrt{2}+12\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{8}$ $r=2(\cos\theta+\sin\theta)$ の両辺を r 倍して

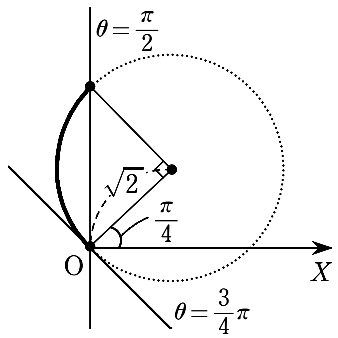
$r^2=2r\cos\theta+2r\sin\theta$

ゆえに　$x^2+y^2=2x+2y$

すなわち　$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ より，曲線は右の図の太い実線部分のよう

になるから，求める曲線の長さは　$\sqrt{2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$



別解　$r=2(\cos\theta+\sin\theta)$ から　$r=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

よって，極方程式 $r=2(\cos\theta+\sin\theta)$ は

中心が $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$，半径 $\sqrt{2}$

の円を表す。

以下同様。

$\boxed{9}$ (1)　直線 ℓ の方程式は　$y=tx+1$ ……①

①を $y=2x-1$ に代入して整理すると

$(2-t)x=2$

$t=2$ はこの等式を満たさないから

$t\neq 2$

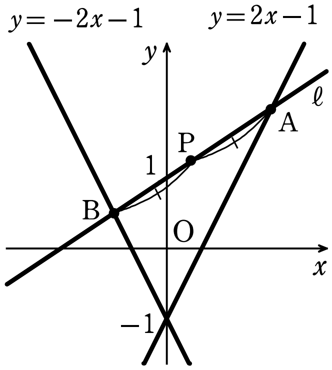
よって，A の x 座標は　$x=\dfrac{2}{2-t}$

また，①を $y=-2x-1$ に代入して整理すると

$(2+t)x=-2$

$t=-2$ はこの等式を満たさないから　$t\neq -2$

よって，B の x 座標は　$x=-\dfrac{2}{2+t}$



P は線分 AB の中点であるから，P の x 座標は　$x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{2-t}-\dfrac{2}{2+t}\right)=\dfrac{2t}{4-t^2}$

P は直線①上の点であるから，P の y 座標は　$y=t\cdot\dfrac{2t}{4-t^2}+1=\dfrac{4+t^2}{4-t^2}$

したがって，P の座標を媒介変数 t で表すと　$\left(\dfrac{2t}{4-t^2},\ \dfrac{4+t^2}{4-t^2}\right)$

(2)　$x=\dfrac{2t}{4-t^2}$，$y=\dfrac{4+t^2}{4-t^2}$ から

$xt^2+2t=4x$ ……①

$(y+1)t^2=4y-4$ ……②

また，$y=-1$ は②を満たさないから　$y\neq -1$

①，②を t，t^2 の連立方程式とみて解くと　$t=\dfrac{4x}{y+1}$，$t^2=\dfrac{4(y-1)}{y+1}$

t を消去して　$\left(\dfrac{4x}{y+1}\right)^2=\dfrac{4(y-1)}{y+1}$

式を整理すると　$4x^2-y^2=-1$

ここで，2 点 A，B が一致するとき，すなわち，直線 ℓ が 2 直線の交点 $(0,\ -1)$ を通るとき，中点 P は存在しない。

よって，求める曲線は　双曲線 $4x^2-y^2=-1$　ただし，点 $(0,\ -1)$ を除く。