BASIC問題

1 A $(3-4i)$，B $(-2+3i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を 2：3 に内分する点 C　　(2) 線分 AB の中点 M

(3) 線分 AB を 5：4 に外分する点 D

2 α，β は複素数で $|\alpha-\beta|=|1-\alpha\overline{\beta}|$ のとき，$|\beta|$ の値を求めよ。ただし，$|\alpha|\fallingdotseq 1$ とする。

3 2 つの複素数 $\alpha=-2-2\sqrt{3}\,i$，$\beta=-1+i$ について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

4 $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$ を計算せよ。

5 $\alpha=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\beta=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とする。複素数平面上で，点 α を点 β を中心として時計回りに $\dfrac{3}{4}\pi$ 回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

STANDARD問題

6 方程式 $z^4=-8+8\sqrt{3}\,i$ を解け。

7 複素数平面上の 3 点 A$(1+3i)$，B$(-2+5i)$，C$(2-2i)$ を頂点とする △ABC について，∠BAC の大きさを求めよ。

8 $\alpha=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^9+\alpha^8+\cdots\cdots+\alpha+1$　　(2) $\alpha^9\alpha^8\cdots\cdots\alpha$

9 複素数平面上の点 z が条件 $2|z-i|=|z+2i|$ を満たすとき，点 z の全体は円を描く．その円の中心 α と半径 r を求めよ．

10 異なる 3 つの複素数 α，β，γ の間に等式 $\gamma+\sqrt{3}\,i\alpha=(1+\sqrt{3}\,i)\beta$ が成り立つ。

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を極形式で表せ。

(2) 3 点 A (α)，B (β)，C (γ) を頂点とする △ABC の 3 つの角の大きさを求めよ。

11 点 O を原点とする複素数平面上で，2 つの複素数 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$，$\beta=\alpha^3$ を表す点をそれぞれ A，B とする。

(1) ∠AOB を求めよ。

(2) 3 つの線分の比 OA：OB：AB を求めよ。

(3) 3 点 O，A，B を通る円の方程式を複素数 z を用いて表せ。

12 2つの複素数 w，z が $w=\dfrac{2z-i}{z+i}$ を満たす。複素数平面上で，点 z が原点を中心とする半径2の円上を動くとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 w はどのような図形を描くか。　(2)　w の絶対値 $|w|$ の最大値を求めよ。

実戦問題

13 α，β は複素数とする。$|\alpha|=|\beta|=2$，$\alpha+\beta+2=0$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\alpha\beta$　(2)　$\alpha^2+\beta^2$

14 $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$，$z^6+\dfrac{1}{z^6}=1$ のとき，θ の値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

15 z は $|z-\sqrt{3}-i|\leqq1$ を満たす複素数で，$w=itz$ (t は実数) とする。
t が $0<t\leqq1$ を満たす値をとって変わるとき

(1)　点 w の存在範囲を図示せよ。

(2)　w の偏角 θ のとりうる値の範囲を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$\boxed{1}$ 解答 (1) $\dfrac{5-6i}{5}$　(2) $\dfrac{1-i}{2}$　(3) $-22+31i$

$\boxed{2}$ 解答 $|\beta|=1$

$\boxed{3}$ 解答 $\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の順に　$4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$，$2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$

$\boxed{4}$ 解答 $-16+16\sqrt{3}\,i$

$\boxed{5}$ 解答 $\gamma=\dfrac{\sqrt{6}-1}{2}-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}i$

$\boxed{6}$ 解答 $z=\pm(\sqrt{3}+i)$，$\pm(1-\sqrt{3}\,i)$

$\boxed{7}$ 解答 $\dfrac{3}{4}\pi$

$\boxed{8}$ 解答 (1) 0　(2) -1

$\boxed{9}$ 解答 $\alpha=2i, r=2$

$\boxed{10}$ 解答 (1) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$　(2) $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{6}$

$\boxed{11}$ 解答 (1) $\dfrac{\pi}{2}$　(2) $1:4:\sqrt{17}$　(3) $\left|z-\dfrac{-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}\,i}{2}\right|=\sqrt{17}$

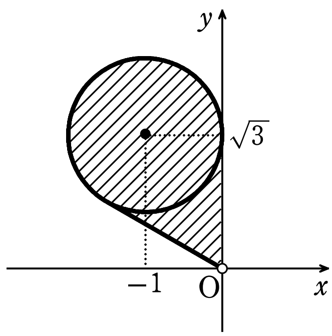
$\boxed{12}$ 解答 (1) 点 3 を中心とする半径 2 の円　(2) $w=5$ のとき最大値 5

$\boxed{13}$ 解答 (1) 4　(2) -4

$\boxed{14}$ 解答 $\theta=\dfrac{\pi}{18}$，$\dfrac{5}{18}\pi$，$\dfrac{7}{18}\pi$

$\boxed{15}$ 解答 (1) 原点を除き，境界線は含む

(2) $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$



$\boxed{1}$ (1) $\dfrac{3(3-4i)+2(-2+3i)}{2+3}=\dfrac{5-6i}{5}$　(2) $\dfrac{(3-4i)+(-2+3i)}{2}=\dfrac{1-i}{2}$

(3) $\dfrac{-4(3-4i)+5(-2+3i)}{5-4}=-22+31i$

$\boxed{2}$ $|\alpha-\beta|=|1-\alpha\overline{\beta}|$ の両辺を 2 乗して　$|\alpha-\beta|^2=|1-\alpha\overline{\beta}|^2$

よって　$(\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\beta)}=(1-\alpha\overline{\beta})\overline{(1-\alpha\overline{\beta})}$

$(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})=(1-\alpha\overline{\beta})(1-\overline{\alpha}\beta)$

$\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=1-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}$

$$|\alpha|^2|\beta|^2-|\alpha|^2-|\beta|^2+1=0$$
$$|\alpha|^2(|\beta|^2-1)-(|\beta|^2-1)=0$$
$$(|\alpha|^2-1)(|\beta|^2-1)=0$$

$|\alpha|\neq 1$ より $|\alpha|^2-1\neq 0$ であるから　$|\beta|^2-1=0$

ゆえに　$|\beta|^2=1$　　$|\beta|\geqq 0$ であるから　$|\beta|=1$

$\boxed{3}$ $\alpha=4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=4\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$

$$\beta=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

よって　$\alpha\beta=4\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$

$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{25}{12}\pi+i\sin\frac{25}{12}\pi\right)=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

$\boxed{4}$ $\frac{1-\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

よって　$\left(\frac{1-\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}}\right)^{10}=(\sqrt{2})^{10}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{10}$

$$=32\left\{\cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{10}{3}\pi\right)\right\}=32\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=32\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-16+16\sqrt{3}\,i$$

$\boxed{5}$ 点 β を原点 O に移す平行移動によって，点 α が点 α' に移るとすると

$$\alpha'=\alpha-\beta=\sqrt{3}\,i$$

点 α' を原点 O を中心として $-\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した点を α'' とすると

$$\alpha''=\left\{\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right\}\alpha'=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\cdot\sqrt{3}\,i$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$$

点 α'' は，原点 O を点 β に移す平行移動によって，点 γ に移るから

$$\gamma=\alpha''+\beta=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}-1}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}i$$

$\boxed{6}$ z の極形式を　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

とすると　$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$

また，$-8+8\sqrt{3}\,i$ を極形式で表すと

$$-8+8\sqrt{3}\,i=16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

よって，方程式は

$$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4=16,\ 4\theta=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \quad (k\text{ は整数})$$

$r>0$ であるから　$r=2$　　また　$\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}$

よって　$z=2\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}\right)\right\}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では　$k=0$，1，2，3

① で $k=0$，1，2，3 としたときの z をそれぞれ z_0，z_1，z_2，z_3 とすると

$$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i,$$

$$z_1=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=-1+\sqrt{3}\,i,$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)=-\sqrt{3}-i,$$

$$z_3=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=1-\sqrt{3}\,i$$

したがって，求める解は

$z=\pm(\sqrt{3}+i)$，$\pm(1-\sqrt{3}\,i)$

$\boxed{7}$ $\alpha=1+3i$，$\beta=-2+5i$，$\gamma=2-2i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(2-2i)-(1+3i)}{(-2+5i)-(1+3i)}=\frac{1-5i}{-3+2i}=\frac{(1-5i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}$$

$$=\frac{-13+13i}{13}=-1+i$$

偏角 θ の範囲を $-\pi<\theta\leqq\pi$ として，$-1+i$ を極形式で表すと

$$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

よって　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{3}{4}\pi$

$\boxed{8}$ (1)　$\alpha^{10}=\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^{10}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

よって，α は 1 の 10 乗根である。

$\alpha^{10}=1$ から　　$\alpha^{10}-1=0$

左辺を因数分解して

$$(\alpha-1)(\alpha^9+\alpha^8+\cdots\cdots+\alpha+1)=0$$

$\alpha-1\neq 0$ であるから　　$\alpha^9+\alpha^8+\cdots\cdots+\alpha+1=0$

(2)　$\alpha^9\alpha^8\cdots\cdots\alpha=\alpha^{9+8+\cdots\cdots+1}=\alpha^{45}=(\alpha^{10})^4\alpha^5=\alpha^5=\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^5$

$$=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

$\boxed{9}$ $2|z-i|=|z+2i|$ から　$4|z-i|^2=|z+2i|^2$

ゆえに　$4(z-i)(\overline{z}+i)=(z+2i)(\overline{z}-2i)$

整理すると　$z\overline{z}+2iz-2i\overline{z}=0$

よって　$(z-2i)(\overline{z}+2i)=4$　すなわち　$(z-2i)(\overline{z-2i})=4$

したがって，$|z-2i|^2=4$ より　$|z-2i|=2$ となるから　$\alpha=2i,\ r=2$

$\boxed{10}$ (1)　等式から　　$\gamma-\alpha=(1+\sqrt{3}\,i)(\beta-\alpha)$

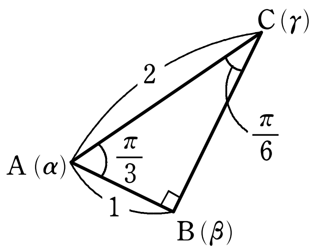
よって　　$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(2)　(1) から　　$\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$

また，$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=2$ であるから　　$|\gamma-\alpha|=2|\beta-\alpha|$

AC=2AB であるから　　AB：AC=1：2

よって　　$\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{C}=\frac{\pi}{6}$



$\boxed{11}$ (1)　$\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,　$\beta=\alpha^3=8\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

ゆえに　　$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{8}{2}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

よって　　$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$

(2)　(1) から　　$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=4$　　　よって　　$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}=4$

OA=2 であるから　　OB=8

△AOB は $\angle\mathrm{O}=\frac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2}=\sqrt{2^2+8^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$

よって　　OA：OB：AB=1：4：$\sqrt{17}$

(3)　(1) から，求める円は線分 AB の中点を中心とする半径 $\frac{\mathrm{AB}}{2}$ の円である。

線分 AB の中点を表す複素数は

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2}i=\frac{-3\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

また，半径は　$\frac{\mathrm{AB}}{2}=\sqrt{17}$　よって　$\left|z-\frac{-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}\,i}{2}\right|=\sqrt{17}$

12 (1)　z は等式 $|z|=2$ を満たす。

$w=\frac{2z-i}{z+i}$ から　$(z+i)w=2z-i$

よって　$(w-2)z=-i(w+1)$

$w=2$ は等式を満たさないから，$w\neq 2$ で　$z=\frac{-i(w+1)}{w-2}$

これを $|z|=2$ に代入すると　$\left|\frac{-i(w+1)}{w-2}\right|=2$

よって　$|-i||w+1|=2|w-2|$

両辺を 2 乗すると

$$|w+1|^2=4|w-2|^2$$

ゆえに　$(w+1)(\overline{w+1})=4(w-2)(\overline{w-2})$

$$(w+1)(\overline{w}+1)=4(w-2)(\overline{w}-2)$$

両辺を展開して整理すると

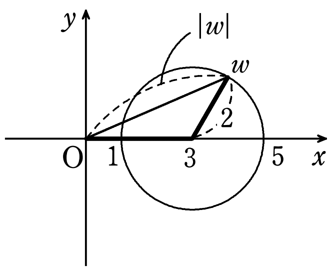
$$w\overline{w}-3w-3\overline{w}+5=0$$

ゆえに　$(w-3)(\overline{w}-3)=4$

すなわち　$|w-3|^2=2^2$

よって　$|w-3|=2$

これは，点 3 を中心とする半径 2 の円である。



(2)　右の図から　$|w|\leqq 3+2=5$

等号が成り立つのは $w=5$ のときである。

よって，$|w|$ は $w=5$ のとき最大値 5 をとる。

13 (1)　$|\alpha|=|\beta|=2$ から　$|\alpha|^2=|\beta|^2=4$

よって　$\alpha\overline{\alpha}=4$，$\beta\overline{\beta}=4$　…… ①

$\alpha+\beta+2=0$ から　$\alpha+\beta=-2$　…… ②

また，$\overline{\alpha+\beta+2}=0$ であるから

$$\overline{\alpha}+\overline{\beta}+2=0 \quad \cdots\cdots ③$$

① から　$\overline{\alpha}=\frac{4}{\alpha}$，$\overline{\beta}=\frac{4}{\beta}$

これを ③ に代入して　$\dfrac{4}{\alpha}+\dfrac{4}{\beta}+2=0$

分母を払って整理すると　$\alpha\beta=-2(\alpha+\beta)$

② を代入すると　$\alpha\beta=4$　…… ④

(2)　②，④ から　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-2)^2-2\cdot4=-4$

$\boxed{14}$ $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$ の分母を払って整理すると　$z^2-(2\cos\theta)z+1=0$

z について解くと　$z=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm\sqrt{-\sin^2\theta}$

$=\cos\theta\pm i\sin\theta$

[1]　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき

$z^6=(\cos\theta+i\sin\theta)^6=\cos6\theta+i\sin6\theta$

$\dfrac{1}{z^6}=z^{-6}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-6}=\cos(-6\theta)+i\sin(-6\theta)$

$=\cos6\theta-i\sin6\theta$

よって　$z^6+\dfrac{1}{z^6}=2\cos6\theta$

[2]　$z=\cos\theta-i\sin\theta$ のとき

$z^6=(\cos\theta-i\sin\theta)^6=\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^6$

$=\cos(-6\theta)+i\sin(-6\theta)=\cos6\theta-i\sin6\theta$

$\dfrac{1}{z^6}=z^{-6}=(\cos\theta-i\sin\theta)^{-6}=\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^{-6}$

$=\cos6\theta+i\sin6\theta$

よって　$z^6+\dfrac{1}{z^6}=2\cos6\theta$

[1]，[2] から　$z^6+\dfrac{1}{z^6}=2\cos6\theta$

$z^6+\dfrac{1}{z^6}=1$ であるから　$2\cos6\theta=1$　　ゆえに　$\cos6\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0\leqq6\theta<3\pi$ であるから　$6\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi$

したがって　$\theta=\dfrac{\pi}{18},\ \dfrac{5}{18}\pi,\ \dfrac{7}{18}\pi$

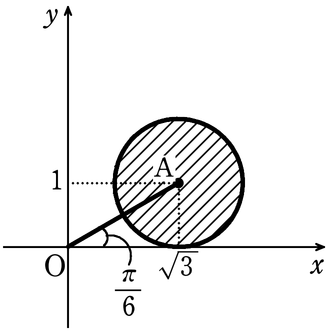
15 (1) $|z-(\sqrt{3}+i)|\leqq 1$ から，点 z の存在範囲は，点 A $(\sqrt{3}+i)$ を中心とする半径 1 の円の周および内部。

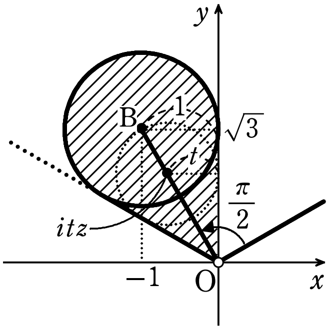
また　$w=itz$

$$=t\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)z$$

よって，点 w は点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転して，さらに原点からの距離を t 倍した点である。

$i(\sqrt{3}+i)=-1+\sqrt{3}\,i$ より $\mathrm{B}(-1+\sqrt{3}\,i)$ とすると，$0<t\leqq 1$ であるから，点 w の存在範囲は，線分 OB 上の原点を除く点 $-t+\sqrt{3}\,it$ を中心とする，半径 t の円の周および内部。図示すると，右図の斜線部分。ただし，原点を除き，境界線は含む。





(2) (1) の結果から，w の偏角 θ のとりうる値の範囲は

$$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$$