BASIC＋STANDARD問題

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{6}{t^4}dt$　(2) $\int \frac{2-y}{y^2}dy$　(3) $\int \frac{1+t}{\sqrt{t}}dt$

2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (2x+3)^3 dx$　(2) $\int (2-5x)^4 dx$　(3) $\int \left(\cos 2x + \sin\frac{x}{3}\right)dx$

(4) $\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx$　(5) $\int e^{-3x}dx$　(6) $\int e^{\frac{x}{2}}dx$

3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (1-\tan x)\cos x\,dx$　(2) $\int \tan^2 x\,dx$

4 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + \cos x)^2 dx$

5 不定積分 $\int \sin 3x \cos x\,dx$ を求めよ。

6 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{6}{x(x+3)}dx$　(2) $\int \frac{3x-1}{x^2-1}dx$

7 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$　(2) $\int (x+1)(2x^2+4x-1)^2 dx$　(3) $\int \cos^3 x \sin x\,dx$

8 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\cos 3x\,dx$　(2) $\int (x+1)e^x dx$

(3) $\int \log(2x+1)\,dx$　(4) $\int \frac{1}{x^2}\log x\,dx$

9 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \sin^5 x\,dx$　(2) $\int \cos^3 x \sin^2 x\,dx$

10 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}\,dx$　(2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

11 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{9+x^2}$　(2) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

12 ＊　定積分 $\int_0^4 \sqrt{2-\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ.

実戦問題

13 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$　　(2) $\int x^2 \sin x\,dx$

14 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx$$

15 不定積分 $\int \frac{x+3}{x(x-1)^2}dx$ を求めよ。

16 $t=x+\sqrt{x^2+1}$ と置換して，$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を 求めよ。

17 $x \geqq 0$ で定義された関数 $y=e^x+e^{-x}$ の逆関数を $y=f(x)$ とするとき，$\int_2^4 f(x)\,dx$ を求めよ。

1 解答 (1) $-\frac{2}{t^3}+C$ (2) $-\frac{2}{y}-\log|y|+C$ (3) $2\sqrt{t}+\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

2 解答 (1) $\frac{1}{8}(2x+3)^4+C$ (2) $-\frac{1}{25}(2-5x)^5+C$ (3) $\frac{1}{2}\sin 2x-3\cos\frac{x}{3}+C$

(4) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$ (5) $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$ (6) $2e^{\frac{x}{2}}+C$

3 解答 (1) $\sin x+\cos x+C$ (2) $\tan x-x+C$

4 解答 (1) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$ (2) $\frac{13}{4}-\frac{\pi}{8}-\sqrt{2}$

5 解答 $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

6 解答 (1) $2\log\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$ (2) $\log|x-1|(x+1)^2+C$

7 解答 (1) $\log(e^x+2)+C$ (2) $\frac{1}{12}(2x^2+4x-1)^3+C$ (3) $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

8 解答 (1) $\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C$ (2) xe^x+C

(3) $\frac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1)-x+C$ (4) $-\frac{1}{x}(\log x+1)+C$

9 解答 (1) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$ (2) $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$

10 解答 (1) $\frac{\pi}{2}+1$ (2) $\frac{\pi}{6}$

11 解答 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{5}{36}\pi$ (3) $\frac{\pi}{4}$

12 解答 $\frac{32}{15}\sqrt{2}$

13 解答 (1) $x\tan x+\log|\cos x|+C$ (2) $(-x^2+2)\cos x+2x\sin x+C$

14 解答 $\frac{\pi}{4}$

15 解答 $3\log\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C$ （C は積分定数）

16 解答 $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$

17 解答 $4\log(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}$

1 (1) $\int \frac{6}{t^4}dt=\int 6t^{-4}dt=\frac{6}{-4+1}t^{-4+1}+C=-2t^{-3}+C=-\frac{2}{t^3}+C$

(2) $\int \frac{2-y}{y^2}dy=\int\left(\frac{2}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=\int\left(2y^{-2}-\frac{1}{y}\right)dy=\frac{2}{-2+1}y^{-2+1}-\log|y|+C$

$=-2y^{-1}-\log|y|+C=-\frac{2}{y}-\log|y|+C$

(3) $\int \frac{1+t}{\sqrt{t}}dt=\int\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1}+C$

$=2t^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C=2\sqrt{t}+\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

2 (1) $\int(2x+3)^3dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3)^{3+1}}{3+1}+C=\frac{1}{8}(2x+3)^4+C$

(2) $\int(2-5x)^4dx=-\frac{1}{5}\cdot\frac{(2-5x)^{4+1}}{4+1}+C=-\frac{1}{25}(2-5x)^5+C$

(3) $\int\left(\cos 2x+\sin\frac{x}{3}\right)dx=\frac{1}{2}\sin 2x-3\cos\frac{x}{3}+C$

(4) $\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$

(5) $\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$

(6) $\int e^{\frac{x}{2}}dx=2e^{\frac{x}{2}}+C$

3 (1) $\int(1-\tan x)\cos x\,dx=\int(\cos x-\sin x)dx=\sin x+\cos x+C$　　Cは積分定数

(2) $\int\tan^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\tan x-x+C$　　Cは積分定数

4 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+\cos x)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2 x+2\sin x+\cos^2 x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$=\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+2\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=1-\frac{\pi}{4}+2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{4}-\frac{\pi}{8}-\sqrt{2}$

[5] $\sin 3x\cos x=\frac{1}{2}\{\sin(3x+x)+\sin(3x-x)\}$　であるから

$\int\sin 3x\cos x\,dx=\int\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$

$=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$　　C は積分定数

[6] C は積分定数である。

(1) $\int\frac{6}{x(x+3)}dx=\int 2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx=2(\log|x|-\log|x+3|)+C=2\log\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$

(2) $\int\frac{3x-1}{x^2-1}dx=\int\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}\right)dx$

$=\log|x-1|+2\log|x+1|+C=\log|x-1|+\log(x+1)^2+C=\log|x-1|(x+1)^2+C$

[7] (1) $\int\frac{e^x}{e^x+2}dx=\int\frac{(e^x+2)'}{e^x+2}dx=\log|e^x+2|+C=\log(e^x+2)+C$

(2) $\int(x+1)(2x^2+4x-1)^2dx=\frac{1}{4}\int(2x^2+4x-1)^2(2x^2+4x-1)'dx$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}(2x^2+4x-1)^3+C=\frac{1}{12}(2x^2+4x-1)^3+C$

(3) $\int\cos^3 x\sin x\,dx=-\int\cos^3 x(\cos x)'dx=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

[8] (1) $\int x\cos 3x\,dx=\int x\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)'dx=x\cdot\frac{1}{3}\sin 3x-\int x'\cdot\frac{1}{3}\sin 3x\,dx$

$=\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\int\sin 3x\,dx=\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C$

(2) $\int(x+1)e^x dx=\int(x+1)(e^x)'dx=(x+1)e^x-\int(x+1)'e^x dx=(x+1)e^x-\int e^x dx$

$=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C$

(3) $\int\log(2x+1)\,dx=\int\left(\frac{2x+1}{2}\right)'\log(2x+1)\,dx$

$=\frac{2x+1}{2}\log(2x+1)-\int\frac{2x+1}{2}\{\log(2x+1)\}'dx$

$=\frac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1)-\int\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}dx=\frac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1)-\int dx$

$=\frac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1)-x+C$

(4) $\int\frac{1}{x^2}\log x\,dx=\int\left(-\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx=-\frac{1}{x}\log x-\int\left(-\frac{1}{x}\right)(\log x)'dx$

$=-\dfrac{1}{x}\log x+\displaystyle\int\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}dx=-\dfrac{1}{x}\log x+\displaystyle\int\dfrac{1}{x^2}dx=-\dfrac{1}{x}\log x-\dfrac{1}{x}+C$

$=-\dfrac{1}{x}(\log x+1)+C$

9 (1) $\displaystyle\int\sin^5 x\,dx=\int\sin^4 x\sin x\,dx=\int(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx$

$\cos x=t$ とおくと　　$-\sin x\,dx=dt$

よって　$\displaystyle\int\sin^5 x\,dx=-\int(1-t^2)^2dt=-\int(t^4-2t^2+1)dt$

$=-\dfrac{1}{5}t^5+\dfrac{2}{3}t^3-t+C$

$=-\dfrac{1}{5}\cos^5 x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

(2) $\displaystyle\int\cos^3 x\sin^2 x\,dx=\int\cos^2 x\cos x\sin^2 x\,dx=\int(1-\sin^2 x)\sin^2 x\cos x\,dx$

$\sin x=t$ とおくと　　$\cos x\,dx=dt$

よって　$\displaystyle\int\cos^3 x\sin^2 x\,dx=\int(1-t^2)t^2dt=\int(t^2-t^4)dt=\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{1}{5}t^5+C$

$=\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C$

10 (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx=2\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{4}$

$x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=\sqrt{2}\cos\theta$

x と θ の対応は右の表のようになる。

$\displaystyle 2\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2-2\sin^2\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

$\displaystyle=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta$

$\displaystyle=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1$

(2) $x=2\sin\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{6}$

x と θ の対応は右の表のようになる。

$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$

11 (1) $x=3\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{3}{\cos^2\theta}$

x と θ の対応は右の表のようになる。

x	$-\sqrt{3}$	$\to$	3
θ	$-\dfrac{\pi}{6}$	$\to$	$\dfrac{\pi}{4}$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{3}\frac{dx}{9+x^2}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{9+9\tan^2\theta}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{1}{3}\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{36}\pi$$

(2) $x+1=\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x と θ の対応は右の表のようになる。

x	-1	$\to$	0
θ	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{4}$

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+(x+1)^2}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

12 $t=2-\sqrt{x}$ とおくと $dt=\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}dx$　ゆえに　$dx=-2\sqrt{x}\,dt=-2(2-t)dt$ となる.

したがって　$\displaystyle\int_0^4\sqrt{2-\sqrt{x}}\,dx=-2\int_2^0\sqrt{t}\,(2-t)dt=2\int_0^2\sqrt{t}\,(2-t)dt$

$$=4\int_0^2\sqrt{t}\,dt-2\int_0^2 t^{\frac{3}{2}}dt=4\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2-2\left[\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}+1}\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-0\right)-\frac{4}{5}\left(2^{\frac{5}{2}}-0\right)=\frac{16\sqrt{2}}{3}-\frac{16\sqrt{2}}{5}$$

$$=16\sqrt{2}\left(\frac{5-3}{15}\right)=\frac{32}{15}\sqrt{2}$$

別解　$\sqrt{2-\sqrt{x}}=t$ とおくと $2-\sqrt{x}=t^2$　よって　$x=(2-t^2)^2$

また $dx=2(2-t^2)(-2t)dt=4(t^2-2)tdt$

したがって　$\displaystyle(与式)=\int_{\sqrt{2}}^{0}t\times4(t^2-2)tdt=-4\int_0^{\sqrt{2}}(t^4-2t^2)dt=-4\left[\frac{t^5}{5}-\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{2}}$

$$=\frac{32}{15}\sqrt{2}$$

13 (1) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}dx=\int x(\tan x)'dx=x\tan x-\int x'\tan x\,dx=x\tan x-\int \tan x\,dx$

$\displaystyle=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=x\tan x+\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=x\tan x+\log|\cos x|+C$

(2) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx=\int x^2(-\cos x)'dx=-x^2\cos x-\int(x^2)'(-\cos x)dx$

$\displaystyle=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx=-x^2\cos x+2\int x(\sin x)'dx$

$\displaystyle=-x^2\cos x+2x\sin x-2\int x'\sin x\,dx=-x^2\cos x+2x\sin x-2\int\sin x\,dx$

$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C=(-x^2+2)\cos x+2x\sin x+C$

14 $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}$

$x-1=\sin\theta$ とおくと　　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq 0$ では $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{1-(x-1)^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$$

したがって　　$\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1+\cos 2\theta)d\theta$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{\pi}{4}$$

15 $\displaystyle\frac{x+3}{x(x-1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$ とおき，

この両辺に $x(x-1)^2$ を掛けて　　$x+3=a(x-1)^2+bx(x-1)+cx$

右辺を整理すると　　$x+3=(a+b)x^2-(2a+b-c)x+a$

これが x についての恒等式であるから

$$a+b=0,\quad 2a+b-c=-1,\quad a=3$$

これを解いて　　$a=3$，$b=-3$，$c=4$

$\displaystyle\int\frac{x+3}{x(x-1)^2}dx=\int\left\{\frac{3}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}\right\}dx=3\log|x|-3\log|x-1|-\frac{4}{x-1}+C$

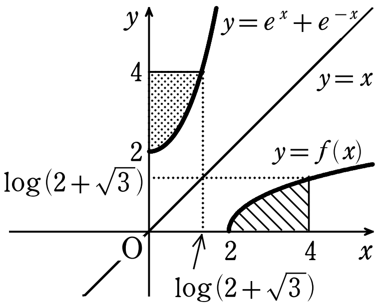
$\displaystyle=3\log\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C$　(C は積分定数)

16 $x+\sqrt{x^2+1}=t$ から　$x^2+1=(t-x)^2$　　　よって　$\displaystyle x=\frac{t^2-1}{2t}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$

したがって　　$\displaystyle dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{t^2+1}{2t^2}dt$，$\displaystyle\sqrt{x^2+1}=t-x=\frac{t^2+1}{2t}$

よって　　$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+C$

$=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$　(C は積分定数)



17　$I=\int_2^4 f(x)\,dx$ において

$x=e^y+e^{-y}$ とすると　$dx=(e^y-e^{-y})dy$

$2=e^y+e^{-y}$ とすると　$e^{2y}-2e^y+1=0$

よって　$(e^y-1)^2=0$　ゆえに　$y=0$

$4=e^y+e^{-y}$ とすると　$e^{2y}-4e^y+1=0$

よって　$e^y=2+\sqrt{3}$　ゆえに　$y=\log(2+\sqrt{3})$

したがって　$I=\int_0^{\log(2+\sqrt{3})} y(e^y-e^{-y})dy$

$$=\Big[y(e^y+e^{-y})\Big]_0^{\log(2+\sqrt{3})}-\int_0^{\log(2+\sqrt{3})}(e^y+e^{-y})dy$$

$$=\log(2+\sqrt{3})\cdot\left(2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)-\Big[e^y-e^{-y}\Big]_0^{\log(2+\sqrt{3})}$$

$$=\log(2+\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})-\left(2+\sqrt{3}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)$$

$$=4\log(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}$$