制限時間なし

BASIC問題

1　2つの曲線 $y=x^2$ と $y=2\log x+a$ が接するとき，次の問いに答えよ。

(1)　定数 a の値を求めよ。

(2)　これらの曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

2　xy 平面上の曲線 C：$y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ として，x 軸上に点 $\mathrm{Q}(x,\ 0)$ をとり，線分 PQ を1辺とする正方形 L を xy 平面に垂直に立てる。ただし，P と Q が一致するときは，L は1点であるとする。点 P が曲線 C 上を動くとき，L が通過してできる立体の体積 V を求めよ。

3　次の曲線または直線で囲まれた部分が，x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

(1)　$y=x^2-2$，$y=2x^2-3$　　　(2)　$y=\sqrt[3]{x}$，$y=x$　$(x \geqq 0)$

4　曲線 $y=\log(x+1)$ と y 軸および直線 $y=2$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ。

STANDARD問題

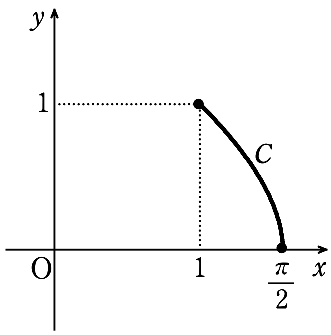
5　曲線 C は媒介変数 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて

$$x=\cos\theta+\theta\sin\theta,\quad y=\cos\theta$$

と表されており，右の図のような形をしている。

(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して，$\dfrac{dy}{dx}$ を θ を用いて表せ。

(2)　曲線 C と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。



6　放物線 $y=x^2-4$ と直線 $y=3x$ とで囲まれた部分が，x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ。

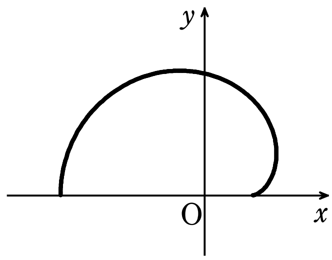
7　曲線 $y=2\sin x$ $\left(\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi\right)$ と直線 $y=1$ で囲まれた部分が，$y=1$ の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

8　(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$ を求めよ。

(2)　不等式 $x^2+y^2+\log(1+z^2) \leqq \log 2$ の定める立体の体積を求めよ。

実戦問題

$\boxed{9}$ 媒介変数 t によって，$x=2\cos t-\cos 2t$，
$y=2\sin t-\sin 2t\ (0\leqq t\leqq\pi)$ と表される右図の曲線と，
x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。



$\boxed{10}$ 底面の半径 1，高さ 1 の直円柱を，底面の直径を含み底面と $30°$ の角をなす平面で切断するとき，底面とこの平面で挟まれた部分の体積を求めよ。

$\boxed{11}$ 空間における点 A$(4,\ -2,\ -3)$，点 B$(-1,\ 3,\ 2)$ を通る直線 ℓ を，z 軸の周りに 1 回転してできる曲面を S とする。

(1) 平面 $z=t$ と直線 ℓ の交点 P の x 座標，y 座標を t で表せ。

(2) 平面 $z=2$，平面 $z=-3$，曲面 S で囲まれた立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　(1)　$a=1$　　(2)　$\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$

$\boxed{2}$ 解答　$\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{3}$ 解答　(1)　$\dfrac{88}{15}\pi$　　(2)　$\dfrac{4}{15}\pi$

$\boxed{4}$ 解答　$\dfrac{\pi}{2}(e^4-4e^2+7)$

$\boxed{5}$ 解答　(1)　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\tan\theta}{\theta}$　　(2)　$\dfrac{\pi^2-4}{16}$

$\boxed{6}$ 解答　132π

$\boxed{7}$ 解答　$\pi(2\pi-3\sqrt{3})$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　$1-\dfrac{\pi}{4}$　　(2)　$\pi(4-\pi)$

$\boxed{9}$ 解答　3π

$\boxed{10}$ 解答　$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

$\boxed{11}$ 解答　(1)　x 座標は $-t+1$，y 座標は $t+1$　　(2)　$V=\dfrac{100}{3}\pi$

$\boxed{1}$ (1)　$f(x)=x^2$，$g(x)=2\log x+a$ とすると　　$f'(x)=2x$，$g'(x)=\dfrac{2}{x}$

接点の x 座標を t（$t>0$）とすると，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ が成り立つから

$$t^2=2\log t+a \quad \cdots\cdots ① \qquad\qquad 2t=\frac{2}{t} \quad \cdots\cdots ②$$

$t>0$ であるから，② より　$t=1$

① に代入して　$a=1$

このとき，共有点は点 (1，1) のみで適する。

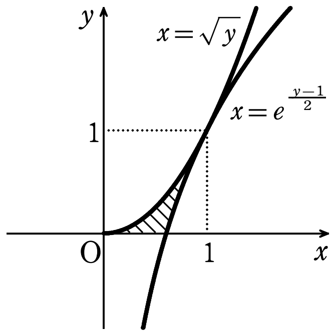
(2)　$y=x^2$ から　　$x=\sqrt{y}$

$y=2\log x+1$ から　　$x=e^{\frac{y-1}{2}}$

よって，求める面積は

$$\int_0^1\left(e^{\frac{y-1}{2}}-\sqrt{y}\right)dy=\left[2e^{\frac{y-1}{2}}-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

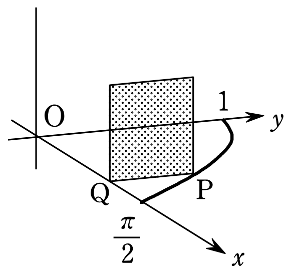
$$=\frac{4}{3}-\frac{2}{\sqrt{e}}$$



$\boxed{2}$ PQ$=\cos x$ であるから，線分 PQ を 1 辺とする正方形 L の面積は　　$\mathrm{PQ}^2=\cos^2 x$

よって　　$V=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$$=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$



$\boxed{3}$ 求める体積を V とする。

(1)　$x^2-2=2x^2-3$ とすると　$x^2=1$　　　よって　　$x=\pm1$

$-1\leqq x\leqq 1$ において　$2x^2-3\leqq x^2-2\leqq 0$

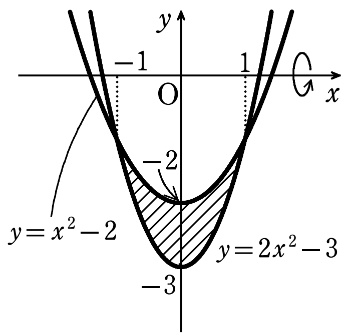
したがって

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\{(2x^2-3)^2-(x^2-2)^2\}dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}(3x^4-8x^2+5)dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{1}(3x^4-8x^2+5)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{3}{5}x^5-\frac{8}{3}x^3+5x\right]_0^1=\frac{88}{15}\pi$$



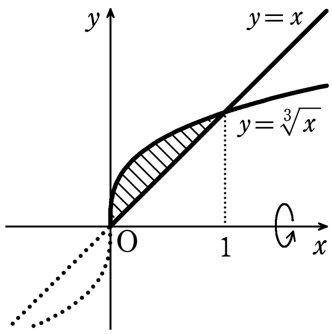
(2)　$x \geqq 0$ で $\sqrt[3]{x}=x$ とすると　$x=0,\ 1$

$0 \leqq x \leqq 1$ において　$0 \leqq x \leqq \sqrt[3]{x}$

したがって

$$V=\pi\int_0^1\{(\sqrt[3]{x})^2-x^2\}dx=\pi\int_0^1\left(x^{\frac{2}{3}}-x^2\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{4}{15}\pi$$



$\boxed{4}$　$y=\log(x+1)$ から　　$x=e^y-1$

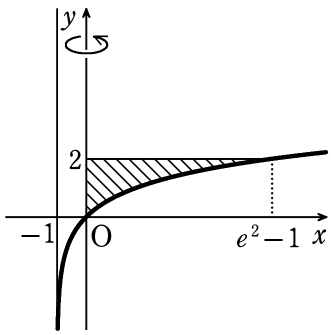
求める回転体の体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^2(e^y-1)^2dy=\pi\int_0^2(e^{2y}-2e^y+1)dy$$

$$=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}-2e^y+y\right]_0^2$$

$$=\pi\left\{\left(\frac{e^4}{2}-2e^2+2\right)-\left(\frac{1}{2}-2\right)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^4-4e^2+7)$$



$\boxed{5}$　(1)　$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta+\sin\theta+\theta\cos\theta=\theta\cos\theta$，　$\dfrac{dy}{d\theta}=-\sin\theta$

よって，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{-\sin\theta}{\theta\cos\theta}=-\dfrac{\tan\theta}{\theta}$

(2)　(1) から，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\dfrac{dx}{d\theta} \geqq 0$

よって，このとき x は単調に増加するから，θ と x の対応は右のようになる。

θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
x	$1 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$y \geqq 0$ であるから，求める面積は

$$\int_1^{\frac{\pi}{2}}ydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\theta\cos\theta\, d\theta$$

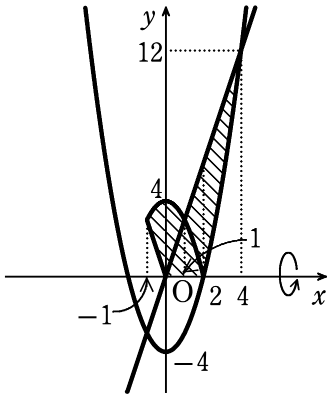
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\theta+\theta\cos2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\theta\cdot\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2\theta}{2}d\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}\left[\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}(-1-1)\right\}$$

$$=\frac{\pi^2-4}{16}$$

$\boxed{6}$ 放物線と直線の概形から，立体は図の斜線部分を x 軸の周りに１回転してできる。
よって，求める体積 V は



$$V=\pi\int_{-1}^{0}\{(4-x^2)^2-(-3x)^2\}dx+\pi\int_0^1(4-x^2)^2dx$$

$$+\pi\int_1^2(3x)^2dx+\pi\int_2^4\{(3x)^2-(x^2-4)^2\}dx$$

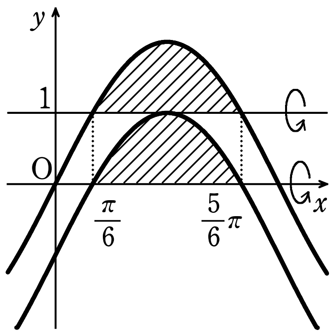
$$=2\pi\int_0^1(4-x^2)^2dx-\pi\int_2^4(x^2-4)^2dx$$

$$-\pi\int_{-1}^{0}(-3x)^2dx+\pi\int_1^4(3x)^2dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_0^1-\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_2^4$$

$$-\pi\left[3x^3\right]_{-1}^{0}+\pi\left[3x^3\right]_1^4=132\pi$$

$\boxed{7}$ 求める回転体の体積は，曲線 $y=2\sin x$ を y 軸方向に -1 だけ平行移動した曲線が，x 軸の周りに１回転してできる回転体の体積と同じであるから



$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(2\sin x-1)^2dx$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(4\sin^2 x-4\sin x+1)dx$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\{2(1-\cos 2x)-4\sin x+1\}dx$$

$$=\pi\Big[-\sin 2x+4\cos x+3x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}$$

$$=\pi(2\pi-3\sqrt{3})$$

$\boxed{8}$ (1) $\displaystyle\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\int_0^1dt-\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$

$$\int_0^1dt=\Big[t\Big]_0^1=1$$

$t=\tan\theta$ とおくと　$dt=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

t	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$

よって　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt=1-\frac{\pi}{4}$

(2)　与えられた不等式の定める立体を A とする。

与えられた不等式から　$x^2+y^2 \leqq \log 2-\log(1+z^2)$　……①

$x^2+y^2 \geqq 0$ であるから　$\log 2-\log(1+z^2) \geqq 0$

すなわち　$\log(1+z^2) \leqq \log 2$

底 e は 1 より大きいから　$1+z^2 \leqq 2$　　よって　$-1 \leqq z \leqq 1$

立体 A を平面 $z=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で切ったときの切り口を表す関係式は

$$x^2+y^2 \leqq \log 2-\log(1+t^2),\ z=t$$

ゆえに，切り口の面積を $S(t)$ とすると　$S(t)=\pi\{\log 2-\log(1+t^2)\}$

立体 A は xy 平面に関して対称であるから，求める体積を V とすると

$$V=2\int_0^1 S(t)\,dt=2\pi\int_0^1\{\log 2-\log(1+t^2)\}dt$$

$$=2\pi\Big[t\log 2\Big]_0^1-2\pi\Big[t\log(1+t^2)\Big]_0^1+2\pi\int_0^1 t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt$$

$$=2\pi\log 2-2\pi\log 2+4\pi\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=4\pi\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt$$

したがって，(1) から　$V=4\pi\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=\pi(4-\pi)$

$\boxed{9}$ 図から，$0 \leqq t \leqq \pi$ では常に　$y \geqq 0$

また，$y=2\sin t(1-\cos t)$ であるから，$y=0$ とすると　$\sin t=0$ または $\cos t=1$

$0 \leqq t \leqq \pi$ から　$t=0,\ \pi$

更に　$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t+2\sin 2t$

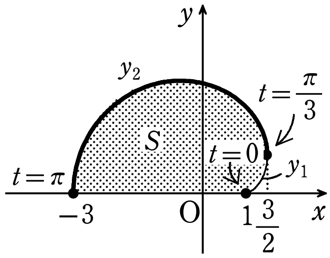
$$=2\sin t(2\cos t-1)$$

$0<t<\pi$ で $\dfrac{dx}{dt}=0$ とすると，$\cos t=\dfrac{1}{2}$ から

$$t=\frac{\pi}{3}$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
x	1	↗	$\dfrac{3}{2}$	↘	-3

よって，x の値の増減は右上の表のようになる。



ゆえに，$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{3}$ における y を y_1，$\frac{\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$ における y を y_2 とすると

$$S=\int_{-3}^{\frac{3}{2}} y_2 dx-\int_{1}^{\frac{3}{2}} y_1 dx=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{dt}dt-\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_{\pi}^{0} y\frac{dx}{dt}dt=\int_{\pi}^{0}(2\sin t-\sin 2t)(-2\sin t+2\sin 2t)dt$$

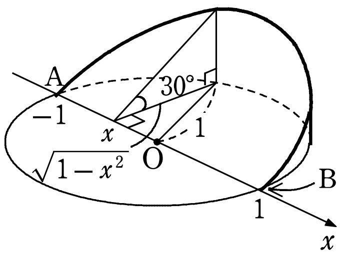
$$=2\int_{0}^{\pi}(2\sin^2 t-3\sin t\sin 2t+\sin^2 2t)dt$$

$$=2\int_{0}^{\pi}\left(2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}-3\sin t\cdot 2\sin t\cos t+\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt$$

$$=2\int_{0}^{\pi}\left(\frac{3}{2}-\cos 2t-\frac{1}{2}\cos 4t-6\sin^2 t\cos t\right)dt$$

$$=2\left[\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{8}\sin 4t-2\sin^3 t\right]_{0}^{\pi}=3\pi$$

$\boxed{10}$ 底面の直径 AB を x 軸に，中心を原点 O とする。



座標が x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ である点を通り，x 軸に垂直な平面で題意の立体を切ったときの切り口は直角三角形で，その面積は

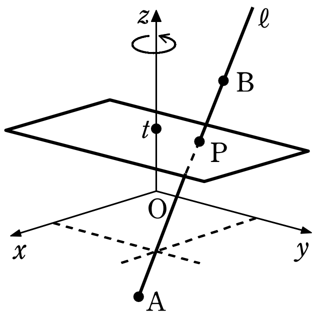
$$\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}=\frac{1-x^2}{2\sqrt{3}}$$

したがって，求める体積 V は

$$V=\int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{2\sqrt{3}}dx=\frac{2}{2\sqrt{3}}\int_{0}^{1}(1-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{0}^{1}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$\boxed{11}$ (1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 3,\ 2)-(4,\ -2,\ -3)=(-5,\ 5,\ 5)$



平面 $z=t$ と直線 ℓ の交点 P の座標を $(x,\ y,\ t)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (k は実数) とすると

$$(x-4,\ y+2,\ t+3)=(-5k,\ 5k,\ 5k)$$

よって　　$x-4=-5k$，$y+2=5k$，$t+3=5k$

すなわち　$k=\frac{t+3}{5}$，$x=-t+1$，$y=t+1$

ゆえに，交点 P の x 座標は　$-t+1$，

y 座標は　$t+1$

(2)　平面 $z=t$ と曲面 S の交わりは，中心が $(0,\ 0,\ t)$ で，点 $\mathrm{P}(-t+1,\ t+1,\ t)$ を通る円であり，その円の半径は

$$\sqrt{\{(-t+1)-0\}^2+\{(t+1)-0\}^2+(t-t)^2}=\sqrt{2(t^2+1)}$$

この円の面積を $S(t)$ とすると　$S(t)=\pi\left\{\sqrt{2(t^2+1)}\right\}^2=2\pi(t^2+1)$

よって，求める体積 V は

$$V=\int_{-3}^{2}S(t)\,dt=\int_{-3}^{2}2\pi(t^2+1)\,dt=2\pi\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_{-3}^{2}$$

$$=2\pi\left\{\frac{2^3-(-3)^3}{3}+2-(-3)\right\}=\frac{100}{3}\pi$$