数学③　第３回試練　数III数列の極限

BASIC問題

1　次の循環小数の積を１つの既約分数で表せ.　　$0.\dot{1}\dot{2} \times 0.\dot{2}\dot{7}$

2　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$

3　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{3^n+2^n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+(-3)^n}{(-3)^n+2^{n+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(8^n-9^n)$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{(-2)^n+2^{2n}\}$

4　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-5}{4^n}$ の和を求めよ。

STANDARD問題

5　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$ を求めよ。

6　関数 $\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ のグラフをかけ。

7　次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの和を求めよ。　　$(3-x)+x(3-x)+x^2(3-x)+\cdots\cdots$

8　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\displaystyle\left(\frac{3}{2}-5\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{3}\right)+\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{9}\right)+\left(\frac{3}{16}-\frac{5}{27}\right)+\cdots\cdots$

(2) $\displaystyle\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}+\frac{7}{16}+\cdots\cdots$

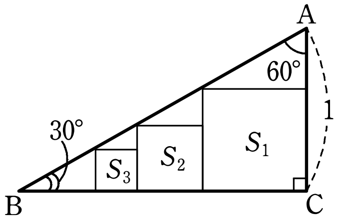
(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

実戦問題

9　数列 $\displaystyle\left\{\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}\right\}$ の極限を求めよ。

10　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ の和を求めよ。

11 $A=60°$，$B=30°$，$\mathrm{AC}=1$ である直角三角形 ABC 内に，右の図のように正方形 S_1，S_2，S_3，…… が限りなく並んでいるとき，これらの正方形の面積の総和を求めよ。



12 $\angle \mathrm{A}=2\theta$ の二等辺三角形 ABC の内接円 O_1 の半径を r とする。等辺 AB，AC と円 O_1 に接する円を O_2 とし，AB，AC と円 O_2 に接する円を O_3 とし，このように，次々に円 O_1，O_2，O_3，O_4，…… が並んでいる。このとき，すべての円の面積の和 S を求めよ。

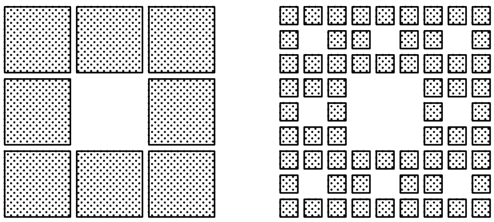
13 二項定理を用いて，数列 $\left\{\dfrac{3^n}{n}\right\}$ の極限を求めよ。

14 $a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1) $|a_{n+1}-3| \leqq \dfrac{2}{3}|a_n-3|$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

15 図のように正方形を 9 等分して，中央の正方形を取り除いた図形を S_1 とする．残された 8 個の正方形を 9 等分し，それぞれの中央の正方形を取り除いた図形を S_2 とする．このような操作を n 回繰り返して構成される図形を S_n とする．



各々の図形における最小の正方形をセルと呼び，S_n のセルの総数を a_n とし，さらに S_n における隣接したセルが共有する辺の総数を b_n とする．例えば，$a_1=8$，$b_1=8$ である．次の問いに答えよ．

(1) a_n を求めよ．

(2) b_2 および b_3 を求めよ．

(3) b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(4) b_n を求めよ．

(5) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ．

$\boxed{1}$ 解答　$\dfrac{4}{121}$

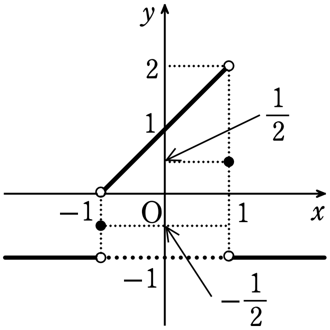
$\boxed{2}$ 解答　(1)　1　　(2)　∞　　(3)　2

$\boxed{3}$ 解答　(1)　-1　　(2)　1　　(3)　$-\infty$　　(4)　∞

$\boxed{4}$ 解答　$-\dfrac{2}{3}$

$\boxed{5}$ 解答　0

$\boxed{6}$ 解答



$\boxed{7}$ 解答　$x=3$，$-1<x<1$；和は $\dfrac{3-x}{1-x}$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　収束，和 $-\dfrac{9}{2}$　　(2)　発散　　(3)　収束し，その和は $\dfrac{3}{4}$

$\boxed{9}$ 解答　$|r|<1$ のとき 0，　$r=1$ のとき $\dfrac{2}{3}$，　$|r|>1$ のとき 1

$\boxed{10}$ 解答　2

$\boxed{11}$ 解答　$\dfrac{3(2\sqrt{3}-1)}{11}$

$\boxed{12}$ 解答　$\dfrac{\pi r^2(1+\sin\theta)^2}{4\sin\theta}$

$\boxed{13}$ 解答　∞

$\boxed{14}$ 解答　(1)　略　　(2)　3

$\boxed{15}$ 解答　(1)　$a_n=8^n$　　(2)　$b_2=88$，$b_3=776$　　(3)　$b_{n+1}=3b_n+8^{n+1}$

(4)　$b_n=\dfrac{8}{5}(8^n-3^n)$　　(5)　$\dfrac{8}{5}$

1 $0.\dot{1}\dot{2}\times 0.\dot{2}\dot{7}=0.12(1+0.01+0.0001+\cdots\cdots)\times 0.27(1+0.01+0.0001+\cdots\cdots)$

$$=\frac{0.12}{1-0.01}\times\frac{0.27}{1-0.01}=\frac{12}{99}\times\frac{27}{99}$$

$$=\frac{4}{33}\times\frac{3}{11}=\frac{4}{11}\times\frac{1}{11}=\frac{4}{121}$$

2 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}=\frac{2}{2}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2})^2-(\sqrt{n})^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{(n+2)-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}=\infty$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n})^2-n^2}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+4n)-n^2}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}=\frac{4}{2}=2$$

3 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{0-1}{1+0}=-1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+(-3)^n}{(-3)^n+2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{1+2\left(-\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{0+1}{1+0}=1$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(8^n-9^n)=\lim_{n\to\infty}9^n\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^n-1\right\}=-\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{(-2)^n+2^{2n}\}=\lim_{n\to\infty}2^{2n}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1\right\}=\infty$

4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-5}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{5}{4^n}\right\}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ は初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4^n}$ は初項 $\frac{5}{4}$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数である。

公比の絶対値がともに１より小さいから，この２つの無限等比級数はともに収束する。

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-5}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}$

$\boxed{5}$ $\displaystyle -1\leqq\cos\frac{n\pi}{2}\leqq1$ から　$\displaystyle -\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\leqq\frac{1}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$　であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=0$

$\boxed{6}$ $\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}$

[1]　$|x|<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$ であるから　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{1+x-0}{1+0}=x+1$

[2]　$x=1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$ であるから　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{1+1-1}{1+1}=\frac{1}{2}$

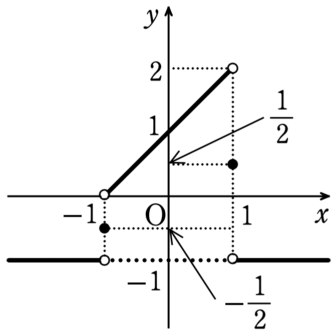
[3]　$x=-1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$ であるから　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{1-1-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$

[4]　$|x|>1$ のとき　$\displaystyle\left|\frac{1}{x}\right|<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n-1}}=0$ であるから

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}+\frac{1}{x^{2n-1}}-1}{\frac{1}{x^{2n}}+1}$$

$$=\frac{0+0-1}{0+1}=-1$$

以上から，グラフは右の図のようになる。



$\boxed{7}$　初項が $3-x$，公比が x であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は　　$3-x=0$　または　$|x|<1$

よって，求める x の値の範囲は　　$x=3,\ -1<x<1$

$x=3$ のとき，各項はすべて 0 になるから収束し，その和は　0

$-1<x<1$ のとき，和は　$\displaystyle\frac{3-x}{1-x}$　　これは，$x=3$ のときも成り立つ。

よって，求める和は　$\displaystyle\frac{3-x}{1-x}$

$\boxed{8}$ (1)　第 n 項は　$\displaystyle\frac{3}{2^n}-\frac{5}{3^{n-1}}$

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^{n-1}}$ の公比は，それぞれ $\displaystyle\frac{1}{2}$，$\displaystyle\frac{1}{3}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから，これらはともに収束する。

よって，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{5}{3^{n-1}}\right)$ は収束し，その和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{5}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=3-\frac{15}{2}=-\frac{9}{2}$$

(2)　第 n 項を a_n とすると　　$a_n=\dfrac{2n-1}{4n}$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{4}=\frac{1}{2}$

よって，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束しないから，この無限級数は発散する。

(3)　$\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

よって　　$S_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$

したがって，この無限級数は収束し，その和は $\dfrac{3}{4}$ である。

$\boxed{9}$　[1]　$|r|<1$のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0,\ \lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\frac{0+0}{0+2}=0$

[2]　$r=1$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=1,\ \lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$

[3]　$|r|>1$　のとき

$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{2n}}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{r^n}}{1+\frac{2}{r^{2n}}}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

10

$$\frac{n+3}{n(n+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{3}{n}-\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{n}\cdot\frac{2^n}{3^{n-1}}-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2^{n+1}}{3^n}$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k+3}{k(k+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{2^k}{3^{k-1}}-\frac{1}{k+1}\cdot\frac{2^{k+1}}{3^k}\right)$

$$=\left(1\cdot\frac{2}{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2^3}{3^2}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2^n}{3^{n-1}}-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2^{n+1}}{3^n}\right)$$

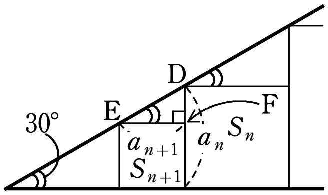
$$=2-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2^{n+1}}{3^n}$$

したがって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot 2\right\}=2$

11　正方形 S_n の１辺の長さを a_n，面積を T_n とする。

図の直角三角形 DEF において

$$\mathrm{EF}=\sqrt{3}\,\mathrm{DF}$$



よって　$a_{n+1}=\sqrt{3}(a_n-a_{n+1})$

ゆえに　$a_{n+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$　　また　$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

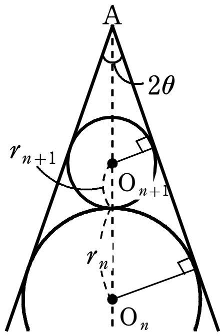
よって　$a_n=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^n$　　ゆえに　$T_n={a_n}^2=\left\{\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{2}\right\}^n$

したがって，正方形の面積の総和は，初項，公比 r がともに $\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{2}$ の無限等比級数で表され，公比について $|r|<1$ であるから，この無限等比級数は収束する。

よって，その和は　$\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{2}}=\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{2-3(2-\sqrt{3})}=\dfrac{3(2\sqrt{3}-1)}{11}$

12　円 O_n の半径を r_n，中心を点 O_n とすると

$$\mathrm{AO}_n-\mathrm{AO}_{n+1}=r_n+r_{n+1}\quad\cdots\cdots ①$$



また，$\mathrm{AO}_n\sin\theta=r_n$，$\mathrm{AO}_{n+1}\sin\theta=r_{n+1}$ であるから

$$\mathrm{AO}_n=\frac{r_n}{\sin\theta},\quad \mathrm{AO}_{n+1}=\frac{r_{n+1}}{\sin\theta}$$

これらを ① に代入して　$\dfrac{r_n}{\sin\theta}-\dfrac{r_{n+1}}{\sin\theta}=r_n+r_{n+1}$

よって　$(1+\sin\theta)r_{n+1}=(1-\sin\theta)r_n$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$1+\sin\theta\neq 0$ で　$r_{n+1}=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_n$

よって，円 O_n の面積を S_n とすると　$S_{n+1}=\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2 S_n$

また　　$S_1=\pi r^2$

ゆえに，すべての円の面積の和 S は，初項 πr^2，公比 $\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2$ の無限等比級数の和で表される。

ここで $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\sin\theta<1$ であるから　　$0<\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}<1$

したがって，無限等比級数は収束して

$$S=\frac{\pi r^2}{1-\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2}=\frac{\pi r^2(1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)^2-(1-\sin\theta)^2}=\frac{\pi r^2(1+\sin\theta)^2}{4\sin\theta}$$

13　$3^n=(1+2)^n\geqq 1+2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 2^2=2n^2+1$

よって　　$\dfrac{3^n}{n}\geqq\dfrac{2n^2+1}{n}=2n+\dfrac{1}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2n+\frac{1}{n}\right)=\infty$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n}=\infty$

14　(1)　$a_{n+1}-3=\sqrt{2a_n+3}-3=\dfrac{(\sqrt{2a_n+3}-3)(\sqrt{2a_n+3}+3)}{\sqrt{2a_n+3}+3}$

$$=\frac{(2a_n+3)-9}{\sqrt{2a_n+3}+3}=\frac{2(a_n-3)}{\sqrt{2a_n+3}+3}$$

よって　　$|a_{n+1}-3|=\dfrac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3}|a_n-3|$

$\sqrt{2a_n+3}+3\geqq 3$ であるから　　$|a_{n+1}-3|\leqq\dfrac{2}{3}|a_n-3|$

(2)　(1) で示した不等式から

$$|a_n-3|\leqq\frac{2}{3}|a_{n-1}-3|\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^2|a_{n-2}-3|\leqq\cdots\cdots\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}|a_1-3|$$

よって　　$0\leqq|a_n-3|\leqq\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}|1-3|$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}|1-3|=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-3|=0$

したがって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=3$

15　(1)　$n\geqq 2$ のとき　$a_n=8a_{n-1}$

また，$a_1=8$ であるから　$a_n=8^n$

(2)　$b_2=8\cdot 8+8\cdot 3=88$，$b_3=a_2\cdot 8+b_2\cdot 3=8^3+88\cdot 3=776$

(3)　$a_n=8^n$ から　$b_{n+1}=8a_n+3b_n=3b_n+8^{n+1}$

(4) $b_n=3b_{n-1}+8^n=3(3b_{n-2}+8^{n-1})+8^n$

$=3^2(3b_{n-3}+8^{n-2})+3\cdot 8^{n-1}+8^n=\cdots\cdots$

$=3^{n-1}b_1+3^{n-2}\cdot 8^2+3^{n-3}\cdot 8^3+\cdots\cdots+3\cdot 8^{n-1}+8^n$

$=3^{n-1}\cdot 8\left\{1+\dfrac{8}{3}+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\dfrac{8}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$=3^{n-1}\cdot 8\left\{\dfrac{1-\left(\dfrac{8}{3}\right)^n}{1-\dfrac{8}{3}}\right\}=\dfrac{8}{5}(8^n-3^n)$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{5}\left\{1-\left(\frac{3}{8}\right)^n\right\}=\frac{8}{5}$