BASIC問題

[1] 第 5 項が 10，第 10 項が 25 である等差数列 $\{a_n\}$ の，第 20 項から第 29 項までの和 S を求めよ。

[2] ある等比数列の初項から第 n 項までの和が 54，初項から第 $2n$ 項までの和が 63 であるとき，この等比数列の初項から第 $3n$ 項までの和を求めよ.

[3] 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$1\cdot 3,\ 3\cdot 5,\ 5\cdot 7,\ \cdots\cdots,\ (2n-1)(2n+1)$

[4] 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$\dfrac{1}{1\cdot 5},\ \dfrac{1}{5\cdot 9},\ \dfrac{1}{9\cdot 13},\ \cdots\cdots$

[5] 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2+5n+1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[6] 3 つの数 -5，a，b がこの順に等差数列をなし，a，b，45 がこの順に等比数列をなす。このとき，a，b の値を求めよ。

STANDARD問題

[7] 初項 70 の等差数列 $\{a_n\}$ の第 10 項から第 20 項までの和が 0 であるとする。このとき，初項から第何項までの和が最大となるか。また，その最大値を求めよ。

[8] 数列 1，11，111，1111，…… の一般項 a_n と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

[9] 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　$1,\ 1+3,\ 1+3+9,\ 1+3+9+27,\ \cdots\cdots$

(2)　$1^2,\ 1^2+2^2,\ 1^2+2^2+3^2,\ 1^2+2^2+3^2+4^2,\ \cdots\cdots$

[10] 次の和 S を求めよ。

(1)　$S=1+4x+7x^2+10x^3+\cdots\cdots+(3n-2)x^{n-1}$

(2)　$S=2^{n-1}+2\cdot 2^{n-2}+3\cdot 2^{n-3}+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2+n$

実戦問題

11 p は素数，m，n は正の整数で $m<n$ とする。m と n の間にあって，p を分母とする既約分数の総和を求めよ。

12 2 以上の整数 n に対し，

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$ を求めよ。

13 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{76}\frac{2}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+5}}$ を求めよ。

1 解答 685

2 解答 $\dfrac{129}{2}$

3 解答 $\dfrac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$

4 解答 $\dfrac{n}{4n+1}$

5 解答 $a_1=7$，$n\geqq 2$ のとき $a_n=2n+4$

6 解答 $a=5$，$b=15$ または $a=\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{15}{2}$

7 解答 第 14 項または第 15 項，最大値は 525

8 解答 $a_n=\dfrac{1}{9}(10^n-1)$，$S_n=\dfrac{1}{81}(10^{n+1}-9n-10)$

9 解答 (1) 一般項が$\dfrac{3^k-1}{2}$であることから，和は$\dfrac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$

(2) 一般項が$\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$であることから，和は$\dfrac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

10 解答 (1) $x=1$ のとき $S=\dfrac{1}{2}n(3n-1)$，

$x\fallingdotseq 1$ のとき $S=\dfrac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$

(2) $S=2^{n+1}-n-2$

11 解答 $\dfrac{1}{2}(m+n)(n-m)(p-1)$

12 解答 $\dfrac{(n+2)(n-1)}{4n(n+1)}$

13 解答 $7+3\sqrt{5}$

$\boxed{1}$ 初項を a，公差を d とする。

第 5 項が 10であるから　$a+(5-1)d=10$　すなわち　$a+4d=10$　……①

第 10 項が 25 であるから　$a+(10-1)d=25$　すなわち　$a+9d=25$　……②

①，② を解くと　$a=-2$，$d=3$

初項から第 29 項までの和は　$\dfrac{1}{2}\cdot 29\{2\cdot(-2)+(29-1)\cdot 3\}=1160$

初項から第 19 項までの和は　$\dfrac{1}{2}\cdot 19\{2\cdot(-2)+(19-1)\cdot 3\}=475$

よって　$S=1160-475=685$

$\boxed{2}$ 初項を a，公比を r とおく．また，初項から第 n 項までの和を S_n とおく．

$r=1$ とすると，条件から　$S_n=an=54$，$S_{2n}=2an=63$

これを満たす a，n は存在しないから不適.

$r\fallingdotseq 1$ とすると，条件から　$S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=54$，$S_{2n}=\dfrac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=63$

$\dfrac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}(r^n+1)$ と変形できるから　$54(r^n+1)=63$

よって　$r^n=\dfrac{1}{6}$　このとき $r\fallingdotseq 1$ を満たす.

ゆえに　$S_{3n}=\dfrac{a(r^{3n}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}(r^{2n}+r^n+1)$

$$=54\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{6}+1\right)=\frac{129}{2}$$

$\boxed{3}$ $S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-1)=4\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}1=4\times\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n$

$$=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)-n=\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-3\}=\frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$$

$\boxed{4}$ 第 k 項は

$$\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4k+1)-(4k-3)}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)$$

ゆえに，初項から第 n 項までの和は

$$\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{n}{4n+1}$$

$\boxed{5}$ 初項 a_1 は　　$a_1=S_1=1^2+5\cdot1+1=7$　…… ①

$n\geqq2$ のとき　　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+5n+1)-\{(n-1)^2+5(n-1)+1\}$

$=(n^2+5n+1)-(n^2+3n-3)$

$=2n+4$

① より $a_1=7$ であるから，この式は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって　　$a_1=7$，　$n\geqq2$ のとき　$a_n=2n+4$

$\boxed{6}$ -5，a，b がこの順に等差数列をなすから　　$2a=-5+b$　…… ①

a，b，45 がこの順に等比数列をなすから　　$b^2=45a$　…… ②

① から　　$b=2a+5$　…… ③　　　② に代入して　　$(2a+5)^2=45a$

整理して　　$4a^2-25a+25=0$　　　これを解いて　　$a=5,\ \dfrac{5}{4}$

③ から　　$a=5$ のとき　$b=15$，　$a=\dfrac{5}{4}$ のとき　$b=\dfrac{15}{2}$

よって　　$a=5$，$b=15$　または　$a=\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{15}{2}$

$\boxed{7}$ (1)　等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると　　$a_n=70+(n-1)d$　…… ①

第 10 項から第 20 項までの 11 項の和が 0 であるから

$\dfrac{1}{2}\cdot11(a_{10}+a_{20})=0$　すなわち　$a_{10}+a_{20}=0$

① から　　$(70+9d)+(70+19d)=0$　　　よって　　$d=-5$

① に代入して　　$a_n=70+(n-1)\cdot(-5)=-5n+75$

$a_n<0$ とすると　　$-5n+75<0$

ゆえに，$n>15$ から　　第 16 項

(2)　この等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) より，a_1 から a_{14} までは正の数，a_{15} は 0，a_{16} からは負の数となるから，S_n は $n=14$ または $n=15$ のとき最大となり，最大値は

$$S_{14}=S_{15}=\frac{1}{2}\cdot14\{2\cdot70+13\cdot(-5)\}=\frac{1}{2}\cdot14\cdot75=525$$

よって，初項から第 14 項，または第 15 項までの和が最大で，最大値は 525

8　この数列は　1，$1+10$，$1+10+10^2$，……　となるから，一般項は

$$a_n=1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{n-1}=\frac{1(10^n-1)}{10-1}=\frac{1}{9}(10^n-1)$$

よって

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9}(10^k-1)=\frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}$$

$$=\frac{1}{81}(10^{n+1}-9n-10)$$

9　与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。

(1)　第 k 項は初項 1，公比 3，項数 k の等比数列の和である。

$$a_k=\frac{1\cdot(3^k-1)}{3-1}=\frac{3^k-1}{2}$$

よって，求める和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}3^k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{n}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$$

(2)　第 k 項は　$\displaystyle\sum_{m=1}^{k}m^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

よって，求める和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n^2+3n+2)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

10 (1)　$x=1$ のとき

$$S=1+4+7+10+\cdots\cdots+(3n-2)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(3k-2)=3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2n$$
$$=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

$x\neq 1$ のとき

$$S=1+4x+7x^2+\cdots\cdots+(3n-2)x^{n-1}$$
$$xS=\quad x+4x^2+\cdots\cdots+(3n-5)x^{n-1}+(3n-2)x^n$$

辺々引くと

$$(1-x)S=1+3(x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1})-(3n-2)x^n$$
$$=1+\frac{3x(1-x^{n-1})}{1-x}-(3n-2)x^n$$
$$=\frac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{1-x}$$

よって　$S=\dfrac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$

(2)　$2S=2^n+2\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^{n-2}+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2^2+n\cdot 2$

$$S=2^{n-1}+2\cdot 2^{n-2}+\cdots\cdots+(n-2)\cdot 2^2+(n-1)\cdot 2+n$$

辺々引くと

$$S=2^n+2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots\cdots+2^2+2-n$$
$$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n$$

よって　　$S=2^{n+1}-n-2$

11　まず，q を自然数として，$m<\dfrac{q}{p}<n$ を満たす $\dfrac{q}{p}$ を求める。

$mp<q<np$ であるから

$$q=mp+1,\ mp+2,\ \cdots\cdots,\ np-1$$

よって　$\dfrac{q}{p}=\dfrac{mp+1}{p},\ \dfrac{mp+2}{p},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{np-1}{p}$　……①

これらの和を S_1 とすると

$$S_1=\frac{(np-1)-(mp+1)+1}{2}\left(\frac{mp+1}{p}+\frac{np-1}{p}\right)=\frac{np-mp-1}{2}(m+n)$$

① のうち $\dfrac{q}{p}$ が整数となるのは　$\dfrac{q}{p}=m+1,\ m+2,\ \cdots\cdots,\ n-1$

これらの和を S_2 とすると

$$S_2=\frac{(n-1)-(m+1)+1}{2}\{(m+1)+(n-1)\}=\frac{n-m-1}{2}(m+n)$$

求める総和を S とすると，$S=S_1-S_2$ であるから

$$\begin{aligned}S&=\frac{np-mp-1}{2}(m+n)-\frac{n-m-1}{2}(m+n)\\&=\frac{1}{2}(m+n)\{(n-m)p-(n-m)\}\\&=\frac{1}{2}(m+n)(n-m)(p-1)\end{aligned}$$

12　求める和を S とする。

$\dfrac{1}{(k-1)k(k+1)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{(k-1)k}-\dfrac{1}{k(k+1)}\right\}$ であるから

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}\right]\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}=\frac{(n+2)(n-1)}{4n(n+1)}\end{aligned}$$

$\boxed{13}$ $\dfrac{2}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+5}}=\dfrac{2(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+5})}{(\sqrt{k+3}+\sqrt{k+5})(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+5})}$

$=\dfrac{2(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+5})}{k+3-(k+5)}=\sqrt{k+5}-\sqrt{k+3}$

したがって　　(与式)$=\displaystyle\sum_{k=1}^{76}(\sqrt{k+5}-\sqrt{k+3})$

$=(\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+(\sqrt{8}-\sqrt{6})+\cdots\cdots$

$+(\sqrt{79}-\sqrt{77})+(\sqrt{80}-\sqrt{78})+(\sqrt{81}-\sqrt{79})$

$=-\sqrt{4}-\sqrt{5}+\sqrt{80}+\sqrt{81}$

$=-2-\sqrt{5}+4\sqrt{5}+9=7+3\sqrt{5}$