BASIC問題

1 2 点 A (2, 5), B (3, 1) からの距離の比が 1：2 である点 P の軌跡を求めよ。

2 連立不等式 $\begin{cases}(x-3)^2+y^2>25\\4x-3y>12\end{cases}$ の表す領域を図示せよ。

3 x, y が 3 つの不等式 $x-3y\geqq -6$, $x+2y\geqq 4$, $3x+y\leqq 12$ を同時に満たすとき，$2x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

STANDARD問題

4 放物線 $y=3x^2+12ax+4a^2-6a$ について，次の問いに答えよ。

(1) 頂点 P の座標を $(x,\ y)$ とするとき，x, y をそれぞれ a で表せ。

(2) a がすべての実数値をとって変化するとき，点 P の軌跡を求めよ。

5 2 点 A (3, 0), B (0, -3) と放物線 $y=x^2$ 上の動点 Q とでできる △ABQ の重心 G の軌跡を求めよ。

6 m の値が変化するとき，次の 2 直線の交点 P の軌跡を求めよ。

$$mx-y+5m=0,\quad x+my-5=0$$

7 放物線 $y=(x-3)^2$ と直線 $y=mx$ が異なる 2 点 A, B で交わっている。m の値が変化するとき，線分 AB の中点 P の軌跡を求めよ。

8 2 直線 $x-2y-2=0$, $4x-2y+1=0$ のなす角の二等分線の方程式を求めよ。ただし，2 直線のなす角の二等分線は，2 直線から等距離にある点の軌跡であるものとする。

9 方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 つの異なる解が $-1<x<2$ の範囲にある。a, b の満たす関係式を求めよ。また，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ。

実戦問題

10 点 $(x,\ y)$ が，不等式 $(x-3)^2+(y-1)^2\leqq 1$ の表す領域上を動くとき，次の式の最大値，最小値を求めよ。

(1) $\dfrac{y}{x}$

(2) x^2+y^2

11 点 P $(\alpha,\ \beta)$ が $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta<1$ を満たして動くとき，点 Q $(\alpha+\beta,\ \alpha\beta)$ の動く範囲を図示せよ．

12 a がすべての実数値をとって変化するとき，直線 $y=2ax-a^2+1$ ……① が通りうる点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ。

13 次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$\begin{cases} x^2+y^2-1\leqq 0 \\ x+2y-2\leqq 0 \end{cases}$$

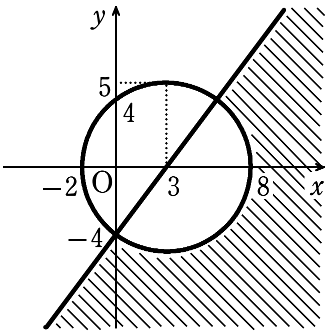
(1) 領域 D を図示せよ。

(2) a を実数とする。点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$ax+y$ の最小値を a を用いて表せ。

(3) a を実数とする。点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$ax+y$ の最大値を a を用いて表せ。

$\boxed{1}$ 解答　中心 $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{19}{3}\right)$，半径 $\dfrac{2\sqrt{17}}{3}$ の円

$\boxed{2}$ 解答　〔図〕境界線を含まない



$\boxed{3}$ 解答　$x=3$，$y=3$ のとき最大値 9；$x=0$，$y=2$ のとき最小値 2

$\boxed{4}$ 解答　(1)　$x=-2a$，$y=-8a^2-6a$　　(2)　放物線 $y=-2x^2+3x$

$\boxed{5}$ 解答　放物線 $y=3x^2-6x+2$

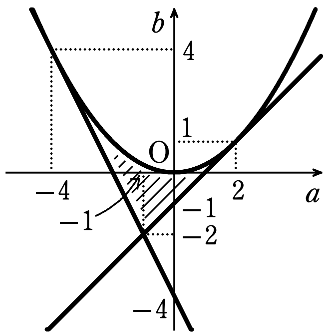
$\boxed{6}$ 解答　原点を中心とする半径 5 の円　ただし，点 $(-5,\ 0)$ を除く

$\boxed{7}$ 解答　放物線 $y=2x^2-6x$ の $x<-3$，$3<x$ の部分

$\boxed{8}$ 解答　$2x+2y+5=0$，$2x-2y-1=0$

$\boxed{9}$ 解答　$b<\dfrac{a^2}{4}$，$b>a-1$，$b>-2a-4$，$-4<a<2$

〔図〕境界線を含まない



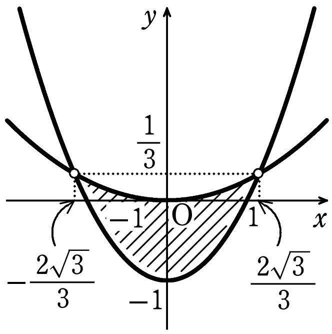
$\boxed{10}$ 解答　(1)　$x=\dfrac{12}{5}$，$y=\dfrac{9}{5}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{4}$；$x=3$，$y=0$ のとき最小値 0

(2)　$x=3+\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$y=1+\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ のとき最大値 $11+2\sqrt{10}$；

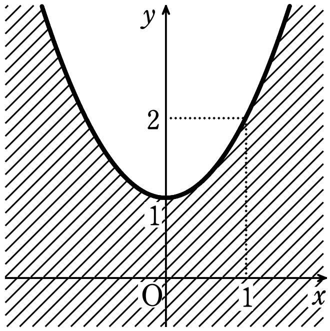
$x=3-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$y=1-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ のとき最小値 $11-2\sqrt{10}$

$\boxed{11}$

解答　〔図〕 境界線のうち，放物線 $y=x^2-1$ 上の点は含まないで，他は含む



$\boxed{12}$ 解答　〔図〕，境界線を含む



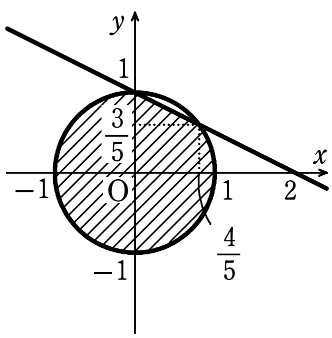
$\boxed{13}$ 解答　(1)　〔図〕境界線を含む　　(2)　$-\sqrt{a^2+1}$

(3)　$a<0$，$\frac{4}{3}\leqq a$ のとき $\sqrt{a^2+1}$；

$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき 1；

$\frac{1}{2}<a<\frac{4}{3}$ のとき $\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}$

(1)



1　点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。

$AP:BP=1:2$ から　　$2AP=BP$

$AP>0$，$BP>0$ であるから，これは $4AP^2=BP^2$ と同値である。

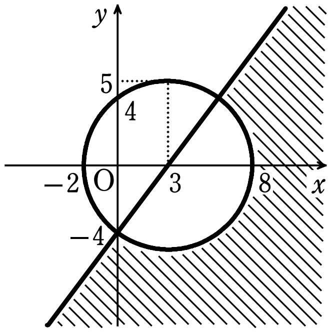
よって　　$4\{(x-2)^2+(y-5)^2\}=(x-3)^2+(y-1)^2$

整理すると　　$x^2-\dfrac{10}{3}x+y^2-\dfrac{38}{3}y+\dfrac{106}{3}=0$

すなわち　　$\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{19}{3}\right)^2=\dfrac{68}{9}$

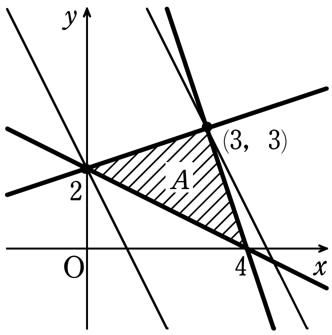
したがって，求める軌跡は　　中心 $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{19}{3}\right)$，半径 $\dfrac{2\sqrt{17}}{3}$ の円

2　$4x-3y>12$ を変形すると　$y<\dfrac{4}{3}x-4$



求める領域は，円 $(x-3)^2+y^2=25$ の外部と直線 $y=\dfrac{4}{3}x-4$ の下側との共通部分で，図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。

3　与えられた連立不等式の表す領域を A とする。



領域 A は3点 $(4,\ 0)$，$(3,\ 3)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする三角形の周および内部である。

$$2x+y=k \quad \cdots\cdots ①$$

とおくと，これは傾きが -2，y 切片が k である直線を表す。

図から，直線①が

点 $(3,\ 3)$ を通るとき，k は最大で　$k=9$

点 $(0,\ 2)$ を通るとき，k は最小で　$k=2$

よって　　$x=3$，$y=3$ のとき最大値 9；$x=0$，$y=2$ のとき最小値 2

4　(1)　$y=3x^2+12ax+4a^2-6a$ を変形すると　　$y=3(x+2a)^2-8a^2-6a$

よって，点Pの座標は　　$(-2a,\ -8a^2-6a)$

したがって　　$x=-2a$，$y=-8a^2-6a$

(2)　$x=-2a$ から　　$a=-\dfrac{x}{2}$

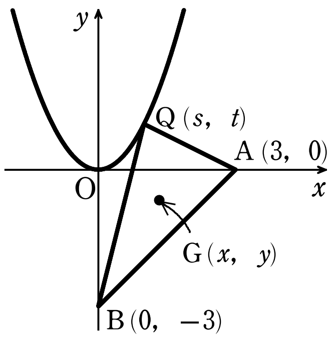
これを $y=-8a^2-6a$ に代入して

$$y=-8\left(-\frac{x}{2}\right)^2-6\left(-\frac{x}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y=-2x^2+3x$$

$x=-2a$ であるから，a がすべての実数値をとって変化するとき，x もすべての実数値をとる。

よって，求める軌跡は　放物線 $y=-2x^2+3x$

5 点 Q は直線 AB 上にないから，図形 ABQ は常に三角形になる。



点 Q の座標を $(s,\ t)$ とすると，Q は放物線 $y=x^2$ 上にあるから　$t=s^2$　…… ①

また，重心 G の座標を $(x,\ y)$ とすると，条件から

$$x=\frac{3+0+s}{3},\quad y=\frac{0+(-3)+t}{3}$$

すなわち　$s=3x-3$，$t=3y+3$

これらを ① に代入して　$3y+3=(3x-3)^2$

整理すると　$y=3x^2-6x+2$

よって，重心 G は放物線 $y=3x^2-6x+2$ 上にある。

逆に，この放物線上のすべての点 $\mathrm{G}(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　放物線 $y=3x^2-6x+2$

6 2 直線の方程式を変形して

$$y=m(x+5) \quad \cdots\cdots ①$$

$$-my=x-5 \quad \cdots\cdots ②$$

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$(x,\ y)$ は ①，② を満たす。

[1]　$y\neq 0$ のとき，② から　$m=-\dfrac{x-5}{y}$

これを ① に代入して　$y=-\dfrac{x-5}{y}(x+5)$　よって　$x^2+y^2=25$　…… ③

③ において $y=0$ とすると　$x=\pm 5$

したがって，$y\neq 0$ のとき，点 P は，円 ③ から 2 点 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$ を除いた図形上にある。

[2]　$y=0$ のとき，② から　$x=5$

$x=5$，$y=0$ を ① に代入すると　$m=0$

よって，点 $(5,\ 0)$ は，$m=0$ のときの 2 直線の交点である。

[1]，[2] から，点 P は，原点を中心とする半径 5 の円から点 $(-5,\ 0)$ を除いた図形上にある。

逆に，この図形上の点 P は，条件を満たす。

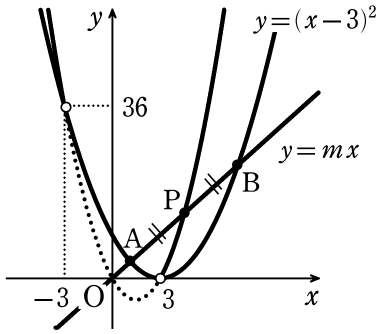
したがって，点 P の軌跡は

原点を中心とする半径 5 の円　ただし，点 $(-5,\ 0)$ を除く

参考 ① から第 1 の直線は定点 $(-5,\ 0)$ を通り，② から第 2 の直線は定点 $(5,\ 0)$ を通る。
また，この 2 直線は垂直であるから，点 P は 2 点 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$ を直径の両端とする円周上にあることがわかる。
ただし，① は直線 $x=-5$，② は直線 $y=0$ を表さないから，点 $(-5,\ 0)$ を除く。

7 $y=(x-3)^2$ と $y=mx$ から y を消去して整理すると

$$x^2-(m+6)x+9=0 \quad \cdots\cdots ①$$



判別式を D とすると

$$D=(m+6)^2-4\cdot1\cdot9$$
$$=m^2+12m=m(m+12)$$

放物線と直線が異なる 2 点で交わるのは，$D>0$ のときであるから　$m(m+12)>0$

ゆえに　$m<-12,\ 0<m$ ……②

2 つの交点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β とする。

α，β は ① の異なる 2 つの実数解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=m+6$$

よって，中点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m+6}{2} \quad \cdots\cdots ③ \qquad \text{また} \qquad y=mx \quad \cdots\cdots ④$$

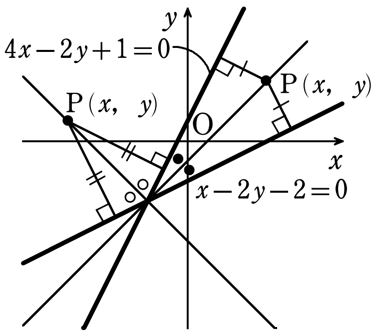
③ から　$m=2x-6$ ……⑤

⑤ を ④ に代入して　$y=(2x-6)x$　すなわち　$y=2x^2-6x$

⑤ を ② に代入して　$2x-6<-12,\ 0<2x-6$　すなわち　$x<-3,\ 3<x$

よって，求める軌跡は　放物線 $y=2x^2-6x$ の $x<-3,\ 3<x$ の部分

8 2 直線のなす角の二等分線上の点を $P(x,\ y)$ とする。
点 P は 2 直線 $x-2y-2=0$，$4x-2y+1=0$ から等距離にあるから



$$\frac{|x-2y-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|4x-2y+1|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}$$

よって　$2|x-2y-2|=|4x-2y+1|$

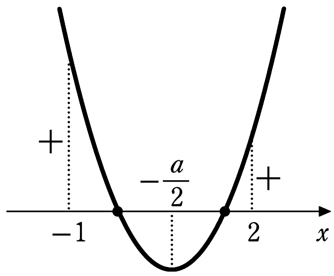
すなわち　$2(x-2y-2)=\pm(4x-2y+1)$

したがって，求める直線の方程式は

$$2x+2y+5=0,\ 2x-2y-1=0$$

9　$f(x)=x^2+ax+b$ とし，$f(x)=0$ の判別式を D とする。

放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸の方程式は　$x=-\dfrac{a}{2}$



方程式 $f(x)=0$ が $-1<x<2$ の範囲に 2 つの異なる解をもつための条件は

$D=a^2-4b>0$

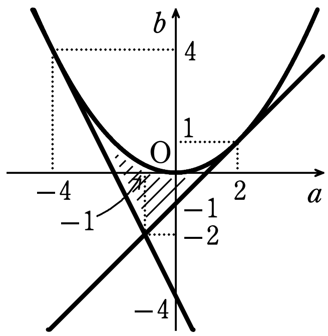
$f(-1)=1-a+b>0$，　$f(2)=4+2a+b>0$

軸について　$-1<-\dfrac{a}{2}<2$

すなわち

$b<\dfrac{a^2}{4}$，$b>a-1$，

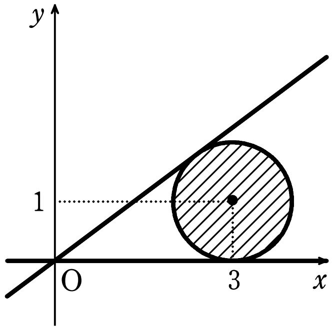
$b>-2a-4$，$-4<a<2$



よって，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含まない。

$\boxed{10}$ 与えられた不等式の表す領域は，右の図の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。



(1) $\dfrac{y}{x}=k$ とおくと，　$y=kx$　……①

①は原点を通り，傾き k の直線を表す。図から，直線①が円 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ に接するとき，k の値は最大，最小となる。

接するとき，円の中心 $(3,\ 1)$ と直線①の距離が円の半径 1 に等しいから　$\dfrac{|k\cdot 3-1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=1$

分母を払うと　$|3k-1|=\sqrt{k^2+1}$　　両辺を 2 乗して　$(3k-1)^2=k^2+1$

ゆえに　$4k^2-3k=0$　　よって　$k=0,\ \dfrac{3}{4}$

$k=0$ のとき，接点の座標は　$(3,\ 0)$

$k=\dfrac{3}{4}$ のとき，①は　$y=\dfrac{3}{4}x$　……②

また，円の中心 $(3,\ 1)$ を通り，直線②に垂直な直線の方程式は

$$y-1=-\frac{4}{3}(x-3)\quad すなわち\quad y=-\frac{4}{3}x+5\quad ……③$$

接点は，2 直線②，③の交点であるから，その座標は　$\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$

以上から　$x=\dfrac{12}{5},\ y=\dfrac{9}{5}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{4}$；$x=3,\ y=0$ のとき最小値 0

(2) $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ ……④ とおく。

④は，原点を中心とし，半径 r の円を表す。

図から，2 円が内接するとき，r^2 の値は最大となる。このとき，2 円の中心間の距離は

$$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

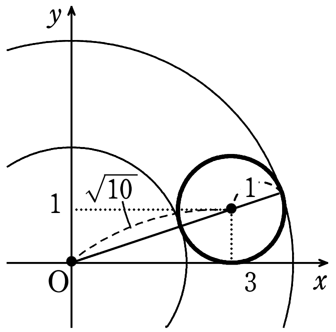
であるから　$r-1=\sqrt{10}$

よって　$r^2=(\sqrt{10}+1)^2=11+2\sqrt{10}$

また，2 円が外接するとき，r^2 の値は最小となる。

このとき　$r+1=\sqrt{10}$

よって　$r^2=(\sqrt{10}-1)^2=11-2\sqrt{10}$



接点は，円 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ と直線 $y=\dfrac{1}{3}x$

の交点である。

円と直線の式から x を消去すると　$(3y-3)^2+(y-1)^2=1$

すなわち　$10(y-1)^2=1$　ゆえに　$y=1\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

このとき　$x=3y=3\pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$　(複号同順)

以上から　$x=3+\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$y=1+\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ のとき　最大値 $11+2\sqrt{10}$

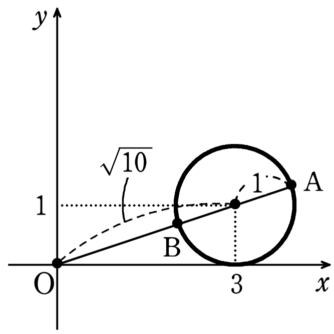
$x=3-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$y=1-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ のとき　最小値 $11-2\sqrt{10}$

別解　x^2+y^2 は，原点と点 $(x,\ y)$ の距離の 2 乗を表す。右の図のように，円上の点で，原点 O から最も遠い点を A，最も近い点を B とすると，

$$\mathrm{OA}=\sqrt{3^2+1^2}+1=\sqrt{10}+1$$
$$\mathrm{OB}=\sqrt{3^2+1^2}-1=\sqrt{10}-1$$

よって，最大値は　$(\sqrt{10}+1)^2=11+2\sqrt{10}$

最小値は　$(\sqrt{10}-1)^2=11-2\sqrt{10}$



11　$x=\alpha+\beta$，$y=\alpha\beta$ とおく.

α，β は 2 次方程式 $t^2-xt+y=0$ の実数解であるから，

判別式 D について　$D=x^2-4y\geqq 0$

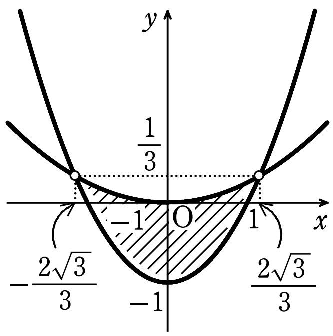
ゆえに　$y\leqq\dfrac{1}{4}x^2$

また，$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta<1$ から　$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta<1$

よって　$x^2-y<1$　ゆえに　$y>x^2-1$

以上により，点 Q の存在範囲は　〔図〕

ただし，境界線のうち，放物線 $y=x^2-1$ 上の点は含まないで，他は含む.



12　$y=2ax-a^2+1$ ……① を a について整理すると

$$a^2-2xa+y-1=0 \quad \cdots\cdots ②$$

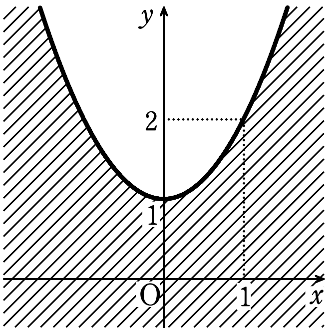
直線 ① が点 $(x,\ y)$ を通るとき，① すなわち ② を満たす実数 a が存在するから，a の 2 次方程式 ② の判別式 D について，$D \geqq 0$ である。

$$\frac{D}{4}=(-x)^2-(y-1)=x^2-y+1$$

$D \geqq 0$ から　　$x^2-y+1 \geqq 0$

すなわち　　$y \leqq x^2+1$

よって，求める点 $(x,\ y)$ の存在範囲は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$\boxed{13}$ (1) $\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ x+2y-2=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とおく。

② から　　$x=-2(y-1)$

① に代入すると　　$4(y-1)^2+(y^2-1)=0$

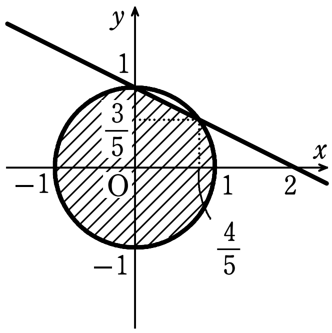
$$(y-1)(4y-4+y+1)=0$$

$$(y-1)(5y-3)=0$$

ゆえに　　$y=1,\ \dfrac{3}{5}$

これと ② から　　$(x,\ y)=(0,\ 1),\ \left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$

よって，領域 D は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



(2)，(3) において $ax+y=k$ とおくと

$$y=-ax+k \quad \cdots\cdots ③, \qquad ax+y-k=0 \quad \cdots\cdots ④$$

直線 ③ は，傾きが $-a$，y 切片が k の直線を表す。

(2)　円 ① の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ④ の距離を 1 とすると

$$\frac{|-k|}{\sqrt{a^2+1^2}}=1 \qquad ゆえに \qquad k=\pm\sqrt{a^2+1}$$

よって，グラフから最小値は　$-\sqrt{a^2+1}$

(3)　(ア)　$-a>0$ または $-a \leqq -\dfrac{4}{3}$　すなわち　$a<0$ または $a \geqq \dfrac{4}{3}$ のとき

グラフと (2) から，最大値は　$\sqrt{a^2+1}$

（イ）　$-\frac{1}{2} \leqq -a \leqq 0$ すなわち $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ のとき

$(x,\ y)=(0,\ 1)$ で最大値 1

（ウ）　$-\frac{4}{3} < -a < -\frac{1}{2}$ すなわち $\frac{1}{2} < a < \frac{4}{3}$ のとき

$(x,\ y)=\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ で最大値 $\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}$