BASIC問題

$\boxed{1}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{2x+3}}{x-3}$　　(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$\boxed{2}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$　　(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

$\boxed{3}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+4x}+x)$　　(2) $\displaystyle \lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2-x}}$

$\boxed{4}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$　　(4) $\displaystyle \lim_{x\to \infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

$\boxed{5}$ $x\leqq 0$ のとき　$f(x)=1$，　$0<x<\pi$ のとき　$f(x)=\dfrac{ax^2}{1-\cos x}$，　$x\geqq \pi$ のとき　$f(x)=b$

である関数 $f(x)$ が，すべての区間で連続になるように，定数 a，b の値を定めよ。

STANDARD問題

$\boxed{6}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$　　(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$

$\boxed{7}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to \pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$　　(2) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}$

$\boxed{8}$ 次の極限を調べよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to -3-0}\frac{x+3}{|2x+6|}$　　(2) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{|x^2-4|}$　　(3) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{x-2}{x^2-x}$

$\boxed{9}$ $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=1$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{10}$ 次の極限を求めよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

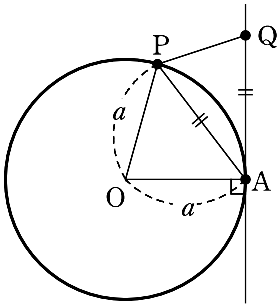
(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{|x|}$　　(2) $\displaystyle \lim_{x\to 2}([2x]-[x])$

11 次の極限値を求めよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}$　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$

実戦問題

12 半径 a の円 O の周上に動点 P と定点 A がある。A における接線上に AQ＝AP であるような点 Q をOA に関して P と同じ側にとる。P が A に限りなく近づくとき，$\dfrac{\mathrm{PQ}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^2}$ の極限値を求めよ。



13 次の極限値を計算して，n の単項式で表せ。

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots\cdots+\sin(2n-1)x}{x-\pi}$$

14 次の 2 つの条件をともに満たす多項式で表された関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-3$$

15 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a\cos^2 x+(3b+2)\sin x-2a+b+1}{\sin^3 x+a\cos^2 x-a}=c$ となるように実数の定数 a, b, c の値を定めよ.

1 解答 (1) $\frac{2}{3}$　(2) 1

2 解答 (1) $\frac{5}{3}$　(2) 2

3 解答 (1) -2　(2) $-\frac{1}{2}$

4 解答 (1) e^2　(2) 1　(3) $\frac{1}{e^2}$　(4) $\frac{1}{e}$

5 解答 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{\pi^2}{4}$

6 解答 (1) $\frac{2}{3}$　(2) 1

7 解答 (1) 1　(2) $-\pi$

8 解答 (1) $-\frac{1}{2}$　(2) 0　(3) 極限はない

9 解答 $a=-\frac{1}{2}$，$b=0$

10 解答 (1) 存在しない　(2) 2

11 解答 (1) 3　(2) 5

12 解答 $\frac{1}{2a}$

13 解答 $-n^2$

14 解答 $f(x)=2x^3+x^2-3x$

15 解答 $a=\frac{1}{3}, b=-\frac{2}{3}, c=1$

$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x-\sqrt{2x+3}}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-\sqrt{2x+3})(x+\sqrt{2x+3})}{(x-3)(x+\sqrt{2x+3})}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-(2x+3)}{(x-3)(x+\sqrt{2x+3})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)(x+\sqrt{2x+3})}=\lim_{x\to3}\frac{x+1}{x+\sqrt{2x+3}}=\frac{4}{3+\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$\displaystyle=\frac{2}{1+1}=1$

$\boxed{2}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{5}{3}\cdot\frac{3x}{\sin3x}\cdot\frac{\sin5x}{5x}=\lim_{x\to0}\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sin3x}{3x}}\cdot\frac{\sin5x}{5x}=\frac{5}{3}\cdot1\cdot1=\frac{5}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{x^2}=\lim_{x\to0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\cdot1=2$

$\boxed{3}$ (1) $x=-t$ とおくと　$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow+\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}+x)=\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{t^2-4t}-t)$

$\displaystyle=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\sqrt{t^2-4t}-t)(\sqrt{t^2-4t}+t)}{\sqrt{t^2-4t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to+\infty}\frac{-4t}{\sqrt{t^2-4t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{t}}+1}=\frac{-4}{2}=-2$

(2) $x=-t$ とおくと　$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow+\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2-x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\sqrt{2}\,t}{\sqrt{2t^2-t}+\sqrt{2t^2+t}}$

$\displaystyle=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2-\frac{1}{t}}+\sqrt{2+\frac{1}{t}}}=-\frac{1}{2}$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2-\frac{1}{x}}}=-\frac{1}{2}$

注意　別解では，$x<0$ のとき　$x=-\sqrt{x^2}$ であることに注意する。

$\boxed{4}$ (1) $2x=h$ とおくと　$x\longrightarrow0$ のとき　$h\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{2}{h}}=\lim_{h\to0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^2=e^2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e=1$

(3) $-\dfrac{2}{x}=h$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$h\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{h\to0}(1+h)^{-\frac{2}{h}}=\lim_{h\to0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

(4) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x=\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^x$

$-\dfrac{1}{x+1}=h$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$h\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{h\to0}(1+h)^{-1-\frac{1}{h}}=\lim_{h\to0}\frac{\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-1}}{1+h}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$\boxed{5}$ $f(x)$ がすべての区間で連続となるための必要十分条件は，$f(x)$ が $x=0$，$x=\pi$ で連続となることである。

$x=0$ で連続であるための条件は

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=f(0)$　　　すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{ax^2}{1-\cos x}=1$　……①

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{ax^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{ax^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to+0}a\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2(1+\cos x)=2a$

よって，① から　$2a=1$　　　ゆえに　$a=\dfrac{1}{2}$　……②

また，$x=\pi$ で連続であるための条件は

$\displaystyle\lim_{x\to\pi-0}f(x)=f(\pi)$　　　すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to\pi-0}\frac{ax^2}{1-\cos x}=b$

よって　$\dfrac{\pi^2}{2}a=b$　　　② を代入して　$b=\dfrac{\pi^2}{4}$

以上から　　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{\pi^2}{4}$

$\boxed{6}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{(1+x)-(1-x)}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}{(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1+x^2)}{(1-x^2)-(1-x)}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+1}{1+1}=1$$

$\boxed{7}$ (1)　$x-\pi=t$ とおくと　$x\longrightarrow\pi$ のとき $t\longrightarrow 0$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

(2)　$x-1=t$ とおくと　$x\longrightarrow 1$ のとき $t\longrightarrow 0$

$\sin\pi x=\sin\pi(t+1)=\sin(\pi+\pi t)=-\sin\pi t$

よって　$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\pi t}{t}=\lim_{t\to 0}\pi\cdot\left(-\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)=-\pi$$

$\boxed{8}$ (1)　$x<-3$ のとき　$|2x+6|=|2(x+3)|=-2(x+3)$

したがって　$$\lim_{x\to -3-0}\frac{x+3}{|2x+6|}=\lim_{x\to -3-0}\frac{x+3}{-2(x+3)}=\lim_{x\to -3-0}\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

(2)　$x=2$ の近くで　$x>2$ のとき　$|x^2-4|=x^2-4$,

$x<2$ のとき　$|x^2-4|=-(x^2-4)$

ゆえに　$$\lim_{x\to 2+0}\frac{(x-2)^2}{|x^2-4|}=\lim_{x\to 2+0}\frac{(x-2)^2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2+0}\frac{x-2}{x+2}=0$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{(x-2)^2}{|x^2-4|}=\lim_{x\to 2-0}\frac{(x-2)^2}{-(x^2-4)}=\lim_{x\to 2-0}\left(-\frac{x-2}{x+2}\right)=0$$

よって　$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{|x^2-4|}=0$$

(3)　$$\lim_{x\to +0}\frac{x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x-2}{x-1}=\infty$$

また　$$\lim_{x\to -0}\frac{x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x-2}{x-1}=-\infty$$

よって，$x\longrightarrow 0$ のときの極限はない。

$\boxed{9}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=1$ ……① において，$\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x-1)=0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}(ax\sin x+b)=0\qquad \text{すなわち}\quad b=0$$

このとき　$$\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=\frac{ax\sin x}{\cos x-1}=\frac{ax\sin x(\cos x+1)}{(\cos x-1)(\cos x+1)}$$

$$=\frac{ax\sin x(\cos x+1)}{\cos^2 x-1}=\frac{ax\sin x(\cos x+1)}{-\sin^2 x}$$

$$=\frac{-ax(\cos x+1)}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}\cdot(-a)(\cos x+1)$$

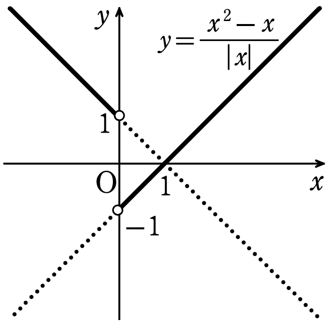
であるから　$$\lim_{x\to 0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x}{\sin x}\cdot(-a)(\cos x+1)\right\}=1\cdot(-a)\cdot 2=-2a$$

① より $-2a=1$ であるから　　$a=-\dfrac{1}{2}$

したがって　　$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=0$

10 (1)　$x \longrightarrow +0$ のとき $x>0$ で　　$|x|=x$

$x \longrightarrow -0$ のとき $x<0$ で　　$|x|=-x$



よって　　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x^2-x}{|x|}=\lim_{x\to+0}(x-1)=-1$

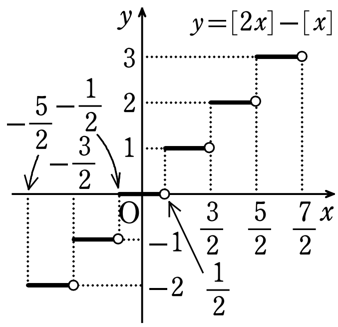
$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{x^2-x}{|x|}=\lim_{x\to-0}(1-x)=1$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x^2-x}{|x|}\neq\lim_{x\to-0}\frac{x^2-x}{|x|}$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{|x|}$ は存在しない。

(2)　$2\leqq x<\dfrac{5}{2}$ では　　$[2x]=4$，$[x]=2$

$\dfrac{3}{2}\leqq x<2$ では　　$[2x]=3$，$[x]=1$



よって　　$\displaystyle\lim_{x\to2+0}([2x]-[x])=\lim_{x\to2+0}(4-2)=2$

$\displaystyle\lim_{x\to2-0}([2x]-[x])=\lim_{x\to2-0}(3-1)=2$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{x\to2+0}([2x]-[x])=\lim_{x\to2-0}([2x]-[x])=2$

したがって　　$\displaystyle\lim_{x\to2}([2x]-[x])=2$

11 (1)　不等式 $[3x]\leqq 3x<[3x]+1$ が成り立つ。

よって，$x>0$ のとき

$\dfrac{[3x]}{x}\leqq 3<\dfrac{[3x]}{x}+\dfrac{1}{x}$ となるから　　$3-\dfrac{1}{x}<\dfrac{[3x]}{x}\leqq 3$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}=3$

(2)　$(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=\left[5^x\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}=5\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$

$x\longrightarrow\infty$ であるから，$x>1$，$0<\dfrac{1}{x}<1$ と考えてよい。

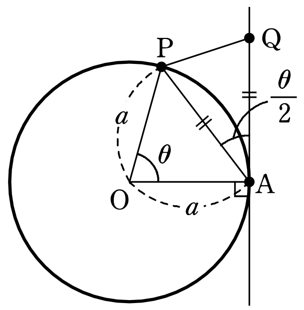
$\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1>1$ であるから　　$1=\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}^0<\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}=1$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}=1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}=5$

12 $\theta=\angle\mathrm{AOP}$，$0<\theta<\pi$ とおくと

$$\mathrm{AP}=2a\sin\frac{\theta}{2}，\ \overset{\frown}{\mathrm{AP}}=a\theta$$



また，接線と弦の作る角の性質から

$$\angle\mathrm{PAQ}=\left(\overset{\frown}{\mathrm{AP}}\text{の円周角}\right)=\frac{\theta}{2}$$

△APQ は二等辺三角形であるから

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{AP}\sin\frac{\theta}{4}=4a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{4}$$

P が A に限りなく近づくとき，$\theta\longrightarrow+0$ であるから，求める極限値は

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{PQ}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{4a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{4}}{(a\theta)^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{4}{a}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{4}}{\frac{\theta}{4}}=\frac{1}{2a}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2a}$$

13 $x-\pi=t$ とおくと，$x\to\pi$ のとき　$t\to0$

また，$x=t+\pi$ であるから，$k=1$，2，3，……，n に対して

$$\begin{aligned}\sin(2k-1)x&=\sin\{(2k-1)(t+\pi)\}=\sin\{(2k-1)t+2k\pi-\pi\}\\&=\sin\{(2k-1)t-\pi\}=-\sin(2k-1)t\end{aligned}$$

さらに　$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\sin(2k-1)t}{t}=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\sin(2k-1)t}{(2k-1)t}\cdot(2k-1)\right\}=2k-1$

したがって，求める極限値は

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x+\sin3x+\sin5x+\cdots\cdots+\sin(2n-1)x}{x-\pi}\\&=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t-\sin3t-\sin5t-\cdots\cdots-\sin(2n-1)t}{t}\\&=\lim_{t\to0}\left\{-\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)t}{t}\right\}=-\sum_{k=1}^{n}\left\{\lim_{t\to0}\frac{\sin(2k-1)t}{t}\right\}\\&=-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=-\left\{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}\\&=-n^2\end{aligned}$$

14 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}$ が存在するから $f(x)-2x^3$ は 2 次以下の多項式である。

よって，$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ とおける。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=a$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$ より　　$a=1$

また　　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left(2x^2+ax+b+\frac{c}{x}\right)$

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-3$ より　　$c=0$，$b=-3$

したがって　　$f(x)=2x^3+x^2-3x$

$\boxed{15}$ 分母について $\displaystyle\lim_{x\to0}(\sin^3x+a\cos^2x-a)=0$ であるから，分子について

$\displaystyle\lim_{x\to0}\{a\cos^2x+(3b+2)\sin x-2a+b+1\}=0$ でなければならない．

よって　$a+0-2a+b+1=0$　　ゆえに　$b=a-1$ …… ①

このとき　$\displaystyle(与式)=\lim_{x\to0}\frac{a(1-\sin^2x)+(3a-1)\sin x-a}{\sin^3x+a(1-\sin^2x)-a}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-a\sin^2x+(3a-1)\sin x}{\sin^3x-a\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{-a\sin x+3a-1}{\sin x(\sin x-a)}\quad\cdots\cdots ②$$

分母について $\displaystyle\lim_{x\to0}\sin x(\sin x-a)=0$ であるから，上と同様に

$\displaystyle\lim_{x\to0}(-a\sin x+3a-1)=0$　　よって　$3a-1=0$

ゆえに　　$a=\dfrac{1}{3}$　　① から　$b=-\dfrac{2}{3}$

② から　　$\displaystyle c=\lim_{x\to0}\frac{-a\sin x}{\sin x(\sin x-a)}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{3\sin x-1}=1$