数学②　第２回試練　指数対数

BASIC問題

$\boxed{1}$ (1) $\sqrt[3]{24}+\dfrac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{9}}$ を簡単にせよ。

(2) $\dfrac{\sqrt{2^3}\times 2^2\times(2^2\times 3^2)^3}{6^5\times 4^2}\div\dfrac{\sqrt{2}\times 2}{2^3}$ を簡単にせよ。

$\boxed{2}$ 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1)　$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[6]{7}$　　　(2)　2^{30}，3^{20}，10^{10}

$\boxed{3}$ $x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=3$ のとき，$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$，$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の計算をせよ。

$$\frac{1}{2}\log_3 49+\log_3\frac{12}{7}-\log_3\frac{4}{9}$$

$\boxed{5}$ (1)　$\log_5 2=a$ とおくとき，$\log_{25}64$ を a で表せ。

(2)　$\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$ とおくとき，$\log_6 84$ を a，b で表せ。

$\boxed{6}$ 70 % の花粉を除去できるフィルターがある．99.99 % より多くの花粉を一度に除去するには，このフィルターは最低何枚必要か．ただし $\log_{10}3=0.4771$ とする．

$\boxed{7}$

Standard問題篇

$\boxed{8}$ $5^x=7^y=35^4$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の値を求めよ。

$\boxed{9}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2^x-24\cdot 2^{-x}=5$　　　(2)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x+1}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+3}>\dfrac{2}{81}$

$\boxed{10}$ 次の不等式を解け。

(1)　$\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqq 0$　　　(2)　$2\log_3(x-4)-\log_3(x+6)\leqq 2$

(3)　$2-\log_{\frac{1}{3}}x>(\log_3 x)^2$

$\boxed{11}$ ある自然数 n に対して 2^n は 22 桁で最高位の数字が 4 となる。
$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，n の値を求めよ。また，2^n の末尾の数字を求めよ。

$\boxed{12}$ 0.15^{70} を小数で表すとき，次の問いに答えよ。

(1) 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

(2) (1)において，その初めて現れる 0 でない数字を答えよ。

ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

実戦問題篇

13 連立方程式 $\begin{cases} 8\cdot 3^x - 3^y = -27 \\ \log_2(x+1) - \log_2(y+3) = -1 \end{cases}$ を解け。

14 関数 $y=8(2^x+2^{-x})-(4^x+4^{-x})-10$ について，$2^x+2^{-x}=t$ とおくとき，y を t の式で表せ。また，y の最大値とそのときの x の値を求めよ。

15 不等式 $\log_x(2x-y+1)>2$ が表す領域を図示せよ。ただし，$x>0$ かつ $x\neq 1$ とする。

数学②　第２回試練　指数対数

$\boxed{1}$ 解答 (1)　$3\sqrt[3]{3}$　(2)　12

$\boxed{2}$ 解答 (1)　$\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$　(2)　$2^{30}<3^{20}<10^{10}$

$\boxed{3}$ 解答 順に 7，$\sqrt{5}$

$\boxed{4}$ 解答 3

$\boxed{5}$ 解答 (1)　$3a$　(2)　$\dfrac{2+a+ab}{1+a}$

$\boxed{6}$ 解答 8 枚

$\boxed{8}$ 解答 $\dfrac{1}{4}$

$\boxed{9}$ 解答 (1)　$x=3$　(2)　$x<1$

$\boxed{10}$ 解答 (1)　$1<x\leqq 2$　(2)　$4<x\leqq 19$　(3)　$\dfrac{1}{3}<x<9$

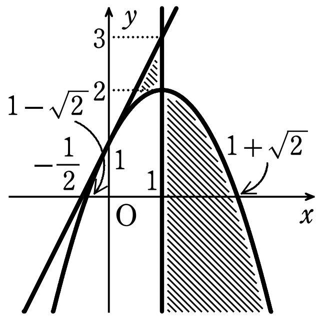
$\boxed{11}$ 解答 $n=72$，末尾の数字は 6

$\boxed{12}$ 解答 (ア)　58　(イ)　2

$\boxed{13}$ 解答 $x=3$，$y=5$

$\boxed{14}$ 解答 $y=-t^2+8t-8$，$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$ で最大値 8

$\boxed{15}$ 解答 〔図〕 境界線を含まない



$\boxed{1}$ $\sqrt[3]{24}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{3^2}-\sqrt[3]{\frac{3}{3^3}}=2\sqrt[3]{3}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{3}-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}=3\sqrt[3]{3}$

$$\frac{\sqrt{2^3}\times 2^2\times(2^2\times 3^2)^3}{6^5\times 4^2}\div\frac{\sqrt{2}\times 2}{2^3}=\frac{2^{\frac{3}{2}}\times 2^2\times 2^{2\times 3}\times 3^{2\times 3}}{(2\times 3)^5\times(2^2)^2}\times\frac{2^3}{2^{\frac{1}{2}}\times 2}$$

$$=\frac{2^{\frac{3}{2}}\times 2^2\times 2^6\times 3^6}{2^5\times 3^5\times 2^4}\times\frac{2^3}{2^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2^{\frac{3}{2}+2+6+3-5-4-\frac{3}{2}}\times 3^{6-5}=2^2\times 3^1=12$$

$\boxed{2}$ (1)　3 つの数を，それぞれ 6 乗すると

$$(\sqrt{2})^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8\text{，}(\sqrt[3]{3})^6=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9\text{，}(\sqrt[6]{7})^6=7$$

$7<8<9$ であるから　　$(\sqrt[6]{7})^6<(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$　　ゆえに　　$\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

別解　$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{3\cdot\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$，$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{2\cdot\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$，$\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{6}}$

$7<8<9$ であるから　　$7^{\frac{1}{6}}<8^{\frac{1}{6}}<9^{\frac{1}{6}}$　　すなわち　　$\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

(2)　$2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$，$3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$

$8<9<10$ であるから　　$8^{10}<9^{10}<10^{10}$　　すなわち　　$2^{30}<3^{20}<10^{10}$

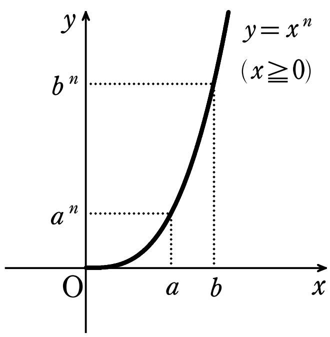
注意　解答では，次の事柄を使っている。

[1]　$a>0$，$b>0$ で，n が自然数のとき

$a<b \iff a^n<b^n$

[2]　$a>0$，$b>0$ で，n が自然数のとき

$a<b \iff a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}$



$\boxed{3}$ $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^2-2\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{4}}=\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^2-2=3^2-2=7$

$\left(x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}\right)^2=x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}+2=3+2=5$

$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}>0$ であるから　　$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}=\sqrt{5}$

$\boxed{4}$ $\frac{1}{2}\log_3 49+\log_3\frac{12}{7}-\log_3\frac{4}{9}=\log_3\left(49^{\frac{1}{2}}\times\frac{12}{7}\div\frac{4}{9}\right)=\log_3\left\{(7^2)^{\frac{1}{2}}\times\frac{12}{7}\times\frac{9}{4}\right\}$

$=\log_3\left(7\times\frac{12}{7}\times\frac{9}{4}\right)=\log_3 3^3=3$

5 (1)　$\log_{25}64=\dfrac{\log_5 64}{\log_5 25}=\dfrac{6\log_5 2}{2}=3\log_5 2=3a$

(2)　$\log_6 84=\dfrac{\log_2(2^2\times3\times7)}{\log_2(2\times3)}=\dfrac{2+\log_2 3+\log_2 7}{1+\log_2 3}$

ここで　$\log_2 7=\dfrac{\log_3 7}{\log_3 2}=\log_2 3\cdot\log_3 7=ab$　　よって　$\log_6 84=\dfrac{2+a+ab}{1+a}$

6 1枚のフィルターで30％の花粉が残るから，n 枚のフィルターでは 0.3^n の花粉が残る.

よって，求める条件は　$0.3^n<1-0.9999$　すなわち　$0.3^n<0.0001$

この両辺の常用対数をとると　$n\log_{10}0.3<\log_{10}0.0001$

ゆえに　$n(\log_{10}3-1)<-4$ から　$n(-0.5229)<-4$

よって　$n>\dfrac{4}{0.5229}=7.6\cdots\cdots$　したがって　8枚.

7

8 $5^x=7^y=35^4$ から　$\log_{10}5^x=\log_{10}7^y=\log_{10}35^4$

よって　$x\log_{10}5=y\log_{10}7=4\log_{10}35$

したがって　$x=\dfrac{4\log_{10}35}{\log_{10}5}$，$y=\dfrac{4\log_{10}35}{\log_{10}7}$

ゆえに　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{\log_{10}5+\log_{10}7}{4\log_{10}35}=\dfrac{\log_{10}35}{4\log_{10}35}=\dfrac{1}{4}$

9 (1)　方程式の両辺に 2^x (>0) を掛けて　$(2^x)^2-24=5\cdot2^x$

ゆえに　$(2^x)^2-5\cdot2^x-24=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2-5t-24=0$

よって　$(t+3)(t-8)=0$　　$t>0$ であるから　$t=8$

ゆえに　$2^x=8$　すなわち　$2^x=2^3$

したがって　$x=3$

(2)　不等式を変形すると　$\dfrac{1}{9}\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2+\dfrac{1}{27}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-\dfrac{2}{81}>0$

両辺に81を掛けて　$9\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2+3\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-2>0$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$9t^2+3t-2>0$

よって　$(3t-1)(3t+2)>0$

$3t+2>0$ であるから　$3t-1>0$　すなわち　$t>\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{3}$　すなわち　$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^1$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから　$x<1$

$\boxed{10}$ (1)　真数は正であるから，$x-1>0$ かつ $3-x>0$ より　$1<x<3$　……①

$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)=\dfrac{\log_2(3-x)}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2(3-x)$ であるから，不等式は

$$\log_2(x-1)-\log_2(3-x)\leqq 0$$

ゆえに　$\log_2(x-1)\leqq\log_2(3-x)$

底2は1より大きいから　$x-1\leqq 3-x$

よって　$x\leqq 2$　……②

①，② から，解は　$1<x\leqq 2$

(2)　真数は正であるから，$x-4>0$ かつ $x+6>0$ より　$x>4$　……①

不等式から　$\log_3(x-4)^2\leqq 2+\log_3(x+6)$

すなわち　$\log_3(x-4)^2\leqq\log_3 9(x+6)$

底3は1より大きいから　$(x-4)^2\leqq 9(x+6)$

整理して　$x^2-17x-38\leqq 0$　　ゆえに　$(x+2)(x-19)\leqq 0$

したがって　$-2\leqq x\leqq 19$　……②

①，② から，解は　$4<x\leqq 19$

(3)　真数は正であるから　$x>0$　……①

$\log_{\frac{1}{3}}x=\dfrac{\log_3 x}{\log_3\frac{1}{3}}=-\log_3 x$ であるから，不等式は　$2+\log_3 x>(\log_3 x)^2$

ゆえに　$(\log_3 x)^2-\log_3 x-2<0$

したがって　$(\log_3 x+1)(\log_3 x-2)<0$

よって　$-1<\log_3 x<2$　すなわち　$\log_3\frac{1}{3}<\log_3 x<\log_3 9$

底3は1より大きいから　$\frac{1}{3}<x<9$　　これは ① を満たす。

$\boxed{11}$ 2^n は22桁で最高位の数字が4であるから　$4\times 10^{21}\leqq 2^n<5\times 10^{21}$

各辺の常用対数をとると　$\log_{10}(4\times 10^{21})\leqq\log_{10}2^n<\log_{10}(5\times 10^{21})$

$5\times 10^{21}=10^{22}\div 2$ であるから　$2\log_{10}2+21\leqq n\log_{10}2<22-\log_{10}2$

$\log_{10}2=0.3010$ として計算すると　$21.6020\leqq n\times 0.3010<21.6990$

よって　$71.76\cdots\leqq n<72.08\cdots$

n は自然数であるから　$n=72$

$2^4=16$ であるから，$(2^4)^m$ (m は自然数) の末尾の数字は常に 6 である。

$2^{72}=(2^4)^{18}$ であるから，2^{72} の末尾の数字は　6

12 (ア)　$\log_{10}0.15^{70}=70\log_{10}\dfrac{3}{20}=70(\log_{10}3-\log_{10}2-\log_{10}10)=70(0.4771-0.3010-1)$

$=-57.673$

よって　　$-58<\log_{10}0.15^{70}<-57$

ゆえに　　$10^{-58}<0.15^{70}<10^{-57}$

したがって，0.15^{70} を小数で表すと，小数第 $^{ア}58$ 位に 0 でない数字が現れる。

(イ)　$0.15^{70}=10^{-57.673}=10^{0.327}\times10^{-58}$

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ より $10^{0.3010}=2$，$10^{0.4771}=3$ であるから

$2<10^{0.327}<3$

よって　　$2\times10^{-58}<0.15^{70}<3\times10^{-58}$

したがって，0.15^{70} を小数で表したとき，初めて現れる 0 でない数字は　$^{イ}2$

13 $\begin{cases} 8\cdot 3^x-3^y=-27 & \cdots\cdots ① \\ \log_2(x+1)-\log_2(y+3)=-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とする。

真数は正であるから　$x+1>0,\ y+3>0$

すなわち　$x>-1,\ y>-3$　……③

②から　$\log_2\dfrac{x+1}{y+3}=\log_2 2^{-1}$

よって　$\dfrac{x+1}{y+3}=\dfrac{1}{2}$ から　$y+3=2(x+1)$

ゆえに　$y=2x-1$　……④

④を①に代入すると　$8\cdot 3^x-3^{2x-1}=-27$

この式の両辺に3を掛けて整理すると　$(3^x)^2-24\cdot 3^x-81=0$

ここで，$3^x=t$ とおくと，③より $t>\dfrac{1}{3}$ である。

$t^2-24t-81=0$ から　$(t-27)(t+3)=0$

$t>\dfrac{1}{3}$ であるから　$t=27$

ゆえに　$3^x=27$　　したがって　$x=3$

このとき，④から　$y=2\cdot 3-1=5$

これらはともに③を満たす。

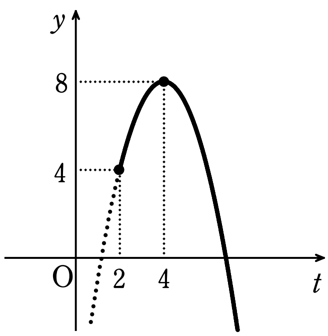
14 $4^x+4^{-x}=2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}$

$=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

ゆえに　$y=8t-(t^2-2)-10$　　よって　$y=-t^2+8t-8$

$2^x>0,\ 2^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$



等号は $2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき成り立つ。

ゆえに　$t\geqq 2$　……①

また　$y=-(t-4)^2+8$

①の範囲において，y は $t=4$ で最大値8をとる。

$t=4$ のとき　$2^x+2^{-x}=4$

両辺に 2^x を掛けて整理すると　$(2^x)^2-4\cdot 2^x+1=0$

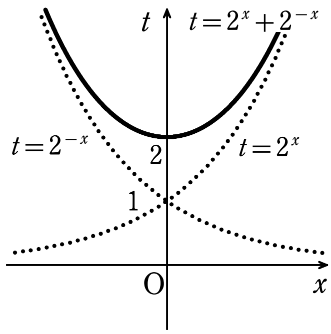
$2^x>0$ であるから　$2^x=2\pm\sqrt{3}$　　よって　$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$

したがって　$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$ で最大値8

参考　$t=2^x+2^{-x}$ のグラフは，右の図のようになり，
1 つの t の値に対応する x の値の個数は

$t<2$ のとき　0 個
$t=2$ のとき　1 個
$t>2$ のとき　2 個

となる。



15　真数は正であるから　　$2x-y+1>0$

よって　　$y<2x+1$　……①

また，$x>0$ かつ $x\neq 1$ は底の条件を満たす。

与えられた不等式を変形すると　　$\log_x(2x-y+1)>\log_x x^2$

[1]　$x>1$ のとき　$2x-y+1>x^2$

ゆえに　　$y<-x^2+2x+1$

すなわち　$y<-(x-1)^2+2$

[2]　$0<x<1$ のとき　$2x-y+1<x^2$

ゆえに　　$y>-x^2+2x+1$

すなわち　$y>-(x-1)^2+2$

[1], [2] より

直線 $x=1$ の右側と，放物線 $y=-(x-1)^2+2$ の
下側の共通部分

および

直線 $x=0$ の右側かつ $x=1$ の左側と，
放物線 $y=-(x-1)^2+2$ の上側の共通部分

これと ① の共通部分が求める領域で，右の図の斜線部分。
ただし，境界線を含まない。