BASIC問題

1. A$(3-4i)$，B$(-2+3i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。
   (1) 線分 AB を 2：3 に内分する点 C　　(2) 線分 AB の中点 M
   (3) 線分 AB を 5：4 に外分する点 D

2. α，β は複素数で $|\alpha-\beta|=|1-\alpha\overline{\beta}|$ のとき，$|\beta|$ の値を求めよ。ただし，$|\alpha|\fallingdotseq 1$ とする。

3. 2 つの複素数 $\alpha=-2-2\sqrt{3}\,i$，$\beta=-1+i$ について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。
   ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

4. $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$ を計算せよ。

5. $\alpha=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\beta=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とする。複素数平面上で，点 α を点 β を中心として時計回りに $\dfrac{3}{4}\pi$ 回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

STANDARD問題

6. 方程式 $z^4=-8+8\sqrt{3}\,i$ を解け。

7. 複素数平面上の 3 点 A$(1+3i)$，B$(-2+5i)$，C$(2-2i)$ を頂点とする △ABC について，∠BAC の大きさを求めよ。

8. $\alpha=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$ のとき，次の式の値を求めよ。
   (1) $\alpha^9+\alpha^8+\cdots\cdots+\alpha+1$　　(2) $\alpha^9\alpha^8\cdots\cdots\alpha$

9. 複素数平面上の点 z が条件 $2|z-i|=|z+2i|$ を満たすとき，点 z の全体は円を描く．その円の中心 α と半径 r を求めよ．

10. 異なる 3 つの複素数 α，β，γ の間に等式 $\gamma+\sqrt{3}\,i\alpha=(1+\sqrt{3}\,i)\beta$ が成り立つ。
    (1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を極形式で表せ。
    (2) 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC の 3 つの角の大きさを求めよ。

11. 点 O を原点とする複素数平面上で，2 つの複素数 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$，$\beta=\alpha^3$ を表す点をそれぞれ A，B とする。
    (1) ∠AOB を求めよ。
    (2) 3 つの線分の比 OA：OB：AB を求めよ。
    (3) 3 点 O，A，B を通る円の方程式を複素数 z を用いて表せ。

$\boxed{12}$ 2つの複素数 w，z が $w=\dfrac{2z-i}{z+i}$ を満たす。複素数平面上で，点 z が原点を中心とする半径2の円上を動くとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 w はどのような図形を描くか。　(2)　w の絶対値 $|w|$ の最大値を求めよ。

実戦問題

$\boxed{13}$ α，β は複素数とする。$|\alpha|=|\beta|=2$，$\alpha+\beta+2=0$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\alpha\beta$　(2)　$\alpha^2+\beta^2$

$\boxed{14}$ $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$，$z^6+\dfrac{1}{z^6}=1$ のとき，θ の値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

$\boxed{15}$ z は $|z-\sqrt{3}-i|\leqq1$ を満たす複素数で，$w=itz$（t は実数）とする。
t が $0<t\leqq1$ を満たす値をとって変わるとき

(1)　点 w の存在範囲を図示せよ。

(2)　w の偏角 θ のとりうる値の範囲を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$\boxed{1}$ 解答　(1) $\dfrac{5-6i}{5}$　(2) $\dfrac{1-i}{2}$　(3) $-22+31i$

$\boxed{2}$ 解答　$|\beta|=1$

$\boxed{3}$ 解答　$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の順に　$4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$，$2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$

$\boxed{4}$ 解答　$-16+16\sqrt{3}\,i$

$\boxed{5}$ 解答　$\gamma=\dfrac{\sqrt{6}-1}{2}-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}i$

$\boxed{6}$ 解答　$z=\pm(\sqrt{3}+i)$，$\pm(1-\sqrt{3}\,i)$

$\boxed{7}$ 解答　$\dfrac{3}{4}\pi$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　0　(2)　-1

$\boxed{9}$ 解答　$\alpha=2i, r=2$

$\boxed{10}$ 解答　(1)　$2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$　(2)　$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{6}$

$\boxed{11}$ 解答　(1)　$\dfrac{\pi}{2}$　(2)　$1:4:\sqrt{17}$　(3)　$\left|z-\dfrac{-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}\,i}{2}\right|=\sqrt{17}$

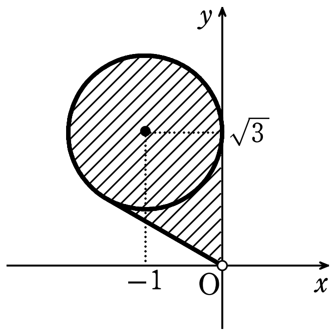
$\boxed{12}$ 解答　(1)　点 3 を中心とする半径 2 の円　(2)　$w=5$ のとき最大値 5

$\boxed{13}$ 解答　(1)　4　(2)　-4

$\boxed{14}$ 解答　$\theta=\dfrac{\pi}{18}$，$\dfrac{5}{18}\pi$，$\dfrac{7}{18}\pi$

$\boxed{15}$ 解答　(1)　原点を除き，境界線は含む

(2)　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$



$\boxed{1}$ (1) $\dfrac{3(3-4i)+2(-2+3i)}{2+3}=\dfrac{5-6i}{5}$　(2) $\dfrac{(3-4i)+(-2+3i)}{2}=\dfrac{1-i}{2}$

(3) $\dfrac{-4(3-4i)+5(-2+3i)}{5-4}=-22+31i$

$\boxed{2}$ $|\alpha-\beta|=|1-\alpha\overline{\beta}|$ の両辺を 2 乗して　$|\alpha-\beta|^2=|1-\alpha\overline{\beta}|^2$

よって　$(\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\beta)}=(1-\alpha\overline{\beta})\overline{(1-\alpha\overline{\beta})}$

$(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})=(1-\alpha\overline{\beta})(1-\overline{\alpha}\beta)$

$\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=1-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}$

$$|\alpha|^2|\beta|^2-|\alpha|^2-|\beta|^2+1=0$$
$$|\alpha|^2(|\beta|^2-1)-(|\beta|^2-1)=0$$
$$(|\alpha|^2-1)(|\beta|^2-1)=0$$

$|\alpha|\neq 1$ より $|\alpha|^2-1\neq 0$ であるから　$|\beta|^2-1=0$

ゆえに　$|\beta|^2=1$　　$|\beta|\geqq 0$ であるから　$|\beta|=1$

$\boxed{3}$ $\alpha=4\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=4\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$

$$\beta=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

よって　$\alpha\beta=4\sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{3}{4}\pi\right)\right\}$

$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{25}{12}\pi+i\sin\frac{25}{12}\pi\right)=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

$\boxed{4}$ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

よって　$\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}\right)^{10}=(\sqrt{2})^{10}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}^{10}$

$$=32\left\{\cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{10}{3}\pi\right)\right\}=32\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=32\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-16+16\sqrt{3}i$$

$\boxed{5}$ 点 β を原点 O に移す平行移動によって，点 α が点 α' に移るとすると

$$\alpha'=\alpha-\beta=\sqrt{3}i$$

点 α' を原点 O を中心として $-\dfrac{3}{4}\pi$ だけ回転した点を α'' とすると

$$\alpha''=\left\{\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right\}\alpha'=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\cdot\sqrt{3}i$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$$

点 α'' は，原点 O を点 β に移す平行移動によって，点 γ に移るから

$$\gamma=\alpha''+\beta=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}-1}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}i$$

$\boxed{6}$ z の極形式を　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

とすると　　$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$

また，$-8+8\sqrt{3}\,i$ を極形式で表すと

$$-8+8\sqrt{3}\,i=16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

よって，方程式は

$$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4=16,\ 4\theta=\frac{2}{3}\pi+2k\pi\quad (k \text{ は整数})$$

$r>0$ であるから　$r=2$　　また　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}$

よって　$z=2\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}\right)\right\}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では　$k=0$，1，2，3

① で $k=0$，1，2，3 としたときの z をそれぞれ z_0，z_1，z_2，z_3 とすると

$$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i,$$

$$z_1=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=-1+\sqrt{3}\,i,$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)=-\sqrt{3}-i,$$

$$z_3=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=1-\sqrt{3}\,i$$

したがって，求める解は

$z=\pm(\sqrt{3}+i)$，$\pm(1-\sqrt{3}\,i)$

$\boxed{7}$ $\alpha=1+3i$，$\beta=-2+5i$，$\gamma=2-2i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(2-2i)-(1+3i)}{(-2+5i)-(1+3i)}=\frac{1-5i}{-3+2i}=\frac{(1-5i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}$$

$$=\frac{-13+13i}{13}=-1+i$$

偏角 θ の範囲を $-\pi<\theta\leqq\pi$ として，$-1+i$ を極形式で表すと

$$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

よって　　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{3}{4}\pi$

8 (1)　$\alpha^{10}=\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^{10}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

よって，α は 1 の 10 乗根である。

$\alpha^{10}=1$ から　　$\alpha^{10}-1=0$

左辺を因数分解して

$$(\alpha-1)(\alpha^9+\alpha^8+\cdots\cdots+\alpha+1)=0$$

$\alpha-1\neq 0$ であるから　　$\alpha^9+\alpha^8+\cdots\cdots+\alpha+1=0$

(2)　$\alpha^9\alpha^8\cdots\cdots\alpha=\alpha^{9+8+\cdots\cdots+1}=\alpha^{45}=(\alpha^{10})^4\alpha^5=\alpha^5=\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^5$

$$=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

9 $2|z-i|=|z+2i|$ から　$4|z-i|^2=|z+2i|^2$

ゆえに　$4(z-i)(\overline{z}+i)=(z+2i)(\overline{z}-2i)$

整理すると　$z\overline{z}+2iz-2i\overline{z}=0$

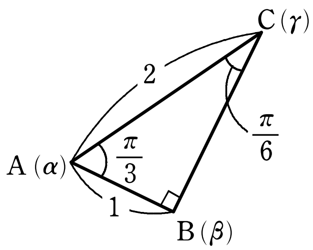
よって　$(z-2i)(\overline{z}+2i)=4$　すなわち　$(z-2i)(\overline{z-2i})=4$

したがって，$|z-2i|^2=4$ より　$|z-2i|=2$ となるから　$\alpha=2i, r=2$

10 (1)　等式から　　$\gamma-\alpha=(1+\sqrt{3}\,i)(\beta-\alpha)$

よって　　$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(2)　(1) から　　$\angle A=\frac{\pi}{3}$



また，$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=2$ であるから　　$|\gamma-\alpha|=2|\beta-\alpha|$

AC＝2AB であるから　　AB：AC＝1：2

よって　　$\angle B=\frac{\pi}{2}$，$\angle C=\frac{\pi}{6}$

11 (1)　$\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，　$\beta=\alpha^3=8\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

ゆえに　　$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{8}{2}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

よって　　$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$

(2)　(1) から　　$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=4$　　　よって　　$\frac{OB}{OA}=4$

OA＝2 であるから　　OB＝8

△AOB は $\angle O=\frac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから

$$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{2^2+8^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$

よって　　OA：OB：AB＝1：4：$\sqrt{17}$

(3)　(1) から，求める円は線分 AB の中点を中心とする半径 $\dfrac{\mathrm{AB}}{2}$ の円である。

線分 AB の中点を表す複素数は

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2}i=\frac{-3\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

また，半径は　$\dfrac{\mathrm{AB}}{2}=\sqrt{17}$　　よって　$\left|z-\dfrac{-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}\,i}{2}\right|=\sqrt{17}$

12　(1)　z は等式 $|z|=2$ を満たす。

$w=\dfrac{2z-i}{z+i}$ から　　$(z+i)w=2z-i$

よって　　$(w-2)z=-i(w+1)$

$w=2$ は等式を満たさないから，$w\fallingdotseq 2$ で　　$z=\dfrac{-i(w+1)}{w-2}$

これを $|z|=2$ に代入すると　　$\left|\dfrac{-i(w+1)}{w-2}\right|=2$

よって　　$|-i||w+1|=2|w-2|$

両辺を 2 乗すると

$$|w+1|^2=4|w-2|^2$$

ゆえに　　$(w+1)(\overline{w+1})=4(w-2)(\overline{w-2})$

$$(w+1)(\overline{w}+1)=4(w-2)(\overline{w}-2)$$

両辺を展開して整理すると

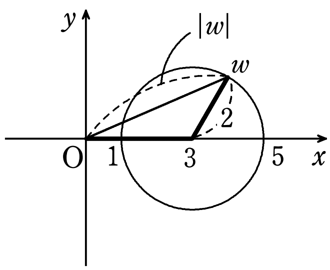
$$w\overline{w}-3w-3\overline{w}+5=0$$

ゆえに　　$(w-3)(\overline{w}-3)=4$

すなわち　$|w-3|^2=2^2$

よって　　$|w-3|=2$

これは，点 3 を中心とする半径 2 の円である。



(2)　右の図から　　$|w|\leqq 3+2=5$

等号が成り立つのは $w=5$ のときである。

よって，$|w|$ は $w=5$ のとき最大値 5 をとる。

13　(1)　$|\alpha|=|\beta|=2$ から　　$|\alpha|^2=|\beta|^2=4$

よって　　$\alpha\overline{\alpha}=4$，$\beta\overline{\beta}=4$　……①

$\alpha+\beta+2=0$ から　　$\alpha+\beta=-2$　……②

また，$\overline{\alpha+\beta+2}=0$ であるから

$$\overline{\alpha}+\overline{\beta}+2=0\quad\cdots\cdots③$$

① から　　$\overline{\alpha}=\dfrac{4}{\alpha}$，$\overline{\beta}=\dfrac{4}{\beta}$

これを ③ に代入して　$\dfrac{4}{\alpha}+\dfrac{4}{\beta}+2=0$

分母を払って整理すると　$\alpha\beta=-2(\alpha+\beta)$

② を代入すると　$\alpha\beta=4$　…… ④

(2)　②，④ から　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-2)^2-2\cdot4=-4$

14　$z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$ の分母を払って整理すると　$z^2-(2\cos\theta)z+1=0$

z について解くと　$z=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm\sqrt{-\sin^2\theta}$

$=\cos\theta\pm i\sin\theta$

[1]　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき

$z^6=(\cos\theta+i\sin\theta)^6=\cos6\theta+i\sin6\theta$

$\dfrac{1}{z^6}=z^{-6}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-6}=\cos(-6\theta)+i\sin(-6\theta)$

$=\cos6\theta-i\sin6\theta$

よって　$z^6+\dfrac{1}{z^6}=2\cos6\theta$

[2]　$z=\cos\theta-i\sin\theta$ のとき

$z^6=(\cos\theta-i\sin\theta)^6=\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^6$

$=\cos(-6\theta)+i\sin(-6\theta)=\cos6\theta-i\sin6\theta$

$\dfrac{1}{z^6}=z^{-6}=(\cos\theta-i\sin\theta)^{-6}=\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^{-6}$

$=\cos6\theta+i\sin6\theta$

よって　$z^6+\dfrac{1}{z^6}=2\cos6\theta$

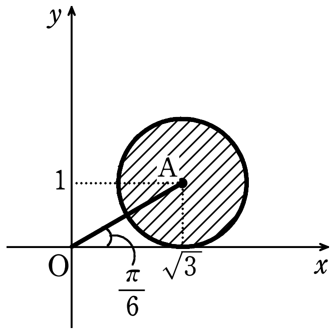
[1]，[2] から　$z^6+\dfrac{1}{z^6}=2\cos6\theta$

$z^6+\dfrac{1}{z^6}=1$ であるから　$2\cos6\theta=1$　　ゆえに　$\cos6\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0\leqq6\theta<3\pi$ であるから　$6\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi$

したがって　$\theta=\dfrac{\pi}{18},\ \dfrac{5}{18}\pi,\ \dfrac{7}{18}\pi$

$\boxed{15}$ (1)　$|z-(\sqrt{3}+i)|\leqq 1$ から，点 z の存在範囲は，点 A $(\sqrt{3}+i)$ を中心とする半径 1 の円の周および内部。



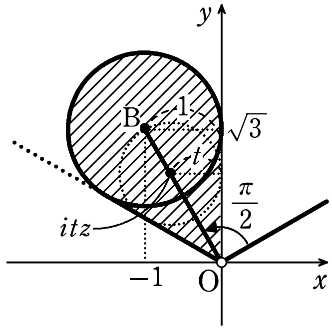
また　$w=itz$

$$=t\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)z$$

よって，点 w は点 z を原点を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転して，さらに原点からの距離を t 倍した点である。

$i(\sqrt{3}+i)=-1+\sqrt{3}\,i$ より B$(-1+\sqrt{3}\,i)$ とすると，

$0<t\leqq 1$ であるから，点 w の存在範囲は，線分 OB 上の原点を除く点 $-t+\sqrt{3}\,it$ を中心とする，半径 t の円の周および内部。図示すると，右図の斜線部分。ただし，原点を除き，境界線は含む。



(2)　(1) の結果から，w の偏角 θ のとりうる値の範囲は

$$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$$

BASIC問題

1 次の関数のグラフをかけ。また，(2) はその値域を求めよ。

(1) $y=\dfrac{3x+1}{2x-4}$　　(2) $y=\dfrac{x-2}{2x+1}$ $(-1\leqq x<0)$

2 次の関数のグラフをかけ。また，その値域を求めよ。

(1) $y=\sqrt{x+4}-1$　　(2) $y=-\sqrt{1-2x}+2$

3 関数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+a}$ について，$f^{-1}(x)=f(x)$ が成り立つように，定数 a の値を定めよ。

4 $f(x)=2x-1$，$g(x)=ax+b$ について，$(g\circ f)(x)=8x-3$ が成り立つとき，定数 a，b の値を求めよ。

5 関数 $f(x)=ax+b$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f^{-1}(1)=2$，$f^{-1}(5)=4$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

STANDARD問題

6 関数 $y=\log_4 x$ ……① のグラフを ア$\boxed{}$ 軸方向に イ$\boxed{}$ だけ平行移動したグラフの方程式は $y=\log_4 16x$ である。また，関数 ① のグラフを x 軸方向に ウ$\boxed{}$，y 軸方向に エ$\boxed{}$ だけ平行移動したグラフの方程式は $y=\log_4\dfrac{x+2}{64}$ である。

関数 $y=2^x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称な位置に移動したグラフの方程式は $y=$ オ$\boxed{}$ ……② である。② のグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したグラフが 2 点 $(0,\ -1)$，$(4,\ 0)$ を通るとき，$a=$ カ$\boxed{}$，$b=$ キ$\boxed{}$ である。

7 $y=\dfrac{1}{8}\cdot 2^x$ は，$y=2^x$ を x 軸の正の方向に ア$\boxed{}$ だけ平行移動したグラフであり，更に，$x=2$ を軸に線対称に移すと，$y=$ イ$\boxed{}$ となる.

8 関数 $y=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$ の周期は，$\boxed{ア}\pi$ である。

また，この関数のグラフは，$y=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\pi$，$y$ 軸方向に $\boxed{エ}$ だけ平行移動したものである。

9　関数 $y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ の逆関数を求めよ。

10　＊　関数 $f(x)=\dfrac{2x+a}{x+1}$，$g(x)=\dfrac{3x+b}{x+c}$ を考える。

合成関数 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ が $(f\circ g)(x)=\dfrac{9x+8}{4x+3}$ を満たすとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

11　不等式 $\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{x}}\geqq x^2$ を解け.

12　不等式 $\sqrt{4x-x^2}>3-x$ を解け。

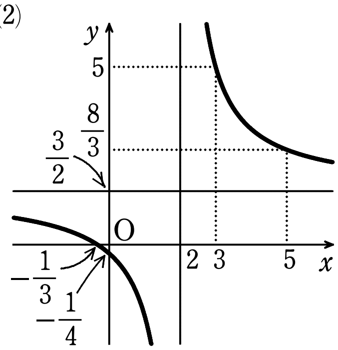
実戦問題

13　関数 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{3}$ の周期のうち，正で最小のものを求めよ。

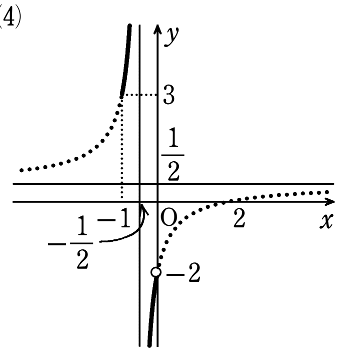
14　関数 $f(x)=\log_2(x+3)$ に対し，その逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。また，$g(x)=\sqrt{x+1}$ のとき，不等式 $g^{-1}(x)\geqq g(x)$ を満たす x の範囲を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　(2)〔図〕実線部分，$y<-2$，$3\leqq y$

(2)



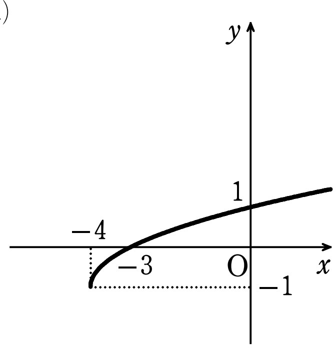
(4)



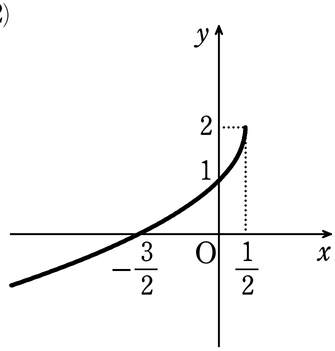
(

$\boxed{2}$ 解答　(1)〔図〕，値域　$y\geqq -1$　　(2)〔図〕，値域　$y\leqq 2$

(1)



(2)



$\boxed{3}$ 解答　$a=-2$

$\boxed{4}$ 解答　$a=4$，$b=1$

$\boxed{5}$ 解答　$a=2$，$b=-3$

$\boxed{6}$ 解答　(ア)　y　　(イ)　2　　(ウ)　-2　　(エ)　-3　　(オ)　$\log_2 x$　　(カ)　-4

(キ)　-3

$\boxed{7}$ 解答　(ア)　3　　(イ)　2^{-x+1}

$\boxed{8}$ 解答　(ア)　4　　$\frac{(イ)}{(ウ)}$　$\frac{2}{3}$　　(エ)　1

$\boxed{9}$ 解答　$y=x+\sqrt{x^2+1}$

$\boxed{10}$ 解答　$a=3$，$b=1$，$c=2$

$\boxed{11}$ 解答　$-3\leqq x<-2$，$0<x\leqq 1$

$\boxed{12}$ 解答　$\frac{5-\sqrt{7}}{2}<x\leqq 4$

$\boxed{13}$ 解答　12π

$\boxed{14}$ 解答　$f^{-1}(x)=2^x-3$，$x\geqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{1}$ (1)　$\dfrac{3x+1}{2x-4}=\dfrac{\frac{3}{2}(2x-4)+7}{2x-4}=\dfrac{7}{2x-4}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{\frac{7}{2}}{x-2}+\dfrac{3}{2}$

よって，$y=\dfrac{3x+1}{2x-4}$ のグラフは，$y=\dfrac{7}{2x}$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に $\dfrac{3}{2}$ だけ平行移動したものである。

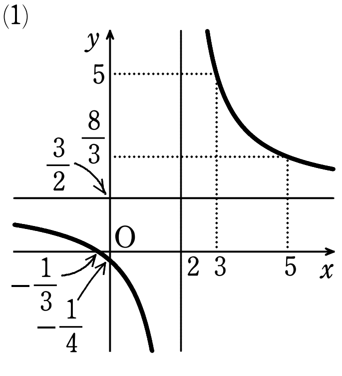
漸近線は 2 直線 $x=2$，$y=\dfrac{3}{2}$ 〔図〕

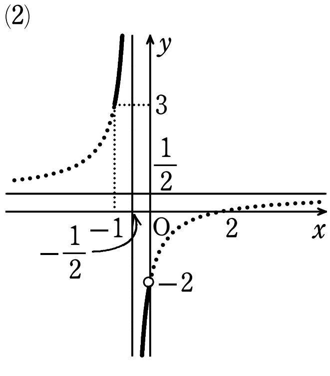
(2)　$\dfrac{x-2}{2x+1}=\dfrac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{5}{2}}{2x+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\frac{5}{2}}{2x+1}=-\dfrac{\frac{5}{4}}{x+\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}$

$x=-1$ のとき　$y=3$，$x=0$ のとき　$y=-2$

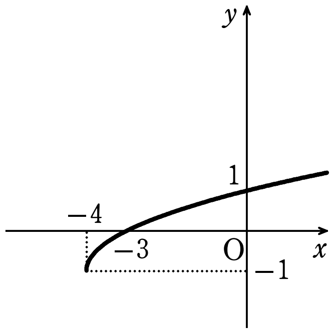
よって，この関数のグラフは，図の実線部分のようになる。

また，値域は　　$y<-2$，$3\leqq y$



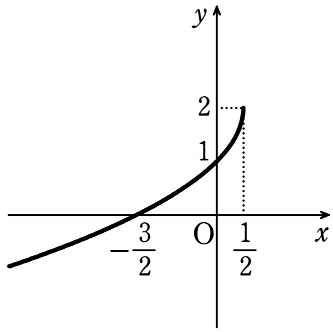


$\boxed{2}$ (1)　$y=\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -4，y 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，右の図のようになる。
グラフから，値域は　　$y \geqq -1$



(2)　$-\sqrt{1-2x}+2=-\sqrt{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+2$

よって，$y=-\sqrt{1-2x}+2$ のグラフは，
$y=-\sqrt{-2x}$ のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{2}$，y 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，右の図のようになる。
グラフから，値域は　　$y \leqq 2$



$\boxed{3}$ $y=\dfrac{2x+1}{x+a}$ とする。

$$\frac{2x+1}{x+a}=\frac{2(x+a)-2a+1}{x+a}=\frac{1-2a}{x+a}+2$$

$a=\frac{1}{2}$ のとき，y は定数関数となるから　$a \neq \frac{1}{2}$　　　　このとき　$y \neq 2$

$y(x+a)=2x+1$ より　　$(y-2)x=1-ay$

$y \neq 2$ であるから　　　$x=\dfrac{1-ay}{y-2}$

よって，逆関数は　　　$f^{-1}(x)=\dfrac{1-ax}{x-2}$

$\dfrac{2x+1}{x+a}=\dfrac{1-ax}{x-2}$ が x についての恒等式である。

両辺に $(x+a)(x-2)$ を掛けて，x について整理すると

$$(a+2)x^2+(a^2-4)x-a-2=0$$

よって　　$a+2=0$，$a^2-4=0$，$-a-2=0$

したがって　　$a=-2$

$\boxed{4}$ $(g\circ f)(x)=g(f(x))=a(2x-1)+b=2ax-a+b$

$(g\circ f)(x)=8x-3$ が成り立つから，$2ax-a+b=8x-3$ は x の恒等式である。

両辺の係数を比較すると　　$2a=8$，$-a+b=-3$

これを解いて　　$a=4$，$b=1$

$\boxed{5}$ $f^{-1}(1)=2$　から　　$f(2)=1$

よって　　　$2a+b=1$　……①

$f^{-1}(5)=4$　から　　$f(4)=5$

よって　　　$4a+b=5$　……②

①，② を解くと　　$a=2$，$b=-3$

$\boxed{6}$

$$y=\log_4 16x=\log_4 x+2$$

よって，① のグラフを ${}^{ア}y$ 軸方向に ${}^{イ}2$ だけ平行移動すると，$y=\log_4 16x$ のグラフになる。

$$y=\log_4\frac{x+2}{64}=\log_4(x+2)-3$$

よって，① のグラフを x 軸方向に ${}^{ウ}-2$，y 軸方向に ${}^{エ}-3$ だけ平行移動すると，

$y=\log_4\dfrac{x+2}{64}$ のグラフになる。

$y=2^x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称移動すると，$y={}^{オ}\log_2 x$ のグラフになる。

このグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動すると

$$y=\log_2(x-a)+b$$

のグラフになる。

これが 2 点 $(0,\ -1)$，$(4,\ 0)$ を通るとき

$$\log_2(-a)+b=-1 \quad \cdots\cdots ③$$

$$\log_2(4-a)+b=0 \quad \cdots\cdots ④$$

ここで，真数は正であるから　　$-a>0$ かつ $4-a>0$　　　よって　$a<0$　……⑤

③−④ から　　$\log_2(-a)-\log_2(4-a)=-1$

$$\log_2(-a)+1=\log_2(4-a)$$

$$\log_2(-2a)=\log_2(4-a)$$

よって　　$-2a=4-a$　　　ゆえに　$a={}^{カ}-4$　　　これは ⑤ を満たす。

④ から　　$b=-\log_2(4-a)=-\log_2 8={}^{キ}-3$

$\boxed{7}$ $y=\dfrac{1}{8}\cdot 2^x=2^{x-3}$　　よって，$y=2^x$ を x 軸の正の方向に ${}^{ア}3$ だけ平行移動.

$x=3$ を $x=2$ を軸に線対称に移すと $x=1$

よって，$y=2^{x-3}$ を $x=2$ を軸に線対称に移すと　$y=2^{-(x-1)}$　　すなわち　$y={}^{イ}2^{-x+1}$

$\boxed{8}$ $y=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)+1=2\sin\dfrac{1}{2}\left(\theta-\dfrac{2}{3}\pi\right)+1$

よって，周期は　$2\pi\div\dfrac{1}{2}={}^{ア}4\pi$

また，$y-1=2\sin\dfrac{1}{2}\left(\theta-\dfrac{2}{3}\pi\right)$ であるから，この関数のグラフは $y=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ のグラフを

θ 軸方向に $\dfrac{{}^{イ}2}{{}^{ウ}3}\pi$，$y$ 軸方向に ${}^{エ}1$ だけ平行移動したものである。

$\boxed{9}$ $y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ の両辺に $2x$ を掛けて　　$2xy=x^2-1$

変形すると　　$(x-y)^2=y^2+1$　…… ①

ここで，$x>0$ から

$$x-y=x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)>0$$

よって，① から　　$x-y=\sqrt{y^2+1}$

ゆえに　　$x=y+\sqrt{y^2+1}$

したがって，求める逆関数は，x と y を入れ替えて　　$y=x+\sqrt{x^2+1}$

$\boxed{10}$ $f(g(x))=f\left(\dfrac{3x+b}{x+c}\right)=\dfrac{2\cdot\dfrac{3x+b}{x+c}+a}{\dfrac{3x+b}{x+c}+1}=\dfrac{(a+6)x+2b+ac}{4x+b+c}$

$f(g(x))=\dfrac{9x+8}{4x+3}$ から　$\dfrac{(a+6)x+2b+ac}{4x+b+c}=\dfrac{9x+8}{4x+3}$

分母を払って整理すると

$(12-4a)x^2+(14-3a+b+9c-4ac)x+(2b+8c-3ac)=0$

これが x について恒等式であるから

$12-4a=0$　……①，$14-3a+b+9c-4ac=0$　……②，

$2b+8c-3ac=0$　……③

①，②，③から　$a=3$，$b=1$，$c=2$

(別解)　$f(g(x))=\dfrac{(a+6)x+2b+ac}{4x+b+c}$ から　$\dfrac{(a+6)x+2b+ac}{4x+b+c}=\dfrac{9x+8}{4x+3}$

これが x についての恒等式である。分母の x の係数は 4 で等しいから他の係数も等しい。よって

$a+6=9$ ……④，$2b+ac=8$ ……⑤，$b+c=3$ ……⑥

④，⑤，⑥から　$a=3$，$b=1$，$c=2$

$\boxed{11}$ $\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{x}}\geqq x^2$ から　$x\fallingdotseq 0$，$x\fallingdotseq -2$，$\dfrac{3x}{x+2}\geqq x^2$

ゆえに　$\dfrac{x(x-1)(x+3)}{x+2}\leqq 0$

よって　$-3\leqq x<-2$，$0<x\leqq 1$

12 $4x-x^2 \geqq 0$ から　$0 \leqq x \leqq 4$　……①

[1]　$3-x<0$ すなわち $x>3$ のとき

①から　　$3<x \leqq 4$

このとき，$\sqrt{4x-x^2} \geqq 0$ であるから与えられた不等式は成り立つ。

[2]　$3-x \geqq 0$ すなわち $x \leqq 3$ のとき

①から　　$0 \leqq x \leqq 3$　……②

このとき，$\sqrt{4x-x^2} \geqq 0$，$3-x \geqq 0$ であるから与えられた不等式の両辺を 2 乗して

$$4x-x^2>(3-x)^2$$

整理すると　　$2x^2-10x+9<0$

これを解くと　$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x<\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$

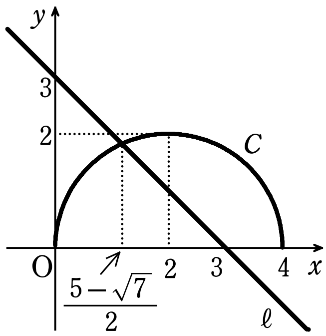
$2<\sqrt{7}<3$ であるから，② より　　$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x \leqq 3$

[1]，[2] より　　$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x \leqq 4$

別解　曲線 C：$y=\sqrt{4x-x^2}$ とすると　　$y \geqq 0$，$(x-2)^2+y^2=2^2$

から C は点 $(2,\ 0)$ を中心とする半径 2 の円の $y \geqq 0$ の部分である。

また，直線 ℓ：$y=3-x$ とすると，C と ℓ は右の図のようになる。



C と ℓ の交点の x 座標は $\sqrt{4x-x^2}=3-x$　……③ の実数解である。

両辺を 2 乗して　$4x-x^2=(3-x)^2$

これを解くと　　$x=\dfrac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$

③に適するのは　$x=\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$

図から，不等式の解は　　$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x \leqq 4$

13　$\sin\dfrac{x}{2}$ の周期は　$2 \times 2\pi=4\pi$，$\sin\dfrac{x}{3}$ の周期は　$3 \times 2\pi=6\pi$

4 と 6 の最小公倍数は 12 であるから，求める周期は　12π

14　$y=\log_2(x+3)$ の値域はすべての実数で，これを x について解くと　$x+3=2^y$

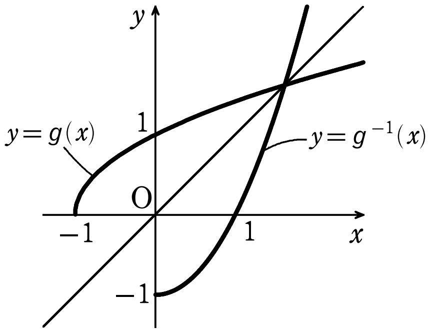
すなわち　$x=2^y-3$　　ゆえに　$f^{-1}(x)=2^x-3$

また，$y=\sqrt{x+1}$ の値域は $y\geqq 0$ で，これを x について解くと　$y^2=x+1$

すなわち　$x=y^2-1$ $(y\geqq 0)$

ゆえに　$g^{-1}(x)=x^2-1$ $(x\geqq 0)$

$y=g^{-1}(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称で，位置関係は右の図のようになる。



よって，$g^{-1}(x)\geqq g(x)$ を満たす x の範囲は

$g^{-1}(x)\geqq x$ を満たす x の範囲に等しい。

ゆえに，$x^2-1\geqq x$ から

$$x\leqq\frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}\leqq x$$

$x\geqq 0$ であるから，$g^{-1}(x)\geqq g(x)$ を満たす x の

範囲は　$x\geqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

BASIC問題

1 次の循環小数の積を１つの既約分数で表せ.　　$0.\dot{1}\dot{2} \times 0.\dot{2}\dot{7}$

2 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$

3 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-3^n}{3^n+2^n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+(-3)^n}{(-3)^n+2^{n+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (8^n-9^n)$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \{(-2)^n+2^{2n}\}$

4 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-5}{4^n}$ の和を求めよ。

STANDARD問題

5 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$ を求めよ。

6 関数 $\displaystyle y=\lim_{n\to\infty} \frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ のグラフをかけ。

7 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの和を求めよ。　　$(3-x)+x(3-x)+x^2(3-x)+\cdots\cdots$

8 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\displaystyle\left(\frac{3}{2}-5\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{3}\right)+\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{9}\right)+\left(\frac{3}{16}-\frac{5}{27}\right)+\cdots\cdots$

(2) $\displaystyle\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}+\frac{7}{16}+\cdots\cdots$

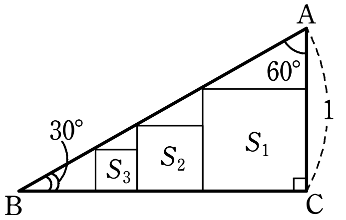
(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

実戦問題

9 数列 $\displaystyle\left\{\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}\right\}$ の極限を求めよ。

10 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ の和を求めよ。

11　$A=60°$，$B=30°$，$\mathrm{AC}=1$ である直角三角形 ABC 内に，右の図のように正方形 S_1，S_2，S_3，…… が限りなく並んでいるとき，これらの正方形の面積の総和を求めよ。



12　$\angle \mathrm{A}=2\theta$ の二等辺三角形 ABC の内接円 O_1 の半径を r とする。等辺 AB，AC と円 O_1 に接する円を O_2 とし，AB，AC と円 O_2 に接する円を O_3 とし，このように，次々に円 O_1，O_2，O_3，O_4，…… が並んでいる。このとき，すべての円の面積の和 S を求めよ。

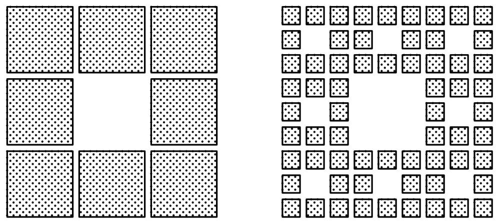
13　二項定理を用いて，数列 $\left\{\dfrac{3^n}{n}\right\}$ の極限を求めよ。

14　$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　$|a_{n+1}-3| \leqq \dfrac{2}{3}|a_n-3|$ を証明せよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

15　図のように正方形を 9 等分して，中央の正方形を取り除いた図形を S_1 とする．残された 8 個の正方形を 9 等分し，それぞれの中央の正方形を取り除いた図形を S_2 とする．このような操作を n 回繰り返して構成される図形を S_n とする．



各々の図形における最小の正方形をセルと呼び，S_n のセルの総数を a_n とし，さらに S_n における隣接したセルが共有する辺の総数を b_n とする．例えば，$a_1=8$，$b_1=8$ である．次の問いに答えよ．

(1)　a_n を求めよ．

(2)　b_2 および b_3 を求めよ．

(3)　b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(4)　b_n を求めよ．

(5)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ．

$\boxed{1}$ 解答　$\dfrac{4}{121}$

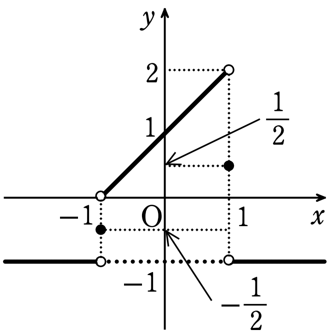
$\boxed{2}$ 解答　(1)　1　　(2)　∞　　(3)　2

$\boxed{3}$ 解答　(1)　-1　　(2)　1　　(3)　$-\infty$　　(4)　∞

$\boxed{4}$ 解答　$-\dfrac{2}{3}$

$\boxed{5}$ 解答　0

$\boxed{6}$ 解答



$\boxed{7}$ 解答　$x=3$，$-1<x<1$；和は $\dfrac{3-x}{1-x}$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　収束，和 $-\dfrac{9}{2}$　　(2)　発散　　(3)　収束し，その和は $\dfrac{3}{4}$

$\boxed{9}$ 解答　$|r|<1$ のとき 0，　$r=1$ のとき $\dfrac{2}{3}$，　$|r|>1$ のとき 1

$\boxed{10}$ 解答　2

$\boxed{11}$ 解答　$\dfrac{3(2\sqrt{3}-1)}{11}$

$\boxed{12}$ 解答　$\dfrac{\pi r^2(1+\sin\theta)^2}{4\sin\theta}$

$\boxed{13}$ 解答　∞

$\boxed{14}$ 解答　(1)　略　　(2)　3

$\boxed{15}$ 解答　(1)　$a_n=8^n$　　(2)　$b_2=88$，$b_3=776$　　(3)　$b_{n+1}=3b_n+8^{n+1}$

(4)　$b_n=\dfrac{8}{5}(8^n-3^n)$　　(5)　$\dfrac{8}{5}$

$\boxed{1}$ $0.\dot{1}\dot{2}\times 0.\dot{2}\dot{7}=0.12(1+0.01+0.0001+\cdots\cdots)\times 0.27(1+0.01+0.0001+\cdots\cdots)$

$$=\frac{0.12}{1-0.01}\times\frac{0.27}{1-0.01}=\frac{12}{99}\times\frac{27}{99}$$

$$=\frac{4}{33}\times\frac{3}{11}=\frac{4}{11}\times\frac{1}{11}=\frac{4}{121}$$

$\boxed{2}$ (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}=\frac{2}{2}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2})^2-(\sqrt{n})^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{(n+2)-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}=\infty$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n})^2-n^2}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+4n)-n^2}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}=\frac{4}{2}=2$$

$\boxed{3}$ (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{0-1}{1+0}=-1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+(-3)^n}{(-3)^n+2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{1+2\left(-\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{0+1}{1+0}=1$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(8^n-9^n)=\lim_{n\to\infty}9^n\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^n-1\right\}=-\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{(-2)^n+2^{2n}\}=\lim_{n\to\infty}2^{2n}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1\right\}=\infty$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-5}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{5}{4^n}\right\}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ は初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4^n}$ は初項 $\frac{5}{4}$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数である。

公比の絶対値がともに１より小さいから，この２つの無限等比級数はともに収束する。

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-5}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}$

$\boxed{5}$ $-1\leqq\cos\dfrac{n\pi}{2}\leqq1$ から　$-\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}\leqq\dfrac{1}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$　であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=0$

$\boxed{6}$ $\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}$

[1]　$|x|<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$ であるから　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{1+x-0}{1+0}=x+1$

[2]　$x=1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$ であるから　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{1+1-1}{1+1}=\frac{1}{2}$

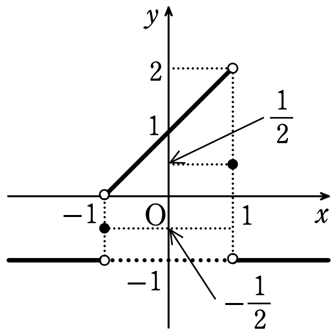
[3]　$x=-1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$ であるから　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{1-1-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$

[4]　$|x|>1$ のとき　$\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n-1}}=0$ であるから

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}+\frac{1}{x^{2n-1}}-1}{\frac{1}{x^{2n}}+1}$$

$$=\frac{0+0-1}{0+1}=-1$$

以上から，グラフは右の図のようになる。



$\boxed{7}$　初項が $3-x$，公比が x であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は　　$3-x=0$　または　$|x|<1$

よって，求める x の値の範囲は　　$x=3$，$-1<x<1$

$x=3$ のとき，各項はすべて 0 になるから収束し，その和は　0

$-1<x<1$ のとき，和は　$\dfrac{3-x}{1-x}$　　これは，$x=3$ のときも成り立つ。

よって，求める和は　$\dfrac{3-x}{1-x}$

$\boxed{8}$ (1)　第 n 項は　$\dfrac{3}{2^n}-\dfrac{5}{3^{n-1}}$

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^{n-1}}$ の公比は，それぞれ $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから，これらはともに収束する。

よって，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{5}{3^{n-1}}\right)$ は収束し，その和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{5}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=3-\frac{15}{2}=-\frac{9}{2}$$

(2)　第 n 項を a_n とすると　　$a_n=\dfrac{2n-1}{4n}$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{4}=\frac{1}{2}$

よって，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束しないから，この無限級数は発散する。

(3)　$\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

よって　　$S_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$

したがって，この無限級数は収束し，その和は $\dfrac{3}{4}$ である。

$\boxed{9}$　[1]　$|r|<1$のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0,\ \lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\frac{0+0}{0+2}=0$

[2]　$r=1$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=1,\ \lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$

[3]　$|r|>1$　のとき

$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{2n}}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{r^n}}{1+\frac{2}{r^{2n}}}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

$\boxed{10}$

$$\frac{n+3}{n(n+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{3}{n}-\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{n}\cdot\frac{2^n}{3^{n-1}}-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2^{n+1}}{3^n}$$

よって　$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+3}{k(k+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{2^k}{3^{k-1}}-\frac{1}{k+1}\cdot\frac{2^{k+1}}{3^k}\right)$$

$$=\left(1\cdot\frac{2}{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2^3}{3^2}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2^n}{3^{n-1}}-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2^{n+1}}{3^n}\right)$$

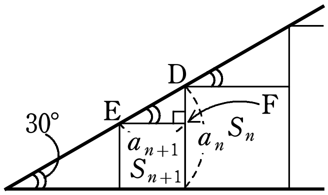
$$=2-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2^{n+1}}{3^n}$$

したがって　$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot 2\right\}=2$$

$\boxed{11}$ 正方形 S_n の１辺の長さを a_n，面積を T_n とする。

図の直角三角形 DEF において

$$\mathrm{EF}=\sqrt{3}\,\mathrm{DF}$$



よって　$a_{n+1}=\sqrt{3}(a_n-a_{n+1})$

ゆえに　$a_{n+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$　　また　$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

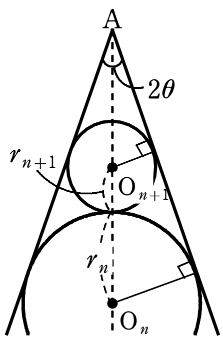
よって　$a_n=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^n$　　ゆえに　$T_n={a_n}^2=\left\{\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{2}\right\}^n$

したがって，正方形の面積の総和は，初項，公比 r がともに $\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{2}$ の無限等比級数で表され，公比について $|r|<1$ であるから，この無限等比級数は収束する。

よって，その和は　$$\frac{3(2-\sqrt{3})}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{2}}=\frac{3(2-\sqrt{3})}{2-3(2-\sqrt{3})}=\frac{3(2\sqrt{3}-1)}{11}$$

$\boxed{12}$ 円 O_n の半径を r_n，中心を点 O_n とすると

$$\mathrm{AO}_n-\mathrm{AO}_{n+1}=r_n+r_{n+1}\quad\cdots\cdots ①$$



また，$\mathrm{AO}_n\sin\theta=r_n$，$\mathrm{AO}_{n+1}\sin\theta=r_{n+1}$ であるから

$$\mathrm{AO}_n=\frac{r_n}{\sin\theta},\quad \mathrm{AO}_{n+1}=\frac{r_{n+1}}{\sin\theta}$$

これらを ① に代入して　$$\frac{r_n}{\sin\theta}-\frac{r_{n+1}}{\sin\theta}=r_n+r_{n+1}$$

よって　$(1+\sin\theta)r_{n+1}=(1-\sin\theta)r_n$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$1+\sin\theta\neq 0$ で　$r_{n+1}=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_n$

よって，円 O_n の面積を S_n とすると　$S_{n+1}=\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2 S_n$

また　　$S_1=\pi r^2$

ゆえに，すべての円の面積の和 S は，初項 πr^2，公比 $\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2$ の無限等比級数の和で表される。

ここで $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\sin\theta<1$ であるから　　$0<\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}<1$

したがって，無限等比級数は収束して

$$S=\frac{\pi r^2}{1-\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2}=\frac{\pi r^2(1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)^2-(1-\sin\theta)^2}=\frac{\pi r^2(1+\sin\theta)^2}{4\sin\theta}$$

13　$3^n=(1+2)^n\geqq 1+2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 2^2=2n^2+1$

よって　　$\dfrac{3^n}{n}\geqq\dfrac{2n^2+1}{n}=2n+\dfrac{1}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2n+\frac{1}{n}\right)=\infty$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n}=\infty$

14　(1)　$a_{n+1}-3=\sqrt{2a_n+3}-3=\dfrac{(\sqrt{2a_n+3}-3)(\sqrt{2a_n+3}+3)}{\sqrt{2a_n+3}+3}$

$$=\frac{(2a_n+3)-9}{\sqrt{2a_n+3}+3}=\frac{2(a_n-3)}{\sqrt{2a_n+3}+3}$$

よって　　$|a_{n+1}-3|=\dfrac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3}|a_n-3|$

$\sqrt{2a_n+3}+3\geqq 3$ であるから　　$|a_{n+1}-3|\leqq\dfrac{2}{3}|a_n-3|$

(2)　(1) で示した不等式から

$$|a_n-3|\leqq\frac{2}{3}|a_{n-1}-3|\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^2|a_{n-2}-3|\leqq\cdots\cdots\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}|a_1-3|$$

よって　　$0\leqq|a_n-3|\leqq\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}|1-3|$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}|1-3|=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-3|=0$

したがって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=3$

15　(1)　$n\geqq 2$ のとき　$a_n=8a_{n-1}$

また，$a_1=8$ であるから　$a_n=8^n$

(2)　$b_2=8\cdot 8+8\cdot 3=88$，$b_3=a_2\cdot 8+b_2\cdot 3=8^3+88\cdot 3=776$

(3)　$a_n=8^n$ から　$b_{n+1}=8a_n+3b_n=3b_n+8^{n+1}$

(4) $b_n = 3b_{n-1} + 8^n = 3(3b_{n-2} + 8^{n-1}) + 8^n$

$= 3^2(3b_{n-3} + 8^{n-2}) + 3\cdot 8^{n-1} + 8^n = \cdots\cdots$

$= 3^{n-1}b_1 + 3^{n-2}\cdot 8^2 + 3^{n-3}\cdot 8^3 + \cdots\cdots + 3\cdot 8^{n-1} + 8^n$

$= 3^{n-1}\cdot 8\left\{1 + \dfrac{8}{3} + \left(\dfrac{8}{3}\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\dfrac{8}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$= 3^{n-1}\cdot 8\left\{\dfrac{1-\left(\dfrac{8}{3}\right)^n}{1-\dfrac{8}{3}}\right\} = \dfrac{8}{5}(8^n - 3^n)$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{5}\left\{1-\left(\frac{3}{8}\right)^n\right\} = \frac{8}{5}$

BASIC問題

1 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{2x+3}}{x-3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

2 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

3 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+4x}+x)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2-x}}$

4 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

5 $x\leqq 0$ のとき　$f(x)=1$，　$0<x<\pi$ のとき　$f(x)=\dfrac{ax^2}{1-\cos x}$，　$x\geqq \pi$ のとき　$f(x)=b$ である関数 $f(x)$ が，すべての区間で連続になるように，定数 a，b の値を定めよ。

STANDARD問題

6 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$

7 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}$

8 次の極限を調べよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -3-0}\frac{x+3}{|2x+6|}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{|x^2-4|}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{x^2-x}$

9 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=1$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

10 次の極限を求めよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

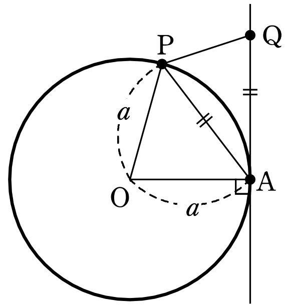
(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{|x|}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}([2x]-[x])$

11 次の極限値を求めよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$

実戦問題

12 半径 a の円 O の周上に動点 P と定点 A がある。A における接線上に AQ＝AP であるような点 Q をOA に関して P と同じ側にとる。P が A に限りなく近づくとき，$\dfrac{\mathrm{PQ}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^2}$ の極限値を求めよ。



13 次の極限値を計算して，n の単項式で表せ。

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots\cdots+\sin(2n-1)x}{x-\pi}$$

14 次の 2 つの条件をともに満たす多項式で表された関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1,\ \ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-3$$

15 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a\cos^2 x+(3b+2)\sin x-2a+b+1}{\sin^3 x+a\cos^2 x-a}=c$ となるように実数の定数 a, b, c の値を定めよ.

$\boxed{1}$ 解答 (1) $\dfrac{2}{3}$　(2) 1

$\boxed{2}$ 解答 (1) $\dfrac{5}{3}$　(2) 2

$\boxed{3}$ 解答 (1) -2　(2) $-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{4}$ 解答 (1) e^2　(2) 1　(3) $\dfrac{1}{e^2}$　(4) $\dfrac{1}{e}$

$\boxed{5}$ 解答 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{\pi^2}{4}$

$\boxed{6}$ 解答 (1) $\dfrac{2}{3}$　(2) 1

$\boxed{7}$ 解答 (1) 1　(2) $-\pi$

$\boxed{8}$ 解答 (1) $-\dfrac{1}{2}$　(2) 0　(3) 極限はない

$\boxed{9}$ 解答 $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=0$

$\boxed{10}$ 解答 (1) 存在しない　(2) 2

$\boxed{11}$ 解答 (1) 3　(2) 5

$\boxed{12}$ 解答 $\dfrac{1}{2a}$

$\boxed{13}$ 解答 $-n^2$

$\boxed{14}$ 解答 $f(x)=2x^3+x^2-3x$

$\boxed{15}$ 解答 $a=\dfrac{1}{3}, b=-\dfrac{2}{3}, c=1$

$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x-\sqrt{2x+3}}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-\sqrt{2x+3})(x+\sqrt{2x+3})}{(x-3)(x+\sqrt{2x+3})}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-(2x+3)}{(x-3)(x+\sqrt{2x+3})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)(x+\sqrt{2x+3})}=\lim_{x\to3}\frac{x+1}{x+\sqrt{2x+3}}=\frac{4}{3+\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$\displaystyle=\frac{2}{1+1}=1$

$\boxed{2}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{5}{3}\cdot\frac{3x}{\sin3x}\cdot\frac{\sin5x}{5x}=\lim_{x\to0}\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sin3x}{3x}}\cdot\frac{\sin5x}{5x}=\frac{5}{3}\cdot1\cdot1=\frac{5}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{x^2}=\lim_{x\to0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\cdot1=2$

$\boxed{3}$ (1) $x=-t$ とおくと　$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow+\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}+x)=\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{t^2-4t}-t)$

$\displaystyle=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\sqrt{t^2-4t}-t)(\sqrt{t^2-4t}+t)}{\sqrt{t^2-4t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to+\infty}\frac{-4t}{\sqrt{t^2-4t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{t}}+1}=\frac{-4}{2}=-2$

(2) $x=-t$ とおくと　$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow+\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2-x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\sqrt{2}\,t}{\sqrt{2t^2-t}+\sqrt{2t^2+t}}$

$\displaystyle=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2-\frac{1}{t}}+\sqrt{2+\frac{1}{t}}}=-\frac{1}{2}$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2-\frac{1}{x}}}=-\frac{1}{2}$

注意　別解では，$x<0$ のとき　$x=-\sqrt{x^2}$ であることに注意する。

$\boxed{4}$ (1) $2x=h$ とおくと　$x\longrightarrow0$ のとき　$h\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{2}{h}}=\lim_{h\to0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^2=e^2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e=1$

(3) $-\dfrac{2}{x}=h$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$h\longrightarrow 0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{h\to 0}(1+h)^{-\frac{2}{h}}=\lim_{h\to 0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

(4) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x=\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^x$

$-\dfrac{1}{x+1}=h$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$h\longrightarrow 0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{h\to 0}(1+h)^{-1-\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\frac{\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-1}}{1+h}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$\boxed{5}$ $f(x)$ がすべての区間で連続となるための必要十分条件は，$f(x)$ が $x=0$，$x=\pi$ で連続となることである。

$x=0$ で連続であるための条件は

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=f(0)$　　すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{ax^2}{1-\cos x}=1$　$\cdots\cdots$ ①

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{ax^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{ax^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to+0}a\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2(1+\cos x)=2a$

よって，① から　$2a=1$　　ゆえに　$a=\dfrac{1}{2}$　$\cdots\cdots$ ②

また，$x=\pi$ で連続であるための条件は

$\displaystyle\lim_{x\to\pi-0}f(x)=f(\pi)$　　すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to\pi-0}\frac{ax^2}{1-\cos x}=b$

よって　$\dfrac{\pi^2}{2}a=b$　　② を代入して　$b=\dfrac{\pi^2}{4}$

以上から　　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{\pi^2}{4}$

$\boxed{6}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{(1+x)-(1-x)}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\frac{2}{3}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}\right)}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1+x^2)}{(1-x^2)-(1-x)}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+1}{1+1}=1$$

$\boxed{7}$ (1)　$x-\pi=t$ とおくと　$x\longrightarrow\pi$ のとき $t\longrightarrow0$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$$

(2)　$x-1=t$ とおくと　$x\longrightarrow1$ のとき $t\longrightarrow0$

$\sin\pi x=\sin\pi(t+1)=\sin(\pi+\pi t)=-\sin\pi t$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\pi t}{t}=\lim_{t\to0}\pi\cdot\left(-\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)=-\pi$

$\boxed{8}$ (1)　$x<-3$ のとき　$|2x+6|=|2(x+3)|=-2(x+3)$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to-3-0}\frac{x+3}{|2x+6|}=\lim_{x\to-3-0}\frac{x+3}{-2(x+3)}=\lim_{x\to-3-0}\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$

(2)　$x=2$ の近くで　$x>2$ のとき　$|x^2-4|=x^2-4$,

$x<2$ のとき　$|x^2-4|=-(x^2-4)$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to2+0}\frac{(x-2)^2}{|x^2-4|}=\lim_{x\to2+0}\frac{(x-2)^2}{x^2-4}=\lim_{x\to2+0}\frac{x-2}{x+2}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{(x-2)^2}{|x^2-4|}=\lim_{x\to2-0}\frac{(x-2)^2}{-(x^2-4)}=\lim_{x\to2-0}\left(-\frac{x-2}{x+2}\right)=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{|x^2-4|}=0$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x-2}{x-1}=\infty$

また　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x-2}{x-1}=-\infty$

よって，$x\longrightarrow0$ のときの極限はない。

$\boxed{9}$ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=1$ ……① において，$\displaystyle\lim_{x\to0}(\cos x-1)=0$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to0}(ax\sin x+b)=0$　　すなわち　$b=0$

このとき　$\displaystyle\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=\frac{ax\sin x}{\cos x-1}=\frac{ax\sin x(\cos x+1)}{(\cos x-1)(\cos x+1)}$

$\displaystyle=\frac{ax\sin x(\cos x+1)}{\cos^2x-1}=\frac{ax\sin x(\cos x+1)}{-\sin^2x}$

$\displaystyle=\frac{-ax(\cos x+1)}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}\cdot(-a)(\cos x+1)$

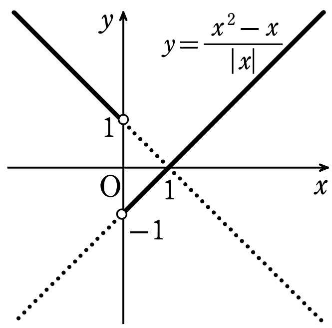
であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x}{\sin x}\cdot(-a)(\cos x+1)\right\}=1\cdot(-a)\cdot2=-2a$

① より $-2a=1$ であるから　$a=-\dfrac{1}{2}$

したがって　$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=0$

10 (1)　$x \longrightarrow +0$ のとき $x>0$ で　$|x|=x$

$x \longrightarrow -0$ のとき $x<0$ で　$|x|=-x$



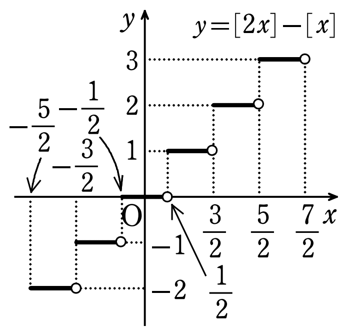
よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x^2-x}{|x|}=\lim_{x\to+0}(x-1)=-1$

$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{x^2-x}{|x|}=\lim_{x\to-0}(1-x)=1$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x^2-x}{|x|}\neq\lim_{x\to-0}\frac{x^2-x}{|x|}$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{|x|}$ は存在しない。

(2)　$2\leqq x<\dfrac{5}{2}$ では　$[2x]=4$，$[x]=2$



$\dfrac{3}{2}\leqq x<2$ では　$[2x]=3$，$[x]=1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to2+0}([2x]-[x])=\lim_{x\to2+0}(4-2)=2$

$\displaystyle\lim_{x\to2-0}([2x]-[x])=\lim_{x\to2-0}(3-1)=2$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to2+0}([2x]-[x])=\lim_{x\to2-0}([2x]-[x])=2$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to2}([2x]-[x])=2$

11 (1)　不等式 $[3x]\leqq3x<[3x]+1$ が成り立つ。

よって，$x>0$ のとき

$\dfrac{[3x]}{x}\leqq3<\dfrac{[3x]}{x}+\dfrac{1}{x}$ となるから　$3-\dfrac{1}{x}<\dfrac{[3x]}{x}\leqq3$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}=3$

(2)　$(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=\left[5^x\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}=5\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$

$x \longrightarrow \infty$ であるから，$x>1$，$0<\dfrac{1}{x}<1$ と考えてよい。

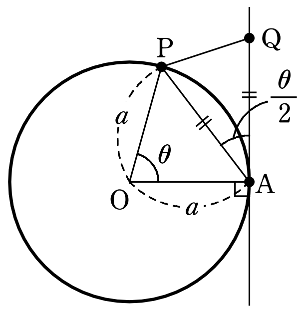
$\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1>1$ であるから　$1=\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}^0<\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}=1$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}=1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}=5$

12 $\theta=\angle\mathrm{AOP}$，$0<\theta<\pi$ とおくと

$$\mathrm{AP}=2a\sin\frac{\theta}{2}，\ \overset{\frown}{\mathrm{AP}}=a\theta$$



また，接線と弦の作る角の性質から

$$\angle\mathrm{PAQ}=\left(\overset{\frown}{\mathrm{AP}}\text{の円周角}\right)=\frac{\theta}{2}$$

$\triangle$APQ は二等辺三角形であるから

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{AP}\sin\frac{\theta}{4}=4a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{4}$$

P が A に限りなく近づくとき，$\theta\longrightarrow+0$ であるから，求める極限値は

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{PQ}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{4a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{4}}{(a\theta)^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{4}{a}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{4}}{\frac{\theta}{4}}=\frac{1}{2a}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2a}$$

13 $x-\pi=t$ とおくと，$x\to\pi$ のとき　$t\to0$

また，$x=t+\pi$ であるから，$k=1$，2，3，……，n に対して

$$\begin{aligned}\sin(2k-1)x&=\sin\{(2k-1)(t+\pi)\}=\sin\{(2k-1)t+2k\pi-\pi\}\\&=\sin\{(2k-1)t-\pi\}=-\sin(2k-1)t\end{aligned}$$

さらに　$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\sin(2k-1)t}{t}=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\sin(2k-1)t}{(2k-1)t}\cdot(2k-1)\right\}=2k-1$

したがって，求める極限値は

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x+\sin3x+\sin5x+\cdots\cdots+\sin(2n-1)x}{x-\pi}\\&=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t-\sin3t-\sin5t-\cdots\cdots-\sin(2n-1)t}{t}\\&=\lim_{t\to0}\left\{-\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)t}{t}\right\}=-\sum_{k=1}^{n}\left\{\lim_{t\to0}\frac{\sin(2k-1)t}{t}\right\}\\&=-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=-\left\{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}\\&=-n^2\end{aligned}$$

14 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}$ が存在するから $f(x)-2x^3$ は 2 次以下の多項式である。

よって，$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ とおける。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=a$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$ より　　$a=1$

また　　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2x^2+ax+b+\frac{c}{x}\right)$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-3$ より　　$c=0$，$b=-3$

したがって　　$f(x)=2x^3+x^2-3x$

15 分母について $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\sin^3 x+a\cos^2 x-a)=0$ であるから，分子について

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\{a\cos^2 x+(3b+2)\sin x-2a+b+1\}=0$ でなければならない．

よって　$a+0-2a+b+1=0$　　ゆえに　$b=a-1$ …… ①

このとき　$\displaystyle(与式)=\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\sin^2 x)+(3a-1)\sin x-a}{\sin^3 x+a(1-\sin^2 x)-a}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-a\sin^2 x+(3a-1)\sin x}{\sin^3 x-a\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\sin x+3a-1}{\sin x(\sin x-a)} \text{ …… ②}$$

分母について $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin x(\sin x-a)=0$ であるから，上と同様に

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(-a\sin x+3a-1)=0$　　よって　$3a-1=0$

ゆえに　　$a=\dfrac{1}{3}$　　① から　$b=-\dfrac{2}{3}$

② から　　$\displaystyle c=\lim_{x\to 0}\frac{-a\sin x}{\sin x(\sin x-a)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3\sin x-1}=1$

BASIC問題

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，次の極限値を a，$f(a)$，$f'(a)$ を用いて表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}$

$\boxed{2}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=x\cos 2x$　　(2) $y=\sin 3x\cos x$

$\boxed{3}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{3+\sin x}$　　(2) $y=\dfrac{x^2}{\cos x}$

$\boxed{4}$ 次の関数を微分せよ。ただし，$a>0$，$a\neq1$ とする。

(1) $y=\tan 3x$　　(2) $y=\sin x^3$　　(3) $y=\cos^3 x$

(4) $y=\log(\sin x)$　　(5) $y=\log\left|\dfrac{2x-1}{2x+1}\right|$　　(6) $y=e^{-2x}\cos 2x$

(7) $y=a^{-x^2}$

$\boxed{5}$ 媒介変数で表された次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1) $x=\dfrac{e^{3t}}{1+t^2}$，$y=\dfrac{t}{1+t^2}$　　(2) $\begin{cases}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$

$\boxed{6}$ 関数 $y=x^{2x}\ (x>0)$ を微分せよ。

$\boxed{7}$ 次の x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を x，y で表せ。

(1) $x^2-xy-y^2=1$　　(2) $x^3-xy^2+y^3=1$

STANDARD問題

8 関数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1 & (x\leqq 2\text{ のとき})\\ x^2+ax+b & (2<x\text{ のとき})\end{cases}$ が $x=2$ で微分可能となるような定数 a，b の値を求めよ。

9 ＊　関数 $y=\dfrac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+4}+4\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\right\}$ を微分せよ。

10 ＊　曲線 $2x^2-2xy+y^2=5$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ。

11 $f(x)=\cos x$ $(\pi<x<2\pi)$ の逆関数を $g(x)$ とする。このとき，$g(x)$ の導関数を求めよ。

12 関数 $x=3\cos t$，$y=2\sin t$ について，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t で表せ。

13 2 曲線 $y=ax^3$ と $y=3\log x$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致しているとき，定数 a の値を求めよ。また，その共有点における接線の方程式を求めよ。

14 2 つの曲線 $y=e^x$，$y=-e^{-x}$ に共通な接線の方程式を求めよ。

実戦問題

15 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$ を求めよ。

16 関数 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。$f(1)=2$，$f'(1)=2$，$f''(1)=3$ のとき，

(1)　$g'(2)$ の値を求めよ。　　(2)　$g''(2)$ の値を求めよ。

17 a，b は定数で $a\fallingdotseq 0$ とする。関数 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+bx+a-b}{x^{2n}+(1-a)x^n+a}$ が $x>0$ で微分可能である条件を求めよ。

1 解答 (1) $5f'(a)$　(2) $2f(a)f'(a)$

2 解答 (1) $y'=\cos 2x-2x\sin 2x$　(2) $y'=3\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x$

3 解答 (1) $y'=-\dfrac{\cos x}{(3+\sin x)^2}$　(2) $y'=\dfrac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}$

4 解答 (1) $y'=\dfrac{3}{\cos^2 3x}$　(2) $y'=3x^2\cos x^3$　(3) $y'=-3\sin x\cos^2 x$

(4) $y'=\dfrac{\cos x}{\sin x}$　(5) $y'=\dfrac{4}{4x^2-1}$　(6) $y'=-2e^{-2x}(\sin 2x+\cos 2x)$

(7) $y'=-2xa^{-x^2}\log a$

5 解答 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-t^2}{(3t^2-2t+3)e^{3t}}$　(2) $\dfrac{dy}{dx}=\tan t$

6 解答 $y'=2x^{2x}(\log x+1)$

7 解答 (1) $\dfrac{2x-y}{x+2y}$　(2) $\dfrac{3x^2-y^2}{y(2x-3y)}$

8 解答 $a=-6$，$b=9$

9 解答 $y'=\sqrt{x^2+4}$

10 解答 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

11 解答 $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12 解答 $-\dfrac{2}{9\sin^3 t}$

13 解答 $a=\dfrac{1}{e}$，$y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{e}}x-2$

14 解答 $y=ex$

15 解答 1

16 解答 (1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $-\dfrac{3}{8}$

17 解答 $a=1$，$b=2$

$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-\{f(a-3h)-f(a)\}}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\left\{2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+3\cdot\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\right\}$

$=2f'(a)+3f'(a)=5f'(a)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\left[\{f(x)+f(a)\}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]=2f(a)f'(a)$

$\boxed{2}$ (1) $y'=\cos2x+x(-\sin2x)\cdot2=\cos2x-2x\sin2x$

(2) $y'=(\cos3x)\cdot3\cos x+\sin3x\cdot(-\sin x)=3\cos3x\cos x-\sin3x\sin x$

$\boxed{3}$ (1) $\displaystyle y'=-\frac{\cos x}{(3+\sin x)^2}$　　(2) $\displaystyle y'=\frac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}$

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle y'=\frac{(3x)'}{\cos^2 3x}=\frac{3}{\cos^2 3x}$

(2) $y'=\cos x^3\cdot(x^3)'=3x^2\cos x^3$

(3) $y'=3\cos^2 x\cdot(\cos x)'=3\cos^2 x\cdot(-\sin x)=-3\sin x\cos^2 x$

(4) $\displaystyle y'=\frac{\cos x}{\sin x}$

(5) $\displaystyle y=\log\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|=\log|2x-1|-\log|2x+1|$

$\displaystyle y'=\frac{2}{2x-1}-\frac{2}{2x+1}=\frac{2(2x+1)-2(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{4}{4x^2-1}$

(6) $y'=(e^{-2x})'\cos2x+e^{-2x}(\cos2x)'=-2e^{-2x}\cos2x-2e^{-2x}\sin2x$

$=-2e^{-2x}(\sin2x+\cos2x)$

(7) $y'=a^{-x^2}\log a\cdot(-x^2)'=-2xa^{-x^2}\log a$

$\boxed{5}$ (1) $\displaystyle\frac{dx}{dt}=\frac{3e^{3t}(1+t^2)-e^{3t}\cdot2t}{(1+t^2)^2}=\frac{e^{3t}(3t^2-2t+3)}{(1+t^2)^2}$,

$\displaystyle\frac{dy}{dt}=\frac{1\cdot(1+t^2)-t\cdot2t}{(1+t^2)^2}=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$

したがって　$\displaystyle\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-t^2}{(3t^2-2t+3)e^{3t}}$

(2) $\displaystyle\frac{dx}{dt}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$

$\displaystyle\frac{dy}{dt}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$

したがって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{t\sin t}{t\cos t}=\tan t$

$\boxed{6}$ $x>0$ であるから　$x^{2x}>0$

両辺の対数をとると　$\log y=2x\log x$

この両辺を x で微分すると　$\dfrac{y'}{y}=2\log x+2x\cdot\dfrac{1}{x}=2(\log x+1)$

よって　$y'=2(\log x+1)\cdot x^{2x}=2x^{2x}(\log x+1)$

$\boxed{7}$ (1)　両辺を x で微分すると　$2x-\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)-2y\dfrac{dy}{dx}=0$

ゆえに　$(x+2y)\dfrac{dy}{dx}=2x-y$

よって，$x+2y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x+2y}$

(2)　両辺を x で微分すると　$3x^2-\left(y^2+x\cdot 2y\dfrac{dy}{dx}\right)+3y^2\dfrac{dy}{dx}=0$

ゆえに　$y(2x-3y)\dfrac{dy}{dx}=3x^2-y^2$

よって，$y(2x-3y)\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-y^2}{y(2x-3y)}$

$\boxed{8}$ 関数 $f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるとき，$f(x)$ は $x=2$ で連続であるから

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$　　すなわち　$\lim_{x\to 2+0}f(x)=\lim_{x\to 2-0}f(x)=f(2)$

よって　$2^2+a\cdot 2+b=-2^2+2\cdot 2+1=1$

すなわち　$2a+b+4=1$　　ゆえに　$b=-2a-3$

したがって
$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to +0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}&=\lim_{h\to +0}\frac{(2+h)^2+a(2+h)+b-1}{h}\\
&=\lim_{h\to +0}\frac{(2+h)^2+a(2+h)-2a-4}{h}\\
&=\lim_{h\to +0}\frac{h^2+(a+4)h}{h}\\
&=\lim_{h\to +0}\{h+(a+4)\}=a+4,
\end{aligned}
$$
$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to -0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}&=\lim_{h\to -0}\frac{-(2+h)^2+2(2+h)+1-1}{h}\\
&=\lim_{h\to -0}\frac{-h^2-2h}{h}\\
&=\lim_{h\to -0}(-h-2)=-2
\end{aligned}
$$

よって，$f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるための条件は　$a+4=-2$

ゆえに　$a=-6$　　このとき　$b=9$

$\boxed{9}$ $y'=\dfrac{1}{2}\left\{(x)'\cdot\sqrt{x^2+4}+x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}\right)'\right\}+2\cdot\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)'}{x+\sqrt{x^2+4}}$

$$=\frac{1}{2}\left[1\cdot\sqrt{x^2+4}+x\cdot\left\{(x^2+4)^{\frac{1}{2}}\right\}'\right]+2\cdot\frac{\left\{x+(x^2+4)^{\frac{1}{2}}\right\}'}{x+\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+4}+x\cdot\left\{\frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+4)'\right\}\right]$$

$$+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\left\{1+\frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+4)'\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+4}+x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\right)+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+4}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\right)+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\frac{x^2+4+x^2+4}{2\sqrt{x^2+4}}=\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}$$

$\boxed{10}$ $2x^2-2xy+y^2=5$ の両辺を x で微分すると　$4x-2(y+xy')+2yy'=0$

ゆえに　$y'(y-x)+2x-y=0$

$x=1$，$y=3$ のとき　$y'=\dfrac{1}{2}$

よって，求める接線の方程式は　$y-3=\dfrac{1}{2}(x-1)$　　すなわち　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

$\boxed{11}$ $y=g(x)$ とすると　$x=g^{-1}(y)=f(y)=\cos y$ $(\pi<y<2\pi)$

$x=\cos y$ の両辺を x で微分すると　$1=-\sin y\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$\pi<y<2\pi$ のとき，$\sin y<0$ であるから

$$g'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\boxed{12}$ $\dfrac{dx}{dt}=-3\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=2\cos t$　　ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2\cos t}{3\sin t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

よって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{2\cos t}{3\sin t}\right)\cdot\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\tan t}\right)\cdot\dfrac{1}{-3\sin t}$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)\cdot\frac{1}{-3\sin t}=-\frac{2}{9\sin^3 t}$$

13 $f(x)=ax^3$，$g(x)=3\log x$ とすると　$f'(x)=3ax^2$，$g'(x)=\dfrac{3}{x}$

2 曲線の共有点の x 座標を p とすると，$f(p)=g(p)$ から　$ap^3=3\log p$　…… ①
また，2 曲線の共有点における接線が一致するから，$f'(p)=g'(p)$ により

$$3ap^2=\frac{3}{p} \qquad \text{すなわち} \qquad ap^3=1 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　$3\log p=1$　　よって　$p=e^{\frac{1}{3}}$

これを ② に代入して　$ae=1$　　ゆえに　$a=\dfrac{1}{e}$

共有点の座標は $\left(e^{\frac{1}{3}},\ 1\right)$ であるから，接線の方程式は

$$y-1=\frac{3}{e^{\frac{1}{3}}}\left(x-e^{\frac{1}{3}}\right) \qquad \text{すなわち} \qquad y=\frac{3}{\sqrt[3]{e}}x-2$$

14 $y=e^x$ から　$y'=e^x$　　　$y=-e^{-x}$ から　$y'=e^{-x}$
曲線 $y=e^x$ 上の点 $(p,\ e^p)$ における接線の方程式は

$$y-e^p=e^p(x-p) \qquad \text{すなわち} \quad y=e^px+(1-p)e^p \qquad \cdots\cdots ①$$

曲線 $y=-e^{-x}$ 上の点 $(q,\ -e^{-q})$ における接線の方程式は

$$y+e^{-q}=e^{-q}(x-q) \quad \text{すなわち} \quad y=e^{-q}x-(1+q)e^{-q} \quad \cdots\cdots ②$$

① と ② が一致するとき

$$e^p=e^{-q} \quad \cdots\cdots ③, \qquad (1-p)e^p=-(1+q)e^{-q} \quad \cdots\cdots ④$$

③ から　　$q=-p$
これを ④ に代入して　　$(1-p)e^p=-(1-p)e^p$
ゆえに　　$p=1$　　　したがって，求める方程式は　$y=ex$

15 $f(x)=\log x$ とすると　　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\log x-0}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}=f'(1)$　　　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ であるから　(与式)$=1$

16 (1)　$y=g(x)=f^{-1}(x)$ とおくと　　$x=f(y)$

したがって　　$\dfrac{dx}{dy}=f'(y)$

ゆえに　　$g'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{f'(y)}$

$f(1)=2$ から　　$f^{-1}(2)=1$　　　すなわち　　$g(2)=1$
よって　　$x=2$ のとき　$y=1$

ゆえに　　$g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{2}$

(2)　(1) より　$g'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$

よって　$g''(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1}{f'(y)}\right\}=\dfrac{d}{dy}\left\{\dfrac{1}{f'(y)}\right\}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$$=-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^2}\cdot\frac{1}{f'(y)}=-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^3}$$

また，(1) より　$x=2$ のとき　$y=1$

ゆえに　$g''(2)=-\dfrac{f''(1)}{\{f'(1)\}^3}=-\dfrac{3}{2^3}=-\dfrac{3}{8}$

17　$0<x<1$ のとき　$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+bx+a-b}{x^{2n}+(1-a)x^n+a}=\frac{bx+a-b}{a}$

$1<x$ のとき　$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\dfrac{b}{x^{2n-1}}+\dfrac{a-b}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1-a}{x^n}+\dfrac{a}{x^{2n}}}=x^2$

また　$f(1)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+b+a-b}{1+(1-a)\cdot1+a}=\frac{a+1}{2}$

$f(x)$ は $0<x<1$，$1<x$ で微分可能である。$x=1$ で微分可能となるためには，$x=1$ で連続であることが必要。その条件は

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)=f(1)$$

すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{bx+a-b}{a}=\lim_{x\to1+0}x^2=\frac{a+1}{2}$

よって　$\dfrac{a+1}{2}=1$　　　ゆえに　$a=1$　…… ①

① から　$0<x<1$ のとき　$f(x)=bx+1-b$，$f(1)=1$

よって，$x=1$ における右側微分係数と左側微分係数は

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to+0}(2+h)=2$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\{b(1+h)+1-b\}-1}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{bh}{h}=\lim_{h\to-0}b=b$$

ゆえに，$f'(1)$ が存在するためには $b=2$ でなければならない。

逆に，$a=1$，$b=2$ のとき $f'(1)$ が存在して，$f(x)$ は $x>0$ で微分可能となる。

答　$a=1$，$b=2$

BASIC＋STANDARD問題

1 次の関数の増減，グラフの凹凸を調べてグラフの概形をかけ。

$$y=3x^4-16x^3+18x^2+8$$

2 関数 $f(x)=x-2\sqrt{x}$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフをかけ.

3 $0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，関数 $y=x-\sqrt{2}\sin x$ の増減，グラフの凹凸を調べてグラフの概形をかけ。

4 関数 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ のグラフをかけ。

5 関数 $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$ のグラフの概形をかけ。

6 次の関数のグラフの概形をかけ。 $y=x-1+\sqrt{1-x^2}$

7 関数 $y=x\sqrt{8-x^2}$ のグラフの概形をかけ。

8 関数 $y=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ のグラフの概形を描け.

9 関数 $f(x)=(x-1)^2e^{-x}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，$\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$ を用いよ。

実戦問題

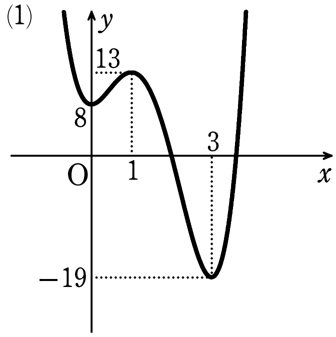
10 関数 $f(x)=\log\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)-\sqrt{1-x^2}-\log x$ $(0<x<1)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

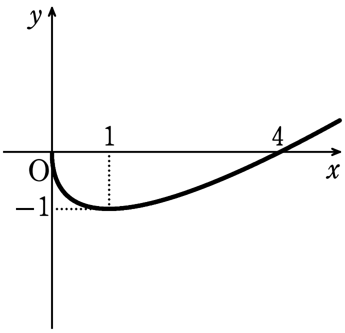
(3) 曲線 $y=f(x)$ 上を動く点をＰとする。点Ｑは，曲線 $y=f(x)$ のＰにおける接線上にあり，Ｐとの距離が１で，その x 座標がＰの x 座標より小さいものとする。Ｑの軌跡を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　(1)〔図〕　(2)〔図〕

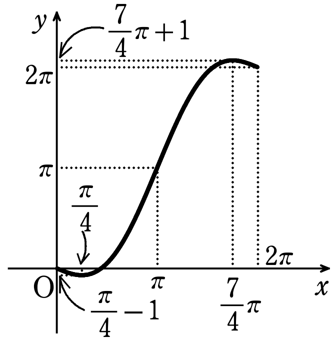


$\boxed{2}$

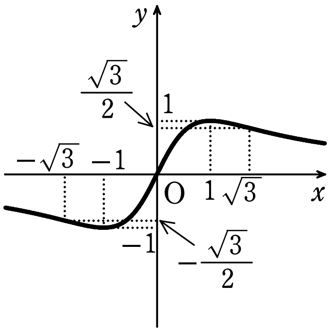
解答〔図〕



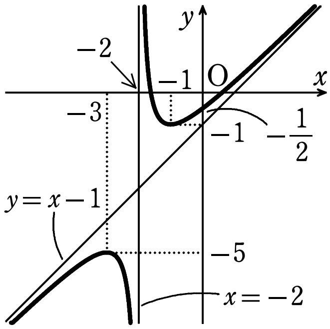
$\boxed{3}$ 解答〔図〕



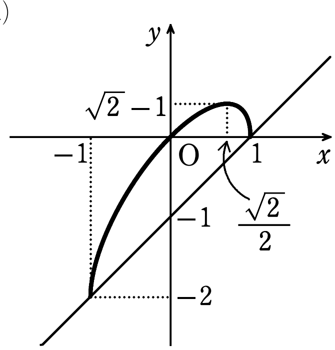
4　解答



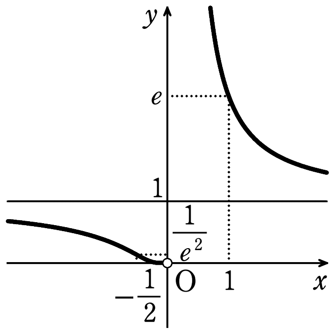
5　解答



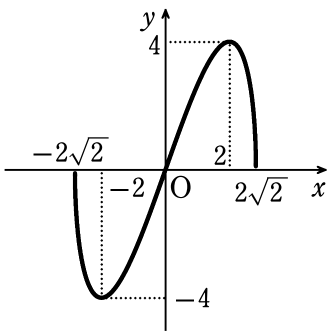
6　解答　(1)



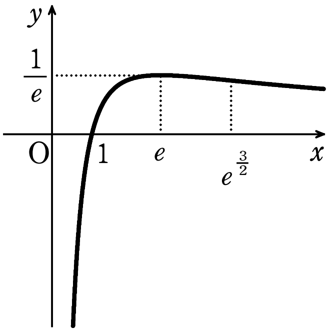
(2)



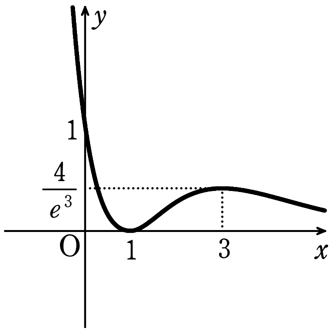
7　解答



8 解答 〔図〕



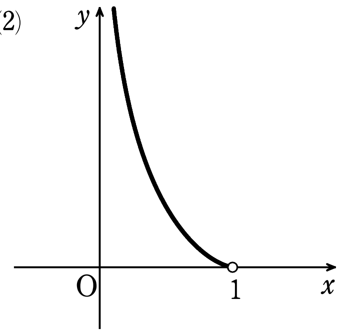
9 解答 (1)　$x=3$ で極大値 $\frac{4}{e^3}$，$x=1$ で極小値 0　　(2)



10 解答 (1)　$f'(x)=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$　　(2)〔図〕

(3)　直線 $x=0$ の $y>0$ の部分

(2)



1 (1)　$y'=12x^3-48x^2+36x=12x(x-1)(x-3)$

$y''=36x^2-96x+36=12(3x^2-8x+3)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 1,\ 3$

$y''=0$ とすると　　$3x^2-8x+3=0$

よって　　$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-3\cdot3}}{3}=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$

y'，y'' の符号を調べて，この関数の増減，グラフの凹凸を表にすると次のようにな

る。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4-\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{4+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	↘	極小	↗

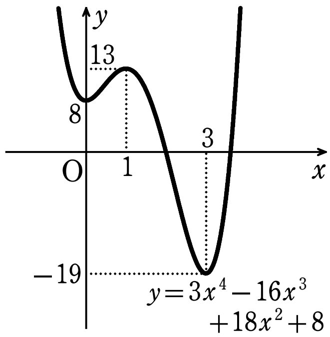
ゆえに，y は

$x=0$ で極小値 8,

$x=1$ で極大値 13,

$x=3$ で極小値 -19 をとる。

よって，グラフの概形は右図のようになる。

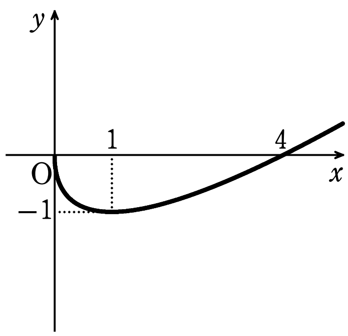


$\boxed{2}$ $f(x)=x-2\sqrt{x}$，$f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$f'(x)$ とすると $x=1$　また $x\geqq 0$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$



$\lim\limits_{x\to+0} f'(x)=-\infty$

また，曲線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標を求めると $x-2\sqrt{x}=0$　　$x=2\sqrt{x}$

両辺を平方して $x^2=4x$　　よって　$x=0, 4$

以上により，$y=f(x)$ のグラフは，上の図のようになる.

$\boxed{3}$　　$y'=1-\sqrt{2}\cos x$，$y''=\sqrt{2}\sin x$

$y'=0$ とすると　　$\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　　　よって　　$x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{7}{4}\pi$

$y''=0$ とすると　　$\sin x=0$　　　　よって　　$x=0$，π，2π

y'，y'' の符号を調べて，この関数の増減，グラフの凹凸を表にすると，次のようになる。

x	0	……	$\frac{\pi}{4}$	……	π	……	$\frac{7}{4}\pi$	……	2π
y'	／	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	／
y''	／	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	／
y	0	↘	極小	↗	変曲点 π	↗	極大	↘	2π

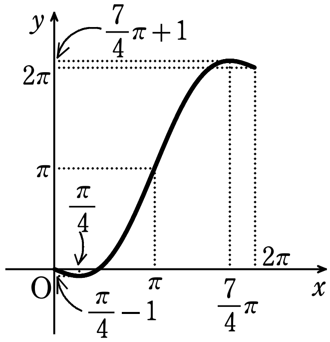
ゆえに，y は

$x=\frac{\pi}{4}$ で極小値 $\frac{\pi}{4}-1$，

$x=\frac{7}{4}\pi$ で極大値 $\frac{7}{4}\pi+1$

をとる。

以上から，グラフの概形は右図のようになる。



$\boxed{4}$　$y=\frac{2x}{x^2+1}$ の定義域は実数全体である。

また，　$y'=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$，$y''=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

であるから

$y'=0$ となる x の値は　$x=\pm1$

$y''=0$ となる x の値は　$x=0$，$\pm\sqrt{3}$

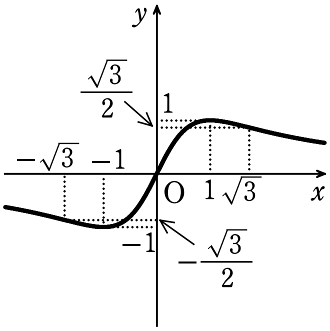
よって，y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↘	変曲点 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	極小 -1	↗	変曲点 0	↗	極大 1	↘	変曲点 $\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘

ここで，

$$\lim_{x\to\infty} y=0, \quad \lim_{x\to-\infty} y=0$$

であるから，x 軸はこの曲線の漸近線である。
以上から，曲線の概形は図のようになる。



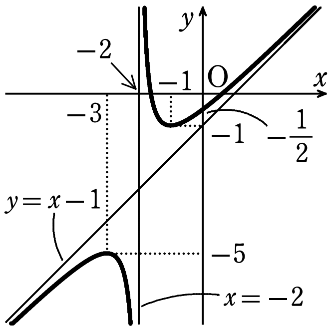
$\boxed{5}$ この関数の定義域は $x \neq -2$ である。

$y=x-1+\dfrac{1}{x+2}$ であるから　　$y'=1-\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$，$y''=\dfrac{2}{(x+2)^3}$

$y'=0$ となる x の値は　$x=-1$，-3　　$y''=0$ となる x の値は存在しない。
よって，増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
y	↗	極大 -5	↘		↘	極小 -1	↗

また，$\displaystyle\lim_{x\to-2+0} y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-2-0} y=-\infty$ であるから，
直線 $x=-2$ はこの曲線の漸近線である。
さらに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{y-(x-1)\}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{y-(x-1)\}=0$
であるから，直線 $y=x-1$ もこの曲線の漸近線である。
以上から，この関数のグラフの概形は右の図のようになる。



$\boxed{6}$ (1)　$1-x^2 \geqq 0$ であるから，定義域は　　$-1 \leqq x \leqq 1$
$-1<x<1$ のとき

$$y'=1+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

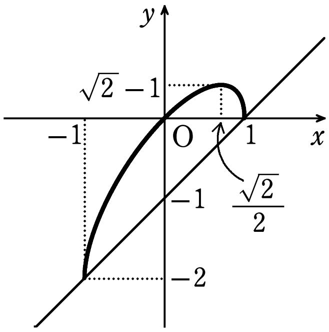
$$y''=-\frac{1\cdot\sqrt{1-x^2}-x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$y'=0$ とすると　　$\sqrt{1-x^2}=x$
$\sqrt{1-x^2}>0$ であるから　　$x>0$
両辺を 2 乗して　　$1-x^2=x^2$　　　すなわち　　$2x^2=1$

$x>0$ であるから　$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	
y	-2	↗	$\sqrt{2}-1$	↘	0



また　$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}y'=\lim_{x\to-1+0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}y'=\lim_{x\to1-0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=-\infty$

よって，グラフは〔図〕。

$\boxed{7}$ $8-x^2\geqq0$ であるから，定義域は　$-2\sqrt{2}\leqq x\leqq2\sqrt{2}$

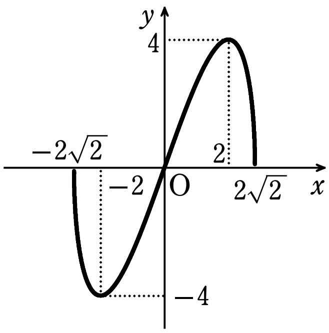
$-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$ のとき　$y'=\sqrt{8-x^2}+x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}=\dfrac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}}$，

$$y''=\frac{-4x\sqrt{8-x^2}-2(4-x^2)\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}}{8-x^2}=\frac{2x(x^2-12)}{(8-x^2)\sqrt{8-x^2}}$$

$-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$ で　$y'=0$ とすると　$x=\pm2$，　$y''=0$ とすると　$x=0$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

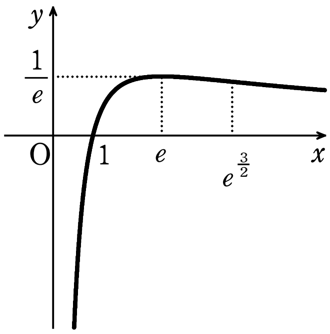
x	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y	0	↘	-4	↗	0	↗	4	↘	0



また　$\displaystyle\lim_{x\to-2\sqrt{2}+0}y'=-\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to2\sqrt{2}-0}y'=-\infty$

よって，グラフは〔図〕

$\boxed{8}$ $y=\dfrac{\log x}{x},\ y'=\dfrac{1-\log x}{x^2},\ y''=\dfrac{2\log x-3}{x^3}$



$y=0$ とおくと　$\log x=0$ から　$x=1$

$y'=0$ とおくと　$1-\log x=0$ から　$x=e$

$y''=0$ とおくと　$2\log x-3=0$ から　$x=e^{\frac{3}{2}}$

$x=e$ のとき $y=\dfrac{1}{e}$, $x=e^{\frac{3}{2}}$ のとき $y=\dfrac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}y=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0,$

$x>1$ で $y>0$　よって，グラフは図 のようになる．

$\boxed{9}$ $f(x)=(x-1)^2e^{-x}$，$f'(x)=2(x-1)e^{-x}+(x-1)^2\cdot(-e^{-x})$

$=(x-1)(2-x+1)e^{-x}$

$=-(x-1)(x-3)e^{-x}$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって，$f(x)$ は $x=3$ で極大値 $\dfrac{4}{e^3}$，$x=1$ で極小値 0 をとる。

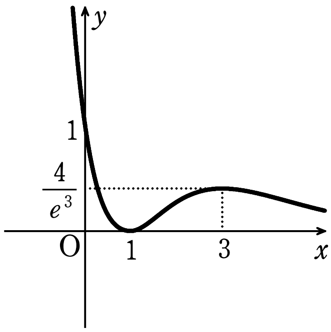
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 0	↗	極大 $\dfrac{4}{e^3}$	↘

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-1)^2e^{-x}=\lim_{x\to\infty}(x-1)^2e^{-(x-1)}\cdot e^{-1}$

$=0\cdot e^{-1}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)^2e^{-x}=\infty$

$y=f(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。



$\boxed{10}$ (1)　$f'(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left(1-\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)-\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}-\dfrac{1}{x}$

$$=\frac{x\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}-\frac{1}{x}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

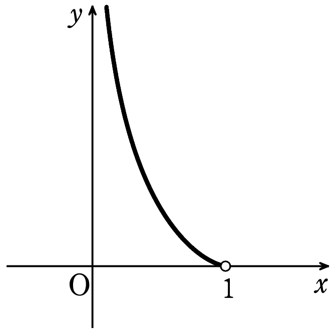
(2)　(1) から，$0<x<1$ において　　$f'(x)<0$

よって，$y=f(x)$ は $0<x<1$ で単調に減少する。

また　　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x=-\infty$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$

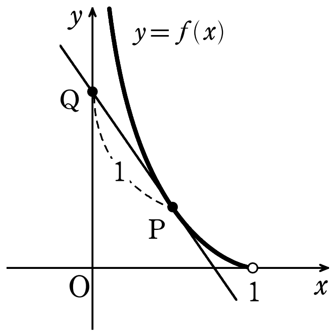
したがって，グラフの概形は右の図のようになる。



(3)　点 P の座標を $(t,\ f(t))$ $(0<t<1)$ とすると，曲線 $y=f(x)$ の点 P における接線の傾きは

$$f'(t)=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$$

よって，$\overrightarrow{PQ}$ は $\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right)$ に平行で，大きさが 1 であるから



$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$$
$$=(t,\ f(t))$$
$$+\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+\left(\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right)^2}}\left(-1,\ \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right)$$
$$=\left(t,\ \log\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)-\sqrt{1-t^2}-\log t\right)+\left(-t,\ \sqrt{1-t^2}\right)$$
$$=\left(0,\ \log\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)-\log t\right)$$

ゆえに，点 Q は y 軸上を動く。

$g(t)=\log\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)-\log t$ $(0<t<1)$ とおく。

$0<t<1$ において，$\log\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)$，$-\log t$ はともに減少関数であるから，$g(t)$ は減少関数である。

また　　$\displaystyle\lim_{t\to+0}g(t)=\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to1-0}g(t)=0$

よって，$g(t)$ のとりうる値の範囲は　　$g(t)>0$

以上から，求める点 Q の軌跡は　　直線 $x=0$ の $y>0$ の部分

BASIC＋STANDARD問題

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{6}{t^4}dt$　(2) $\displaystyle\int \frac{2-y}{y^2}dy$　(3) $\displaystyle\int \frac{1+t}{\sqrt{t}}dt$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (2x+3)^3 dx$　(2) $\displaystyle\int (2-5x)^4 dx$　(3) $\displaystyle\int \left(\cos 2x+\sin\frac{x}{3}\right)dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx$　(5) $\displaystyle\int e^{-3x}dx$　(6) $\displaystyle\int e^{\frac{x}{2}}dx$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (1-\tan x)\cos x\,dx$　(2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$

$\boxed{4}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x+\cos x)^2 dx$

$\boxed{5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \sin 3x\cos x\,dx$ を求めよ。

$\boxed{6}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{6}{x(x+3)}dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-1}dx$

$\boxed{7}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$　(2) $\displaystyle\int (x+1)(2x^2+4x-1)^2 dx$　(3) $\displaystyle\int \cos^3 x\sin x\,dx$

$\boxed{8}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\cos 3x\,dx$　(2) $\displaystyle\int (x+1)e^x dx$

(3) $\displaystyle\int \log(2x+1)\,dx$　(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\log x\,dx$

$\boxed{9}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx$　(2) $\displaystyle\int \cos^3 x\sin^2 x\,dx$

$\boxed{10}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$\boxed{11}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{9+x^2}$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

12 ＊　定積分 $\int_0^4 \sqrt{2-\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ.

実戦問題

13 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \dfrac{x}{\cos^2 x}dx$　　(2) $\int x^2 \sin x\,dx$

14 次の定積分を求めよ。

$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx$

15 不定積分 $\int \dfrac{x+3}{x(x-1)^2}dx$ を求めよ。

16 $t=x+\sqrt{x^2+1}$ と置換して，$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を 求めよ。

17 $x \geqq 0$ で定義された関数 $y=e^x+e^{-x}$ の逆関数を $y=f(x)$ とするとき，$\int_2^4 f(x)\,dx$ を求めよ。

1 解答 (1) $-\dfrac{2}{t^3}+C$　(2) $-\dfrac{2}{y}-\log|y|+C$　(3) $2\sqrt{t}+\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

2 解答 (1) $\dfrac{1}{8}(2x+3)^4+C$　(2) $-\dfrac{1}{25}(2-5x)^5+C$　(3) $\dfrac{1}{2}\sin 2x-3\cos\dfrac{x}{3}+C$

(4) $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}\sin 4x+C$　(5) $-\dfrac{1}{3}e^{-3x}+C$　(6) $2e^{\frac{x}{2}}+C$

3 解答 (1) $\sin x+\cos x+C$　(2) $\tan x-x+C$

4 解答 (1) $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$　(2) $\dfrac{13}{4}-\dfrac{\pi}{8}-\sqrt{2}$

5 解答 $-\dfrac{1}{8}\cos 4x-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$

6 解答 (1) $2\log\left|\dfrac{x}{x+3}\right|+C$　(2) $\log|x-1|(x+1)^2+C$

7 解答 (1) $\log(e^x+2)+C$　(2) $\dfrac{1}{12}(2x^2+4x-1)^3+C$　(3) $-\dfrac{1}{4}\cos^4 x+C$

8 解答 (1) $\dfrac{1}{3}x\sin 3x+\dfrac{1}{9}\cos 3x+C$　(2) xe^x+C

(3) $\dfrac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1)-x+C$　(4) $-\dfrac{1}{x}(\log x+1)+C$

9 解答 (1) $-\dfrac{1}{5}\cos^5 x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$　(2) $\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C$

10 解答 (1) $\dfrac{\pi}{2}+1$　(2) $\dfrac{\pi}{6}$

11 解答 (1) $\dfrac{\pi}{4}$　(2) $\dfrac{5}{36}\pi$　(3) $\dfrac{\pi}{4}$

12 解答 $\dfrac{32}{15}\sqrt{2}$

13 解答 (1) $x\tan x+\log|\cos x|+C$　(2) $(-x^2+2)\cos x+2x\sin x+C$

14 解答 $\dfrac{\pi}{4}$

15 解答 $3\log\left|\dfrac{x}{x-1}\right|-\dfrac{4}{x-1}+C$　(C は積分定数)

16 解答 $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$

17 解答 $4\log(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}$

$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle\int \frac{6}{t^4}dt=\int 6t^{-4}dt=\frac{6}{-4+1}t^{-4+1}+C=-2t^{-3}+C=-\frac{2}{t^3}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{2-y}{y^2}dy=\int\left(\frac{2}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=\int\left(2y^{-2}-\frac{1}{y}\right)dy=\frac{2}{-2+1}y^{-2+1}-\log|y|+C$

$\displaystyle=-2y^{-1}-\log|y|+C=-\frac{2}{y}-\log|y|+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1+t}{\sqrt{t}}dt=\int\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1}+C$

$\displaystyle=2t^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C=2\sqrt{t}+\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$\boxed{2}$ (1) $\displaystyle\int(2x+3)^3dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3)^{3+1}}{3+1}+C=\frac{1}{8}(2x+3)^4+C$

(2) $\displaystyle\int(2-5x)^4dx=-\frac{1}{5}\cdot\frac{(2-5x)^{4+1}}{4+1}+C=-\frac{1}{25}(2-5x)^5+C$

(3) $\displaystyle\int\left(\cos 2x+\sin\frac{x}{3}\right)dx=\frac{1}{2}\sin 2x-3\cos\frac{x}{3}+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$

(5) $\displaystyle\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$

(6) $\displaystyle\int e^{\frac{x}{2}}dx=2e^{\frac{x}{2}}+C$

$\boxed{3}$ (1) $\displaystyle\int(1-\tan x)\cos x\,dx=\int(\cos x-\sin x)dx=\sin x+\cos x+C$　　C は積分定数

(2) $\displaystyle\int\tan^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\tan x-x+C$　　C は積分定数

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+\cos x)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2 x+2\sin x+\cos^2 x)dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$\displaystyle=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+2\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$$=1-\frac{\pi}{4}+2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{4}-\frac{\pi}{8}-\sqrt{2}$$

5　$\sin 3x\cos x=\frac{1}{2}\{\sin(3x+x)+\sin(3x-x)\}$　であるから

$$\int\sin 3x\cos x\,dx=\int\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$

$$=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$　C は積分定数

6　C は積分定数である。

(1)　$\displaystyle\int\frac{6}{x(x+3)}dx=\int 2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx=2(\log|x|-\log|x+3|)+C=2\log\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$

(2)　$\displaystyle\int\frac{3x-1}{x^2-1}dx=\int\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}\right)dx$

$$=\log|x-1|+2\log|x+1|+C=\log|x-1|+\log(x+1)^2+C=\log|x-1|(x+1)^2+C$$

7　(1)　$\displaystyle\int\frac{e^x}{e^x+2}dx=\int\frac{(e^x+2)'}{e^x+2}dx=\log|e^x+2|+C=\log(e^x+2)+C$

(2)　$\displaystyle\int(x+1)(2x^2+4x-1)^2dx=\frac{1}{4}\int(2x^2+4x-1)^2(2x^2+4x-1)'dx$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}(2x^2+4x-1)^3+C=\frac{1}{12}(2x^2+4x-1)^3+C$$

(3)　$\displaystyle\int\cos^3 x\sin x\,dx=-\int\cos^3 x(\cos x)'dx=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

8　(1)　$\displaystyle\int x\cos 3x\,dx=\int x\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)'dx=x\cdot\frac{1}{3}\sin 3x-\int x'\cdot\frac{1}{3}\sin 3x\,dx$

$$=\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\int\sin 3x\,dx=\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C$$

(2)　$\displaystyle\int(x+1)e^x dx=\int(x+1)(e^x)'dx=(x+1)e^x-\int(x+1)'e^x dx=(x+1)e^x-\int e^x dx$

$$=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C$$

(3)　$\displaystyle\int\log(2x+1)\,dx=\int\left(\frac{2x+1}{2}\right)'\log(2x+1)\,dx$

$$=\frac{2x+1}{2}\log(2x+1)-\int\frac{2x+1}{2}\{\log(2x+1)\}'dx$$

$$=\frac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1)-\int\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}dx=\frac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1)-\int dx$$

$$=\frac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1)-x+C$$

(4)　$\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\log x\,dx=\int\left(-\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx=-\frac{1}{x}\log x-\int\left(-\frac{1}{x}\right)(\log x)'dx$

$$=-\frac{1}{x}\log x+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{1}{x}\log x+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\log x-\frac{1}{x}+C$$

$$=-\frac{1}{x}(\log x+1)+C$$

$\boxed{9}$ (1) $\displaystyle\int\sin^5 x\,dx=\int\sin^4 x\sin x\,dx=\int(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx$

$\cos x=t$ とおくと　　$-\sin x\,dx=dt$

よって　$\displaystyle\int\sin^5 x\,dx=-\int(1-t^2)^2dt=-\int(t^4-2t^2+1)dt$

$$=-\frac{1}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3-t+C$$

$$=-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

(2) $\displaystyle\int\cos^3 x\sin^2 x\,dx=\int\cos^2 x\cos x\sin^2 x\,dx=\int(1-\sin^2 x)\sin^2 x\cos x\,dx$

$\sin x=t$ とおくと　　$\cos x\,dx=dt$

よって　$\displaystyle\int\cos^3 x\sin^2 x\,dx=\int(1-t^2)t^2dt=\int(t^2-t^4)dt=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5+C$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

$\boxed{10}$ (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx=2\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{4}$

$x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=\sqrt{2}\cos\theta$

x と θ の対応は右の表のようになる。

$$2\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2-2\sin^2\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1$$

(2) $x=2\sin\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{6}$

x と θ の対応は右の表のようになる。

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot2\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

11 (1) $x=3\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{3}{\cos^2\theta}$

x と θ の対応は右の表のようになる。

x	$-\sqrt{3}$	$\to$	3
θ	$-\dfrac{\pi}{6}$	$\to$	$\dfrac{\pi}{4}$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{3}\frac{dx}{9+x^2}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{9+9\tan^2\theta}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{1}{3}\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{36}\pi$$

(2) $x+1=\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x と θ の対応は右の表のようになる。

x	-1	$\to$	0
θ	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{4}$

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+(x+1)^2}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

12 $t=2-\sqrt{x}$ とおくと $dt=\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}dx$　ゆえに　$dx=-2\sqrt{x}\,dt=-2(2-t)dt$ となる.

したがって　$\displaystyle\int_0^4\sqrt{2-\sqrt{x}}\,dx=-2\int_2^0\sqrt{t}\,(2-t)dt=2\int_0^2\sqrt{t}\,(2-t)dt$

$$=4\int_0^2\sqrt{t}\,dt-2\int_0^2 t^{\frac{3}{2}}dt=4\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2-2\left[\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}+1}\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-0\right)-\frac{4}{5}\left(2^{\frac{5}{2}}-0\right)=\frac{16\sqrt{2}}{3}-\frac{16\sqrt{2}}{5}$$

$$=16\sqrt{2}\left(\frac{5-3}{15}\right)=\frac{32}{15}\sqrt{2}$$

別解　$\sqrt{2-\sqrt{x}}=t$ とおくと $2-\sqrt{x}=t^2$　よって　$x=(2-t^2)^2$

また $dx=2(2-t^2)(-2t)dt=4(t^2-2)tdt$

したがって　(与式)$\displaystyle=\int_{\sqrt{2}}^{0}t\times4(t^2-2)tdt=-4\int_0^{\sqrt{2}}(t^4-2t^2)dt=-4\left[\frac{t^5}{5}-\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{2}}$

$$=\frac{32}{15}\sqrt{2}$$

13 (1) $\displaystyle\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int x(\tan x)'dx=x\tan x-\int x'\tan x\,dx=x\tan x-\int\tan x\,dx$

$\displaystyle=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=x\tan x+\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=x\tan x+\log|\cos x|+C$

(2) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx=\int x^2(-\cos x)'dx=-x^2\cos x-\int(x^2)'(-\cos x)dx$

$\displaystyle=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx=-x^2\cos x+2\int x(\sin x)'dx$

$\displaystyle=-x^2\cos x+2x\sin x-2\int x'\sin x\,dx=-x^2\cos x+2x\sin x-2\int\sin x\,dx$

$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C=(-x^2+2)\cos x+2x\sin x+C$

14 $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}$

$x-1=\sin\theta$ とおくと　　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq 0$ では $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{1-(x-1)^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$$

したがって　$\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(1+\cos 2\theta)d\theta$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0=\frac{\pi}{4}$$

15 $\displaystyle\frac{x+3}{x(x-1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$ とおき，

この両辺に $x(x-1)^2$ を掛けて　　$x+3=a(x-1)^2+bx(x-1)+cx$

右辺を整理すると　　$x+3=(a+b)x^2-(2a+b-c)x+a$

これが x についての恒等式であるから

$$a+b=0,\quad 2a+b-c=-1,\quad a=3$$

これを解いて　　$a=3$，$b=-3$，$c=4$

$\displaystyle\int\frac{x+3}{x(x-1)^2}dx=\int\left\{\frac{3}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}\right\}dx=3\log|x|-3\log|x-1|-\frac{4}{x-1}+C$

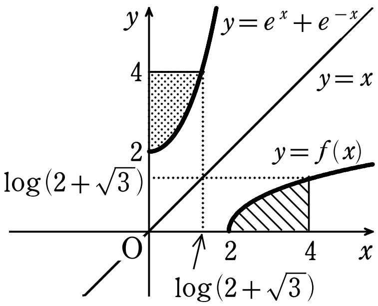
$\displaystyle=3\log\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C$　(C は積分定数)

16 $x+\sqrt{x^2+1}=t$ から　$x^2+1=(t-x)^2$　　よって　$\displaystyle x=\frac{t^2-1}{2t}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$

したがって　$\displaystyle dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{t^2+1}{2t^2}dt$，$\displaystyle\sqrt{x^2+1}=t-x=\frac{t^2+1}{2t}$

よって　$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+C$

$=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$　(C は積分定数)



$\boxed{17}$ $I=\int_2^4 f(x)\,dx$ において

$x=e^y+e^{-y}$ とすると　　$dx=(e^y-e^{-y})dy$

$2=e^y+e^{-y}$ とすると　　$e^{2y}-2e^y+1=0$

よって　$(e^y-1)^2=0$　　ゆえに　$y=0$

$4=e^y+e^{-y}$ とすると　　$e^{2y}-4e^y+1=0$

よって　$e^y=2+\sqrt{3}$　　ゆえに　$y=\log(2+\sqrt{3})$

したがって　$I=\int_0^{\log(2+\sqrt{3})} y(e^y-e^{-y})dy$

$$=\Big[y(e^y+e^{-y})\Big]_0^{\log(2+\sqrt{3})}-\int_0^{\log(2+\sqrt{3})}(e^y+e^{-y})dy$$

$$=\log(2+\sqrt{3})\cdot\left(2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)-\Big[e^y-e^{-y}\Big]_0^{\log(2+\sqrt{3})}$$

$$=\log(2+\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})-\left(2+\sqrt{3}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)$$

$$=4\log(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}$$

BASIC問題

1　関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+2}$ が $x=1$ で極大値 1 をとるように，定数 a，b の値を定めよ。

また，このとき，関数 $f(x)$ の極小値を求めよ。

2　関数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2-1}$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

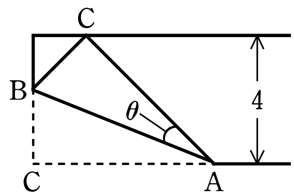
STANDARD問題

3　次の極限値を求めよ。ただし，定理を用いた場合はその名称を明記すること。

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$$

4　点 $(a,\ 0)$ から，関数 $f(x)=(1-x)e^x$ のグラフに引いた接線の本数を求めよ。

5　右の図のように幅 4 のテープを端点 C が辺上にくるように折るとき，△ABC の面積が最小になるような θ とそのときの面積を求めよ。



6　$a>0$，$b>0$ とする。定点 A $(a,\ b)$ を通り，傾き m $(m<0)$ の直線が，x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ P，Q とする。原点を O とするとき，△OPQ の面積 S の最小値を求めよ。

実戦問題

7　a を定数とし，$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+a}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y=f(x)$ の変曲点の個数を a の値によって調べよ。

(2)　$a=-1$ のとき，曲線 $y=f(x)$ の漸近線の方程式を求めよ。

8　(1)　x を正の数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ と $\dfrac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ。

(2)　$\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$ と $\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小を比較せよ。

9　一直線をなす海岸の地点 A から海岸線に垂直に 9 km 離れた沖の舟に人がいる。この人が，A から海岸に沿って 15 km 離れた地点 B に最短時間で到着するためには，AB 間の A から何 km 離れた地点に上陸すればよいか。ただし，舟の速さを 4 km/時，人の歩く速さを 5 km/時 とする。

$\boxed{1}$ 解答　$a=2$，$b=1$；$x=-2$ で極小値 $-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{2}$ 解答　$a<-1$，$1<a$

$\boxed{3}$ 解答　1

$\boxed{4}$ 解答　$a<-3$，$1<a$ のとき 2 本；$a=-3$，1 のとき 1 本；$-3<a<1$ のとき 0 本

$\boxed{5}$ 解答　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で最小値 $\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$

$\boxed{6}$ 解答　$2ab$

$\boxed{7}$ 解答　(1)　$a<0$ のとき 1 個，$a=0$ のとき 0 個，$a>0$ のとき 3 個

(2)　$x=\pm1$，$y=x$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$　　(2)　$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$

$\boxed{9}$ 解答　12 km

$\boxed{1}$ $f'(x)=\dfrac{a(x^2+2)-(ax+b)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-ax^2-2bx+2a}{(x^2+2)^2}$

$f(x)$ が $x=1$ で極大値 1 をとるとき　$f'(1)=0$，$f(1)=1$

すなわち　$\dfrac{a-2b}{9}=0$，$\dfrac{a+b}{3}=1$　これを解くと　$a=2$，$b=1$

このとき　$f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$

$$f'(x)=\frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 $-\dfrac{1}{2}$	↗	極大 1	↘

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになり，条件を満たす。

したがって　$a=2$，$b=1$；$x=-2$ で極小値 $-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{2}$ $x^2-1\fallingdotseq 0$ であるから，定義域は　$x\fallingdotseq \pm 1$

$$f'(x)=\frac{x^2-1-(x+a)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+2ax+1}{(x^2-1)^2}$$

$f(x)$ が極値をもつための条件は，2 次方程式 $x^2+2ax+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもち，その解が 1 または -1 でないことである。

ゆえに，2 次方程式 $x^2+2ax+1=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-1>0 \quad \cdots\cdots ①，\quad 1+2a+1\fallingdotseq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

$$1-2a+1\fallingdotseq 0 \quad \cdots\cdots ③$$

① から　$a<-1$，$1<a$

このとき，②，③ を満たす。

よって，求める a の値の範囲は　$a<-1$，$1<a$

$\boxed{3}$ $x \longrightarrow +0$ であるから，$x>0$ としてよい。このとき　$\sin x<x$

関数 $f(x)=e^x$ はすべての実数 x で微分可能で，$f'(x)=e^x$ であるから，区間 $[\sin x,\ x]$ において平均値の定理を用いると

$$\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=e^c, \quad \sin x<c<x$$

を満たす実数 c が存在する。

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\sin x=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to+0}c=0$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to+0}e^c=e^0=1$

4　$f'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y = -te^t(x-t) + (1-t)e^t$$

すなわち　$y = -te^tx + (t^2-t+1)e^t$

この直線が点 $(a,\ 0)$ を通るとき　$-te^ta + (t^2-t+1)e^t = 0$　…… ①

$t=0$ は，この方程式の解ではない。

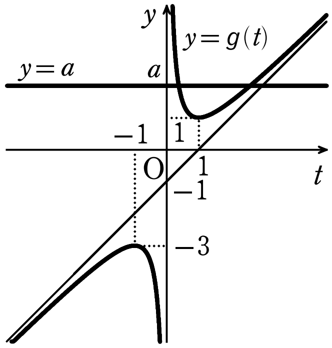
また，$e^t > 0$ であるから，方程式 ① は $a = t-1+\dfrac{1}{t}$ と同値である。

$g(t) = t + \dfrac{1}{t} - 1$ とすると　$g'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{t^2-1}{t^2}$

$g'(t) = 0$ とすると　$t = \pm 1$

$g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$g(t)$	↗	-3	↘	／	↘	1	↗



また　$\displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$，$\displaystyle\lim_{t\to-\infty} g(t) = -\infty$，

$\displaystyle\lim_{t\to+0} g(t) = \infty$，$\displaystyle\lim_{t\to-0} g(t) = -\infty$

よって，$y = g(t)$ のグラフの概形は図のようになる。

このグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数が，方程式 $a = g(t)$ の異なる実数解の個数，すなわち，求める接線の本数に一致する。

したがって，求める接線の本数は，図から

$a < -3$，$1 < a$ のとき 2 本；$a = -3$，1 のとき 1 本；$-3 < a < 1$ のとき 0 本

別解　① を変形すると　$\{t^2 - (a+1)t + 1\}e^t = 0$

$e^t > 0$ であるから　$t^2 - (a+1)t + 1 = 0$　…… ②

曲線 $y = f(x)$ において，接点が異なれば，接線は異なる。

よって，点 $(a,\ 0)$ を通る接線の本数は，t の 2 次方程式 ② の実数解の個数に等しい。

② の判別式を D とすると

$$D = \{-(a+1)\}^2 - 4 = a^2 + 2a - 3 = (a+3)(a-1)$$

したがって，求める接線の本数は

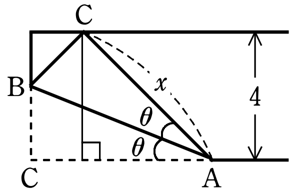
$D > 0$　すなわち　$a < -3$，$1 < a$ のとき　2 本

$D = 0$　すなわち　$a = -3$，1　のとき　1 本

$D < 0$　すなわち　$-3 < a < 1$　のとき　0 本

5　AC$=x$ とおくと

$$x\sin 2\theta=4,\quad \mathrm{BC}=x\tan\theta$$



$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}x^2\tan\theta$

$$=\frac{8\tan\theta}{\sin^2 2\theta}=\frac{8\sin\theta}{(2\sin\theta\cos\theta)^2\cos\theta}$$

$$=\frac{2}{\sin\theta\cos^3\theta}\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$$

ゆえに，$f(\theta)=\sin\theta\cos^3\theta$ が最大のとき S は最小値をとる。

$$f'(\theta)=\cos\theta\cos^3\theta+\sin\theta\cdot 3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)$$
$$=\cos^2\theta(\cos^2\theta-3\sin^2\theta)$$
$$=\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)$$
$$=\cos^2\theta(2\cos\theta+\sqrt{3})(2\cos\theta-\sqrt{3})$$

$f(\theta)$ の増減表は右のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

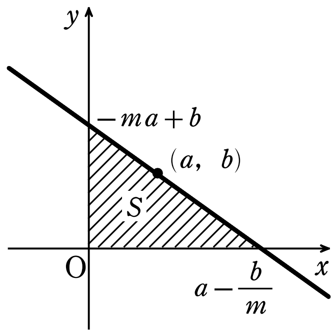
よって，$f(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$ をとる。

このとき，S は最小となり，最小値は　$\dfrac{2}{\frac{3\sqrt{3}}{16}}=\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$

6 定点 A $(a,\ b)$ を通り，傾き $m(<0)$ の直線の方程式は

$$y=m(x-a)+b \quad \cdots\cdots ①$$

と表される。



① において　$y=0$ とすると　$x=a-\dfrac{b}{m}$

$x=0$ とすると　$y=-ma+b$

ゆえに　$\mathrm{P}\left(a-\dfrac{b}{m},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}\,(0,\ -ma+b)$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{b}{m}\right)(-ma+b)$

$$=\frac{1}{2}\left(-a^2m-\frac{b^2}{m}+2ab\right)$$

ここで，$f(m)=-a^2m-\dfrac{b^2}{m}+2ab$ とすると

$$f'(m)=-a^2+\frac{b^2}{m^2}=-\frac{(am+b)(am-b)}{m^2}$$

$f(m)$ の増減表は右のようになる。

m	$\cdots$	$-\dfrac{b}{a}$	$\cdots$	0
$f'(m)$	$-$	0	$+$	
$f(m)$	$\searrow$	$4ab$	$\nearrow$	

$f(m)$ の最小値が $4ab$ であるから，S の最小値は

$$\frac{1}{2}\cdot 4ab=2ab$$

このとき　$\mathrm{P}\,(2a,\ 0)$，$\mathrm{Q}\,(0,\ 2b)$

別解　[S の最小値の計算]

$t=-m$ とおくと，$t>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$2S=a^2t+\frac{b^2}{t}+2ab \geqq 2\sqrt{a^2t\cdot\frac{b^2}{t}}+2ab=4ab$$

等号は $a^2t=\dfrac{b^2}{t}$ すなわち $t=\dfrac{b}{a}$ のとき成り立つ。

このとき，$\mathrm{P}\,(2a,\ 0)$，$\mathrm{Q}\,(0,\ 2b)$ であり，S の最小値は $2ab$ である。

$\boxed{7}$ (1) $f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2+a)-x^3\cdot 2x}{(x^2+a)^2}=\dfrac{x^4+3ax^2}{(x^2+a)^2}$

$$f''(x)=\frac{(4x^3+6ax)(x^2+a)^2-(x^4+3ax^2)\cdot 2(x^2+a)\cdot 2x}{(x^2+a)^4}$$

$$=\frac{2x\{(2x^2+3a)(x^2+a)-2(x^4+3ax^2)\}}{(x^2+a)^3}=\frac{2ax(3a-x^2)}{(x^2+a)^3}$$

(2) $f''(x)=-\dfrac{2ax(x^2-3a)}{(x^2+a)^3}$ の符号の変化を調べると

[1] $a<0$ のとき　　$x^2-3a>0$

よって，$x=0$ の前後で $f''(x)$ の符号は変わるから，変曲点は1個。

[2] $a=0$ のとき

$f(x)=x$ $(x\neq 0)$ であり，変曲点をもたない。

[3] $a>0$ のとき

$x=-\sqrt{3a}$，0，$\sqrt{3a}$ の前後で $f''(x)$ の符号は変わるから，変曲点は3個。

以上から

$a<0$ のとき1個，$a=0$ のとき0個，$a>0$ のとき3個。

(3) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ と表され

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to 1-0}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to -1+0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to -1-0}f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=0$$

よって，求める漸近線の方程式は　　$x=\pm 1$，$y=x$

$\boxed{8}$ (1)　$x>0$ のとき，$f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}$ とおくと

$$f(x)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}<0$$

よって，$f(x)$ は単調に減少する。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$f(x)>0$

したがって　　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$

(2)　$g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ とおく。

$$g(x)=x\{\log(x+1)-\log x\}$$

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$

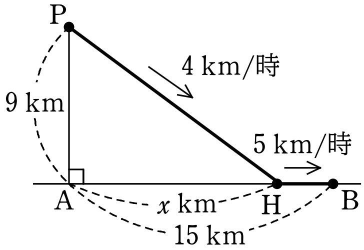
$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$

(1)から $g'(x)>0$ となり，$g(x)$ は単調に増加する。

よって　$\dfrac{2001}{2002}<\dfrac{2002}{2001}$　から　$g\left(\dfrac{2001}{2002}\right)<g\left(\dfrac{2002}{2001}\right)$

$$\log\left(1+\frac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\log\left(1+\frac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$$

ゆえに　$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$



9　舟のいる地点を P，上陸すべき地点を H とする。

AH$=x$(km) とすると $0 \leqq x \leqq 15$ であり

$$\mathrm{PH}=\sqrt{x^2+9^2}, \quad \mathrm{BH}=15-x$$

地点 B に到着するまでの所要時間を t(時間) とすると

$$t=\frac{\sqrt{x^2+9^2}}{4}+\frac{15-x}{5}$$

$$t'=\frac{x}{4\sqrt{x^2+9^2}}-\frac{1}{5}=\frac{5x-4\sqrt{x^2+9^2}}{20\sqrt{x^2+9^2}}$$

$t'=0$ とすると　$5x=4\sqrt{x^2+9^2}$　　両辺を 2 乗して　$25x^2=16(x^2+81)$

よって　$x^2=144$　　$0 \leqq x \leqq 15$ から　$x=12$

t の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	12	$\cdots$	15
t'		$-$	0	$+$	
t		↘	極小	↗	

したがって，t は $x=12$ のとき最小となる。

よって，A から 12 km の地点に上陸すればよい。

制限時間なし

BASIC問題

1　2つの曲線 $y=x^2$ と $y=2\log x+a$ が接するとき，次の問いに答えよ。

(1)　定数 a の値を求めよ。

(2)　これらの曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

2　xy 平面上の曲線 C：$y=\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ として，x 軸上に点 $\mathrm{Q}(x,\ 0)$ をとり，線分 PQ を１辺とする正方形 L を xy 平面に垂直に立てる。ただし，P と Q が一致するときは，L は１点であるとする。点 P が曲線 C 上を動くとき，L が通過してできる立体の体積 V を求めよ。

3　次の曲線または直線で囲まれた部分が，x 軸の周りに１回転してできる回転体の体積を求めよ。

(1)　$y=x^2-2$，$y=2x^2-3$　　(2)　$y=\sqrt[3]{x}$，$y=x$　$(x\geqq 0)$

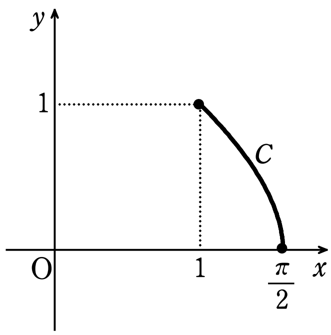
4　曲線 $y=\log(x+1)$ と y 軸および直線 $y=2$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに１回転してできる立体の体積を求めよ。

STANDARD問題

5　曲線 C は媒介変数 θ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて

$$x=\cos\theta+\theta\sin\theta,\quad y=\cos\theta$$

と表されており，右の図のような形をしている。



(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して，$\dfrac{dy}{dx}$ を θ を用いて表せ。

(2)　曲線 C と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

6　放物線 $y=x^2-4$ と直線 $y=3x$ とで囲まれた部分が，x 軸の周りに１回転してできる立体の体積を求めよ。

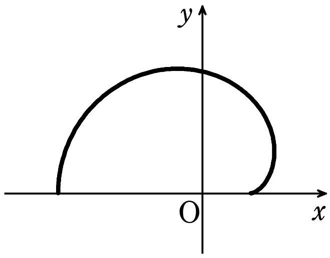
7　曲線 $y=2\sin x$ $\left(\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{5}{6}\pi\right)$ と直線 $y=1$ で囲まれた部分が，$y=1$ の周りに１回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

8　(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt$ を求めよ。

(2)　不等式 $x^2+y^2+\log(1+z^2)\leqq\log 2$ の定める立体の体積を求めよ。

実戦問題

$\boxed{9}$ 媒介変数 t によって，$x=2\cos t-\cos 2t$，
$y=2\sin t-\sin 2t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ と表される右図の曲線と，
x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。



10 底面の半径 1，高さ 1 の直円柱を，底面の直径を含み底面と 30° の角をなす平面で切断するとき，底面とこの平面で挟まれた部分の体積を求めよ。

11 空間における点 A$(4,\ -2,\ -3)$，点 B$(-1,\ 3,\ 2)$ を通る直線 ℓ を，z 軸の周りに 1 回転してできる曲面を S とする。

(1)　平面 $z=t$ と直線 ℓ の交点 P の x 座標，y 座標を t で表せ。

(2)　平面 $z=2$，平面 $z=-3$，曲面 S で囲まれた立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答 (1) $a=1$ (2) $\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$

$\boxed{2}$ 解答 $\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{3}$ 解答 (1) $\dfrac{88}{15}\pi$ (2) $\dfrac{4}{15}\pi$

$\boxed{4}$ 解答 $\dfrac{\pi}{2}(e^4-4e^2+7)$

$\boxed{5}$ 解答 (1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\tan\theta}{\theta}$ (2) $\dfrac{\pi^2-4}{16}$

$\boxed{6}$ 解答 132π

$\boxed{7}$ 解答 $\pi(2\pi-3\sqrt{3})$

$\boxed{8}$ 解答 (1) $1-\dfrac{\pi}{4}$ (2) $\pi(4-\pi)$

$\boxed{9}$ 解答 3π

$\boxed{10}$ 解答 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

$\boxed{11}$ 解答 (1) x 座標は $-t+1$，y 座標は $t+1$ (2) $V=\dfrac{100}{3}\pi$

$\boxed{1}$ (1)　$f(x)=x^2$，$g(x)=2\log x+a$ とすると　　$f'(x)=2x$，$g'(x)=\dfrac{2}{x}$

接点の x 座標を t（$t>0$）とすると，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ が成り立つから

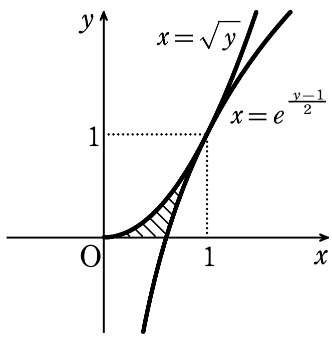
$$t^2=2\log t+a \quad \cdots\cdots ① \qquad\qquad 2t=\frac{2}{t} \quad \cdots\cdots ②$$

$t>0$ であるから，② より　$t=1$

① に代入して　$a=1$

このとき，共有点は点 $(1,\ 1)$ のみで適する。

(2)　$y=x^2$ から　　$x=\sqrt{y}$



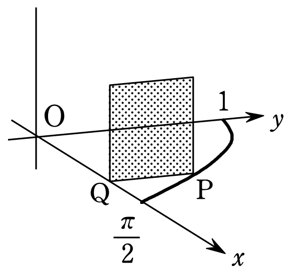
$y=2\log x+1$ から　　$x=e^{\frac{y-1}{2}}$

よって，求める面積は

$$\int_0^1\left(e^{\frac{y-1}{2}}-\sqrt{y}\right)dy=\left[2e^{\frac{y-1}{2}}-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{2}{\sqrt{e}}$$

$\boxed{2}$ $\mathrm{PQ}=\cos x$ であるから，線分 PQ を 1 辺とする正方形 L の面積は　　$\mathrm{PQ}^2=\cos^2 x$



よって　　$V=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

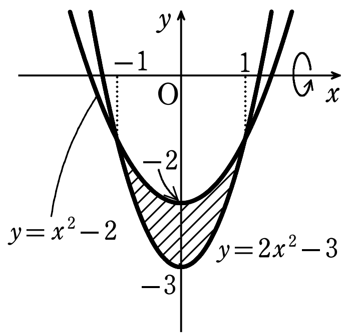
$$=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

$\boxed{3}$ 求める体積を V とする。

(1)　$x^2-2=2x^2-3$ とすると　$x^2=1$　　　　よって　　$x=\pm 1$

$-1\leqq x\leqq 1$ において　$2x^2-3\leqq x^2-2\leqq 0$

したがって



$$V=\pi\int_{-1}^1\{(2x^2-3)^2-(x^2-2)^2\}dx$$

$$=\pi\int_{-1}^1(3x^4-8x^2+5)dx$$

$$=2\pi\int_0^1(3x^4-8x^2+5)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{3}{5}x^5-\frac{8}{3}x^3+5x\right]_0^1=\frac{88}{15}\pi$$

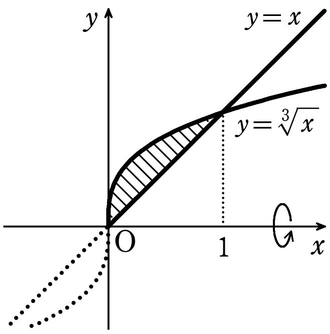
(2)　$x \geqq 0$ で $\sqrt[3]{x} = x$ とすると　$x = 0,\ 1$

$0 \leqq x \leqq 1$ において　$0 \leqq x \leqq \sqrt[3]{x}$

したがって

$$V = \pi\int_0^1\{(\sqrt[3]{x})^2 - x^2\}dx = \pi\int_0^1\left(x^{\frac{2}{3}} - x^2\right)dx$$

$$= \pi\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\pi$$



$\boxed{4}$　$y = \log(x+1)$ から　　$x = e^y - 1$

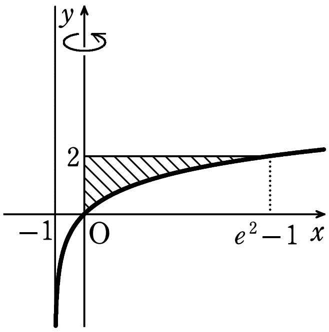
求める回転体の体積を V とすると

$$V = \pi\int_0^2(e^y - 1)^2dy = \pi\int_0^2(e^{2y} - 2e^y + 1)dy$$

$$= \pi\left[\frac{e^{2y}}{2} - 2e^y + y\right]_0^2$$

$$= \pi\left\{\left(\frac{e^4}{2} - 2e^2 + 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}(e^4 - 4e^2 + 7)$$



$\boxed{5}$　(1)　$\dfrac{dx}{d\theta} = -\sin\theta + \sin\theta + \theta\cos\theta = \theta\cos\theta$，　$\dfrac{dy}{d\theta} = -\sin\theta$

よって，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき　　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{-\sin\theta}{\theta\cos\theta} = -\dfrac{\tan\theta}{\theta}$

(2)　(1) から，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\dfrac{dx}{d\theta} \geqq 0$

よって，このとき x は単調に増加するから，θ と x の対応は右のようになる。

θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
x	$1 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$y \geqq 0$ であるから，求める面積は

$$\int_1^{\frac{\pi}{2}} ydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \theta\cos\theta\, d\theta$$

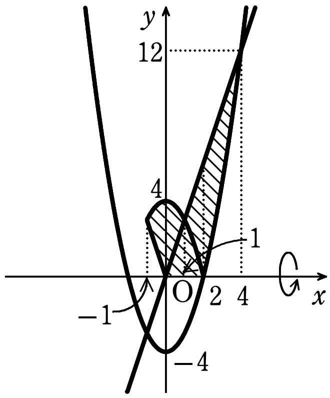
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\theta + \theta\cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\theta \cdot \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}\left[\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}(-1-1)\right\}$$

$$=\frac{\pi^2-4}{16}$$

$\boxed{6}$ 放物線と直線の概形から，立体は図の斜線部分を x 軸の周りに１回転してできる。
よって，求める体積 V は



$$V=\pi\int_{-1}^{0}\{(4-x^2)^2-(-3x)^2\}dx+\pi\int_0^1(4-x^2)^2dx$$

$$+\pi\int_1^2(3x)^2dx+\pi\int_2^4\{(3x)^2-(x^2-4)^2\}dx$$

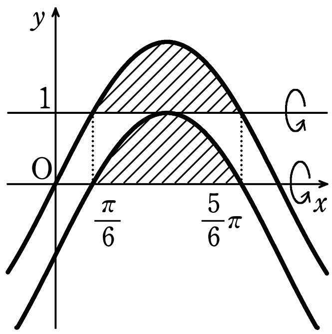
$$=2\pi\int_0^1(4-x^2)^2dx-\pi\int_2^4(x^2-4)^2dx$$

$$-\pi\int_{-1}^{0}(-3x)^2dx+\pi\int_1^4(3x)^2dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_0^1-\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_2^4$$

$$-\pi\Big[3x^3\Big]_{-1}^{0}+\pi\Big[3x^3\Big]_1^4=132\pi$$

$\boxed{7}$ 求める回転体の体積は，曲線 $y=2\sin x$ を y 軸方向に -1 だけ平行移動した曲線が，x 軸の周りに１回転してできる回転体の体積と同じであるから



$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(2\sin x-1)^2dx$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(4\sin^2 x-4\sin x+1)dx$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\{2(1-\cos 2x)-4\sin x+1\}dx$$

$$=\pi\Big[-\sin 2x+4\cos x+3x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}$$

$$=\pi(2\pi-3\sqrt{3})$$

$\boxed{8}$ (1) $\displaystyle\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\int_0^1dt-\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$

$$\int_0^1dt=\Big[t\Big]_0^1=1$$

$t=\tan\theta$ とおくと　$dt=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

t	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$

よって　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt=1-\frac{\pi}{4}$

(2)　与えられた不等式の定める立体を A とする。

与えられた不等式から　$x^2+y^2\leqq\log 2-\log(1+z^2)$　……①

$x^2+y^2\geqq 0$ であるから　$\log 2-\log(1+z^2)\geqq 0$

すなわち　$\log(1+z^2)\leqq\log 2$

底 e は 1 より大きいから　$1+z^2\leqq 2$　　よって　$-1\leqq z\leqq 1$

立体 A を平面 $z=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ で切ったときの切り口を表す関係式は

$$x^2+y^2\leqq\log 2-\log(1+t^2),\ z=t$$

ゆえに，切り口の面積を $S(t)$ とすると　$S(t)=\pi\{\log 2-\log(1+t^2)\}$

立体 A は xy 平面に関して対称であるから，求める体積を V とすると

$$V=2\int_0^1 S(t)\,dt=2\pi\int_0^1\{\log 2-\log(1+t^2)\}dt$$

$$=2\pi\Big[t\log 2\Big]_0^1-2\pi\Big[t\log(1+t^2)\Big]_0^1+2\pi\int_0^1 t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt$$

$$=2\pi\log 2-2\pi\log 2+4\pi\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=4\pi\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt$$

したがって，(1) から　$V=4\pi\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=\pi(4-\pi)$

$\boxed{9}$ 図から，$0\leqq t\leqq\pi$ では常に　$y\geqq 0$

また，$y=2\sin t(1-\cos t)$ であるから，$y=0$ とすると　$\sin t=0$ または $\cos t=1$

$0\leqq t\leqq\pi$ から　$t=0,\ \pi$

更に　$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t+2\sin 2t$

$$=2\sin t(2\cos t-1)$$

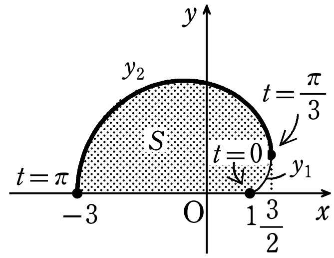
$0<t<\pi$ で $\dfrac{dx}{dt}=0$ とすると，$\cos t=\dfrac{1}{2}$ から

$$t=\frac{\pi}{3}$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
x	1	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	-3

よって，x の値の増減は右上の表のようになる。

ゆえに，$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{3}$ における y を y_1，$\frac{\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$ における y を y_2 とすると



$$S=\int_{-3}^{\frac{3}{2}} y_2 dx-\int_{1}^{\frac{3}{2}} y_1 dx=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{dt}dt-\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_{\pi}^{0} y\frac{dx}{dt}dt=\int_{\pi}^{0}(2\sin t-\sin 2t)(-2\sin t+2\sin 2t)dt$$

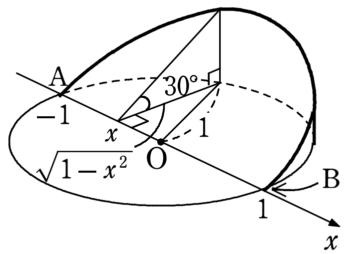
$$=2\int_{0}^{\pi}(2\sin^2 t-3\sin t\sin 2t+\sin^2 2t)dt$$

$$=2\int_{0}^{\pi}\left(2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}-3\sin t\cdot 2\sin t\cos t+\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt$$

$$=2\int_{0}^{\pi}\left(\frac{3}{2}-\cos 2t-\frac{1}{2}\cos 4t-6\sin^2 t\cos t\right)dt$$

$$=2\left[\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{8}\sin 4t-2\sin^3 t\right]_0^{\pi}=3\pi$$

$\boxed{10}$ 底面の直径 AB を x 軸に，中心を原点 O とする。座標が x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ である点を通り，x 軸に垂直な平面で題意の立体を切ったときの切り口は直角三角形で，その面積は



$$\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}=\frac{1-x^2}{2\sqrt{3}}$$

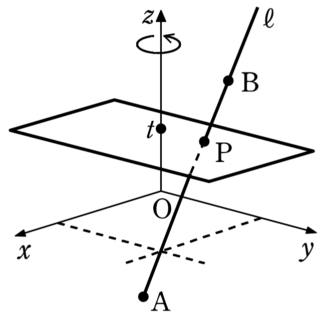
したがって，求める体積 V は

$$V=\int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{2\sqrt{3}}dx=\frac{2}{2\sqrt{3}}\int_{0}^{1}(1-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$\boxed{11}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 3,\ 2)-(4,\ -2,\ -3)=(-5,\ 5,\ 5)$

平面 $z=t$ と直線 ℓ の交点 P の座標を $(x,\ y,\ t)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (k は実数) とすると



$$(x-4,\ y+2,\ t+3)=(-5k,\ 5k,\ 5k)$$

よって　$x-4=-5k$，$y+2=5k$，$t+3=5k$

すなわち　$k=\frac{t+3}{5}$，$x=-t+1$，$y=t+1$

ゆえに，交点 P の x 座標は　$-t+1$，

y 座標は　$t+1$

(2) 平面 $z=t$ と曲面 S の交わりは，中心が $(0,\ 0,\ t)$ で，点 P$(-t+1,\ t+1,\ t)$ を通る円であり，その円の半径は

$$\sqrt{\{(-t+1)-0\}^2+\{(t+1)-0\}^2+(t-t)^2}=\sqrt{2(t^2+1)}$$

この円の面積を $S(t)$ とすると　　$S(t)=\pi\left\{\sqrt{2(t^2+1)}\right\}^2=2\pi(t^2+1)$

よって，求める体積 V は

$$V=\int_{-3}^{2}S(t)\,dt=\int_{-3}^{2}2\pi(t^2+1)\,dt=2\pi\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_{-3}^{2}$$

$$=2\pi\left\{\frac{2^3-(-3)^3}{3}+2-(-3)\right\}=\frac{100}{3}\pi$$

BASIC問題

1 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=x+\int_0^1 f(t)e^t dt$$

2 次の等式を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を求めよ。

$$\int_\pi^x f(t)dt=a\sin^2 x+\frac{a}{2}x^2-1$$

3 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}$$

4 原点から出発して数直線上を動く点Pの t 秒後の座標が t^3-5t^2+4t で表される。

(1) Pが原点に戻ったときの速度をすべて求めよ。

(2) Pが運動の向きを初めて変えるのは何秒後か。

STANDARD問題

5 座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が，$x=-6t^2+10$，$y=2t^3-5$ で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までにPが通過する道のり s を求めよ。

6 自然数 n について，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ とする。

(1) I_1，I_2 を求めよ。

(2) I_{n+2} を n と I_n を用いて表せ。

(3) I_6 を求めよ。

実戦問題

7 曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ の $a\leqq x\leqq a+1$ の部分の長さを $L(a)$ とするとき，$L(a)$ の最小値を求めよ。

8 曲線 $y=\log x$ と x 軸，y 軸および直線 $y=10$ で囲まれる部分を，y 軸の周りに1回転させてできる容器に毎秒 v の水を入れる。

(1) 水の深さが h のときの，水の体積を求めよ。

(2) 水の深さが h のときの，水面の上昇速度を求めよ。

9 中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を，xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点Pが原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

(1) 円が角 t だけ回転したとき，点Pの座標を求めよ。

(2) (1)において，t が0から 2π まで動いて円が1回転したときの点Pの描く曲線を C とする。曲線 C の長さを求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　$f(x)=x-\dfrac{1}{e-2}$

$\boxed{2}$ 解答　$f(x)=\dfrac{2}{\pi^2}(\sin 2x+x)$，$a=\dfrac{2}{\pi^2}$

$\boxed{3}$ 解答　$\dfrac{1}{2}\log 2$

$\boxed{4}$ 解答　(1)　-3，12　　(2)　$\dfrac{5-\sqrt{13}}{3}$ 秒後

$\boxed{5}$ 解答　$16(2\sqrt{2}-1)$

$\boxed{6}$ 解答　(1)　$I_1=\dfrac{1}{2}\log 2$，$I_2=1-\dfrac{\pi}{4}$　　(2)　$I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-I_n$　　(3)　$\dfrac{13}{15}-\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{7}$ 解答　$a=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{e-1}{\sqrt{e}}$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　$\dfrac{\pi}{2}(e^{2h}-1)$　　(2)　$\dfrac{v}{\pi e^{2h}}$

$\boxed{9}$ 解答　(1)　$(at-a\sin t,\ a-a\cos t)$　　(2)　$3\pi a^2$　　(3)　$8a$

$\boxed{1}$　$\displaystyle\int_0^1 f(t)e^t dt$ は定数であるから a とおくと　　$f(x)=x+a$　……①

よって　　$\displaystyle\int_0^1 (t+a)e^t dt=\int_0^1 (t+a)(e^t)'dt=\Big[(t+a)e^t\Big]_0^1-\int_0^1 e^t dt$

$$=\{(1+a)e-a\}-\Big[e^t\Big]_0^1=(e-1)a+1$$

これより，$a=(e-1)a+1$ であるから　　$a=-\dfrac{1}{e-2}$

これを ① に代入して　　$f(x)=x-\dfrac{1}{e-2}$

$\boxed{2}$　等式の両辺を x で微分すると　　$f(x)=2a\sin x\cos x+ax=a\sin 2x+ax$

与えられた等式で $x=\pi$ とおくと　　$0=\dfrac{\pi^2}{2}a-1$　すなわち　$a=\dfrac{2}{\pi^2}$

したがって　　$f(x)=\dfrac{2}{\pi^2}(\sin 2x+x)$

$\boxed{3}$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log|x^2+1|\Big]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

$\boxed{4}$ (1)　$f(t)=t^3-5t^2+4t$ とすると　　$f'(t)=3t^2-10t+4$

また，$t^3-5t^2+4t=t(t^2-5t+4)=t(t-1)(t-4)$ であるから，$f(t)=0$ の解は

　$t=0$，1，4

ゆえに，点 P は 1 秒後と 4 秒後に原点に戻る。

よって，$t=1$ のときの速度は　　$f'(1)=-3$

$t=4$ のときの速度は　　$f'(4)=12$

(2)　$f'(t)=0$ とすると　　$t=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{3}$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{5-\sqrt{13}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{5+\sqrt{13}}{3}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	0	↗	極大	↘	極小	↗

よって，運動の向きを初めて変えるのは　$\dfrac{5-\sqrt{13}}{3}$ 秒後

$\boxed{5}$ $\dfrac{dx}{dt}=-12t$，$\dfrac{dy}{dt}=6t^2$ であるから

$$s=\int_0^2\sqrt{(-12t)^2+(6t^2)^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{144t^2+36t^4}\,dt=6\int_0^2 t\sqrt{t^2+4}\,dt$$

$t^2+4=u$ とおくと　　$2tdt=du$

t と u の対応は右のようになる。

t	$0\longrightarrow 2$
u	$4\longrightarrow 8$

よって　　$s=6\displaystyle\int_0^2 t\sqrt{t^2+4}\,dt=3\int_0^2\sqrt{t^2+4}\cdot 2tdt$

$$=3\int_4^8\sqrt{u}\,du=\Big[2u\sqrt{u}\Big]_4^8=16(2\sqrt{2}-1)$$

$\boxed{6}$ (1)　$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\log 2$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$$

(2)　$I_{n+2}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot(\tan x)'dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx=\left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-I_n=\frac{1}{n+1}-I_n$$

よって　　$I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-I_n$

(3)　(1)，(2) から　　$I_6=\dfrac{1}{5}-I_4=\dfrac{1}{5}-\left(\dfrac{1}{3}-I_2\right)=-\dfrac{2}{15}+\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{13}{15}-\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{7}$ $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ から　　$y'=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

ゆえに　　$1+(y')^2=1+\dfrac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2=\dfrac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2$

よって　　$L(a)=\displaystyle\int_a^{a+1}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_a^{a+1}(e^x+e^{-x})dx$

$$=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_a^{a+1}=\frac{1}{2}\{(e^{a+1}-e^a)-(e^{-a-1}-e^{-a})\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(e-1)e^a+(e-1)e^{-a-1}\}=\frac{e-1}{2}(e^a+e^{-a-1})$$

$e^a>0$，$e^{-a-1}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$L(a)\geqq\frac{e-1}{2}\cdot2\sqrt{e^a\cdot e^{-a-1}}=\frac{e-1}{\sqrt{e}}$$

等号は，$e^a=e^{-a-1}$ すなわち $a=-\dfrac{1}{2}$ のとき成り立つ。

したがって　　$a=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{e-1}{\sqrt{e}}$

$\boxed{8}$ t 秒後の水の深さを h，体積を V とする。

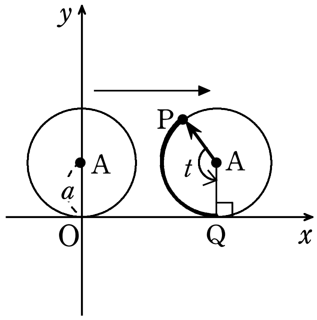
(1)　$y=\log x$ から　　$x=e^y$

よって　　$V=\pi\displaystyle\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h e^{2y}dy=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^h=\frac{\pi}{2}(e^{2h}-1)$

(2)　$V=\dfrac{\pi}{2}(e^{2h}-1)$ の両辺を t で微分すると　　$\dfrac{dV}{dt}=\pi e^{2h}\dfrac{dh}{dt}$

$\dfrac{dV}{dt}=v$ であるから，求める水面の上昇速度は　　$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{v}{\pi e^{2h}}$

$\boxed{9}$ (1)　円の中心を A，円と x 軸の接点を Q とおく。



$\mathrm{OQ}=\overset{\frown}{\mathrm{QP}}$ であるから　　$\mathrm{OQ}=at$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(at,\ a)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と x 軸の正の向きとのなす角は　　$\dfrac{3}{2}\pi-t$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(a\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-t\right),\ a\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-t\right)\right)$

$$=(-a\sin t,\ -a\cos t)$$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$$=(at,\ a)+(-a\sin t,\ -a\cos t)=(at-a\sin t,\ a-a\cos t)$$

すなわち点 P の座標は　　$(at-a\sin t,\ a-a\cos t)$

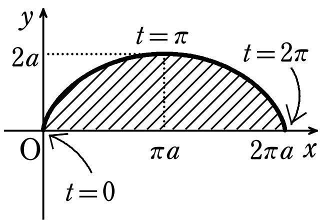
(2)　P の座標を $(x,\ y)$ とおくと　　$x=at-a\sin t$，$y=a-a\cos t$

$t=0$ のとき　$(x,\ y)=(0,\ 0)$，　　$t=2\pi$ のとき　$(x,\ y)=(2\pi a,\ 0)$

$\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dt}=a\sin t$ であるから

$0<t<\pi$ のとき　$\dfrac{dx}{dt}>0$，$\dfrac{dy}{dt}>0$　　$\pi<t<2\pi$ のとき　$\dfrac{dx}{dt}>0$，$\dfrac{dy}{dt}<0$

よって，曲線 C の概形は右の図のようになり，求める面積は斜線部分の面積である。ゆえに，求める面積は



$$\int_0^{2\pi a} y\,dx=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(\cos^2 t-2\cos t+1)\,dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}-2\cos t+1\right)dt=a^2\left[\frac{\sin 2t}{4}-2\sin t+\frac{3}{2}t\right]_0^{2\pi}$$

$$=3\pi a^2$$

(3)　求める曲線の長さを L とおく。

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t$$

$$=a^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)$$

$$=2a^2(1-\cos t)=4a^2\frac{1-\cos t}{2}=4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

$0\leqq t\leqq 2\pi$ のとき，$\sin\dfrac{t}{2}\geqq 0$ であるから

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}\,dt=2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8a$$

$\boxed{\text{参考}}$　$a>0$，t を媒介変数として，方程式 $x=a(t-\sin t)$，　$y=a(1-\cos t)$ で表される曲線をサイクロイドという。

公式確認問題（省略可）

$\boxed{1}$ 次の楕円の焦点の座標，長軸と短軸の長さ，焦点からの距離の和を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$　　(2) $4x^2+y^2=4$

$\boxed{2}$ 次の双曲線の焦点と頂点の座標，漸近線の方程式，焦点からの距離の差を求め，曲線をかけ。

(1) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}=1$　　(2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=-1$

$\boxed{3}$ 次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

(1) $y^2=-8x$　　(2) $x^2=2y$

$\boxed{4}$ 次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$　$(-2\sqrt{5},\ 1)$　　(2) $y^2=4x$　$(1,\ -2)$

BASIC問題

$\boxed{5}$ 次の方程式は放物線，楕円，双曲線のいずれを表すか。また，その焦点の座標を求めよ。

(1) $x-y^2+4y-3=0$　　(2) $4x^2+9y^2-16x+54y+61=0$

(3) $2x^2-9y^2+32x+36y+74=0$

$\boxed{6}$ 双曲線 $4x^2-y^2-16x+2y-1=0$ の漸近線の方程式を求めよ。

$\boxed{7}$ 次の曲線の方程式を求めよ。

(1) 焦点が A$(2,\ 2)$，準線が $x=-2$ である放物線

(2) 焦点 A$(8,\ -1)$，B$(0,\ -1)$ からの距離の和が 10 である楕円

(3) 焦点 A$(6,\ 1)$，B$(-4,\ 1)$ からの距離の差が 8 である双曲線

STANDARD問題

$\boxed{8}$ 曲線 $x^2-4y^2=4$ に，点$(-2,\ 3)$から引いた接線の方程式を求めよ。

$\boxed{9}$ 直線 $y=2x+k$ が楕円 $x^2+4y^2=4$ と異なる 2 点 P，Q で交わるとする。

(1) 定数 k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) (1) の範囲で k を動かしたとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

10 楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の焦点を F(4，0)，F′(−4，0) とし，第 1 象限にある楕円上の点を P とする。また，O を原点として OP$=a$ とおく。

(1) PF＋PF′ の値を求めよ。

(2) $\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF}'^2$ および積 PF・PF′ を a を用いて表せ。

(3) $\angle\mathrm{F'PF}=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，a の値を求めよ。

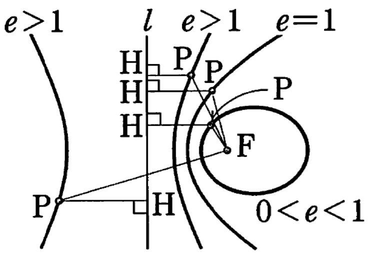
11 楕円 $x^2+4y^2=4$ 上の点 P と直線 $x+2y=3$ 上の点 Q について，2 点 P，Q 間の距離の最小値を求めよ。

実戦問題

12 楕円 $4x^2+y^2=4$ の外部にある点 P$(a，b)$ からこの楕円に引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。

13 座標平面上に，原点 O を中心とする半径 $2a$ の円 C と，定点 F$(-2b，0)$ $(0<b<a)$ をとる。C 上の点を Q とし，線分 FQ の垂直二等分線と線分 OQ との交点を P とする。点 Q が C 上を動くとき，点 P の軌跡の方程式を求めよ。

14 双曲線 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ の 2 つの焦点のうち $x>0$ である点を F，F に対する準線の方程式を $x=k$ $(k>0)$ とする。k の値と，曲線の離心率 e の値を求めよ。ただし，**離心率**に関しては次の解説を参考にしてよい。



PF：PH$=e$：1

一般に，点 P から定点 F への距離 PF と，定直線 l への距離の比の値 $e=\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ が一定であるとき，e の値をこの曲線の**離心率**といい，直線 l を焦点 F に対する**準線**という。

(1) $0<e<1$ のとき，F を焦点の 1 つとする楕円

(2) $e=1$ のとき，Fを焦点，を準線とする放物線

(3) $e>1$ のとき，Fを焦点の 1 つとする双曲線

となることが知られている。

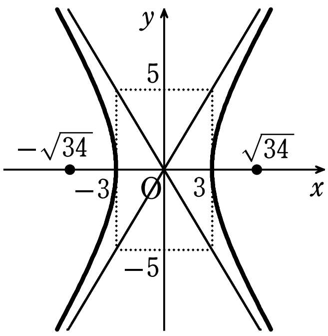
$\boxed{1}$ 解答　焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さ，焦点からの距離の和の順に

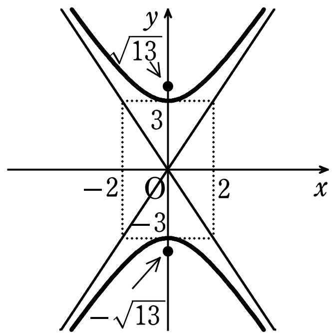
(1)　$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$，6，4，6　　(2)　$(0,\ \sqrt{3})$，$(0,\ -\sqrt{3})$，4，2，4

$\boxed{2}$ 解答　焦点の座標，頂点の座標，漸近線の方程式，焦点からの距離の差の順に

(1)　$(\sqrt{34},\ 0)$，$(-\sqrt{34},\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$，$y=\frac{5}{3}x$，$y=-\frac{5}{3}x$，6，〔図〕

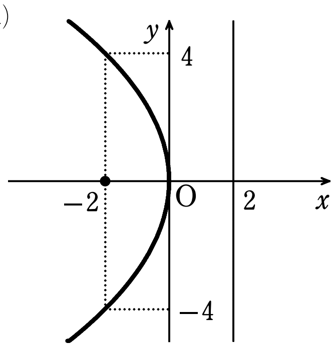
(2)　$(0,\ \sqrt{13})$，$(0,\ -\sqrt{13})$，$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$，$y=\frac{3}{2}x$，$y=-\frac{3}{2}x$，6，〔図〕

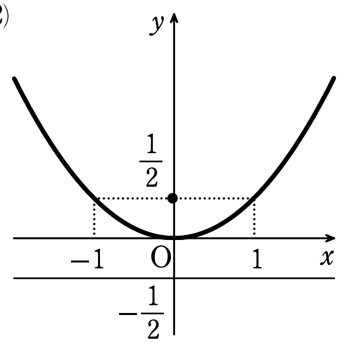
(1)


(2)


$\boxed{3}$ 解答　(1)　焦点は点 $(-2,\ 0)$，準線は直線 $x=2$，概形は〔図〕

(2)　焦点は点 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，準線は直線 $y=-\frac{1}{2}$，概形は〔図〕

(1)


(2)


$\boxed{4}$ 解答　(1)　$\sqrt{5}\,x+2y+8=0$

(2)　$x+y+1=0$

$\boxed{5}$ 解答 (1) 放物線，焦点の座標は $\left(-\frac{3}{4},\ 2\right)$

(2) 楕円，焦点の座標は $(2+\sqrt{5},\ -3)$，$(2-\sqrt{5},\ -3)$

(3) 双曲線，焦点の座標は $(-8+\sqrt{11},\ 2)$，$(-8-\sqrt{11},\ 2)$

$\boxed{6}$ 解答 $y=2x-3$，$y=-2x+5$

$\boxed{7}$ 解答 (1) $(y-2)^2=8x$ (2) $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$ (3) $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$

$\boxed{8}$ 解答 $x=-2$，$5x+6y=8$

$\boxed{9}$ 解答 (1) $-\sqrt{17}<k<\sqrt{17}$ (2) 直線 $y=-\frac{1}{8}x$ の $-\frac{8\sqrt{17}}{17}<x<\frac{8\sqrt{17}}{17}$ の部分

$\boxed{10}$ 解答 (1) 10 (2) $\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF'}^2=2a^2+32$，$\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF'}=34-a^2$ (3) $a=\sqrt{22}$

$\boxed{11}$ 解答 $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{5}$

$\boxed{12}$ 解答 円 $x^2+y^2=5$

$\boxed{13}$ 解答 (1) 略 (2) $\frac{(x+b)^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}=1$

$\boxed{14}$ 解答 $k=\frac{16}{5}$，$e=\frac{5}{4}$

$\boxed{1}$ (1) $\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

よって，焦点の座標は $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

長軸の長さは $2\times3=6$，短軸の長さは $2\times2=4$

焦点からの距離の和は $2\times3=6$

(2) 方程式を変形すると $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

$\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

よって，焦点の座標は $(0,\ \sqrt{3})$，$(0,\ -\sqrt{3})$

長軸の長さは $2\times2=4$，短軸の長さは $2\times1=2$

焦点からの距離の和は $2\times2=4$

$\boxed{2}$ (1) $\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

よって，焦点の座標は $(\sqrt{34},\ 0)$，$(-\sqrt{34},\ 0)$

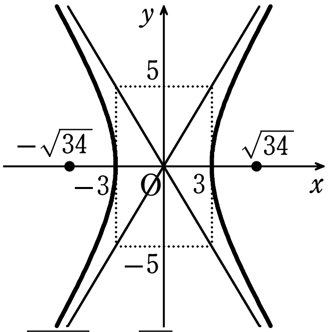
頂点の座標は $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$

漸近線の方程式は $y=\frac{5}{3}x$，$y=-\frac{5}{3}x$

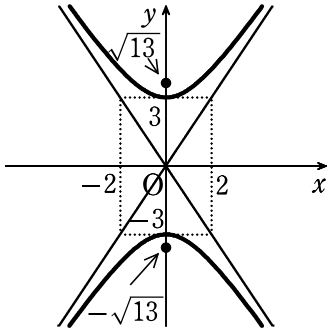
焦点からの距離の差は $2\times3=6$

曲線は図のようになる。

(1)



(2)



(2)　$\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

よって，焦点の座標は　$(0,\ \sqrt{13})$，$(0,\ -\sqrt{13})$

頂点の座標は　$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$

漸近線の方程式は　$y=\dfrac{3}{2}x$，$y=-\dfrac{3}{2}x$

焦点からの距離の差は　$2\times3=6$

曲線は図のようになる。

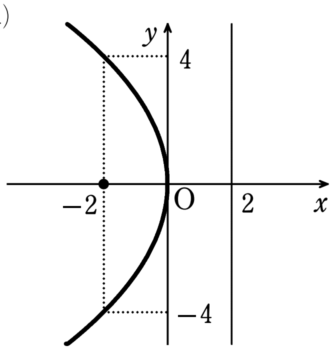
$\boxed{3}$ (1)　$y^2=-8x$ から　$y^2=4\cdot(-2)\cdot x$

焦点は　点$(-2,\ 0)$　　準線は　直線 $x=2$

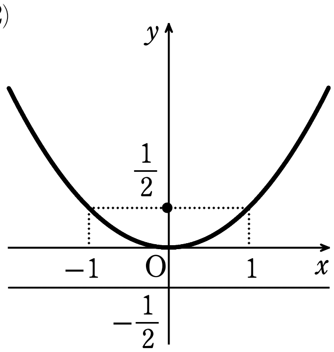
(2)　$x^2=2y$ から　$x^2=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot y$

焦点は　点$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$　　準線は　直線 $y=-\dfrac{1}{2}$

(1)



(2)



$\boxed{4}$ (1)　接線の方程式は　$\dfrac{1}{16}\cdot(-2\sqrt{5})x-\dfrac{1}{4}\cdot1\cdot y=1$

よって　　$\sqrt{5}\,x+2y+8=0$

(2)　接線の方程式は　$(-2)y=2(x+1)$

よって　　$x+y+1=0$

$\boxed{5}$ (1)　この方程式を変形すると　　$x=(y^2-4y+4)-1$

すなわち　　$x=(y-2)^2-1$　　　　よって　　$(y-2)^2=4\cdot\dfrac{1}{4}\cdot(x+1)$　…… ①

① は，放物線 $y^2=x$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線を表す。

放物線 $y^2=x$ の焦点の座標は$\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$であるから，放物線 ① の焦点の座標は

$$\left(-\frac{3}{4},\ 2\right)$$

(2)　この方程式を変形すると　　$4(x^2-4x+4)+9(y^2+6y+9)=16+81-61$

すなわち　　$4(x-2)^2+9(y+3)^2=36$

よって　　$\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{4}=1$　……①

①は，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動した楕円を表す。

楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の焦点の座標は $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$ であるから，楕円①の焦点の座標は　　$(2+\sqrt{5},\ -3)$，$(2-\sqrt{5},\ -3)$

(3)　この方程式を変形すると　　$2(x^2+16x+64)-9(y^2-4y+4)=128-36-74$

すなわち　　$2(x+8)^2-9(y-2)^2=18$

よって　　$\dfrac{(x+8)^2}{9}-\dfrac{(y-2)^2}{2}=1$　……①

①は，双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{2}=1$ を x 軸方向に -8，y 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線を表す。

双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{2}=1$ の焦点の座標は $(\sqrt{11},\ 0)$，$(-\sqrt{11},\ 0)$ であるから，双曲線①の焦点の座標は　　$(-8+\sqrt{11},\ 2)$，$(-8-\sqrt{11},\ 2)$

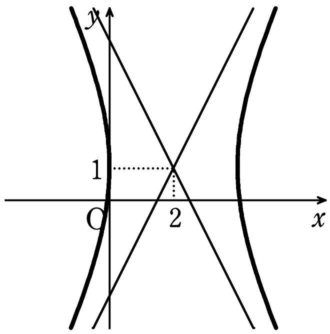
$\boxed{6}$ $4x^2-y^2-16x+2y-1=0$

$4(x^2-4x)-(y^2-2y)-1=0$

$4(x^2-4x+4)-(y^2-2y+1)=16$

$4(x-2)^2-(y-1)^2=16$

$\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$



よって，双曲線 $4x^2-y^2-16x+2y-1=0$ の中心の座標は　$(2,\ 1)$

双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$ の漸近線の方程式は　$y=2x$，$y=-2x$

求める漸近線の方程式は　$y=2(x-2)+1$，$y=-2(x-2)+1$

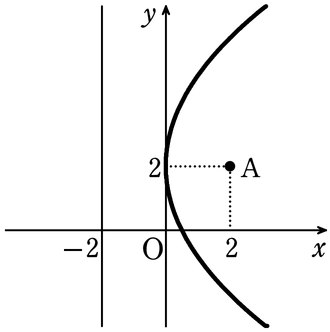
すなわち　　$y=2x-3$，$y=-2x+5$

$\boxed{7}$ (1) 焦点が $(2,\ 0)$，準線が $x=-2$ である放物線の方程式は　$y^2=4\cdot2x$

すなわち　$y^2=8x$

焦点が A$(2,\ 2)$ である放物線は，放物線 $y^2=8x$ を y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線であるから，その方程式は

$$(y-2)^2=8x$$



(2) 線分 AB の中点を M とすると，M の座標は

$\left(\dfrac{8+0}{2},\ -1\right)$　すなわち　M$(4,\ -1)$

M が原点 O に移るように，

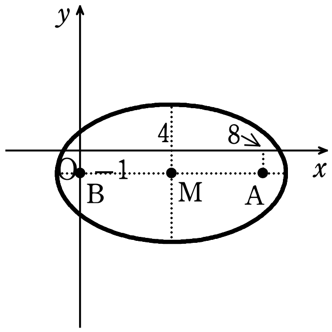
x 軸方向に -4，y 軸方向に 1 だけ平行移動すると，

A$(8,\ -1)$，B$(0,\ -1)$ は，それぞれ点

F$(4,\ 0)$，F′$(-4,\ 0)$ に移る。

F，F′ を焦点とする楕円の方程式を

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>b>0)$　とする。



焦点からの距離の和が 10 であるから　$2a=10$

よって　$a=5$

焦点の座標について　$\sqrt{a^2-b^2}=4$

両辺を 2 乗すると　$a^2-b^2=16$

よって　$b^2=a^2-16=25-16=9$

F，F′ を焦点とする楕円の方程式は　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

この楕円を x 軸方向に 4，y 軸方向に -1 だけ平行移動すると，求める楕円の方程式は

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

(3) 線分 AB の中点を M とすると，M の座標は

$\left(\dfrac{6+(-4)}{2},\ 1\right)$　すなわち　M$(1,\ 1)$

M が原点 O に移るように，

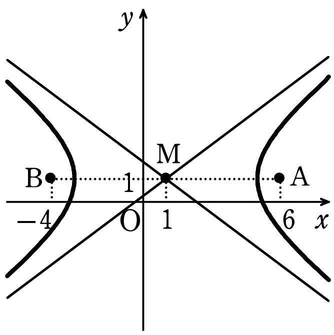
x 軸方向に -1，y 軸方向に -1 だけ平行移動すると，

A$(6,\ 1)$，B$(-4,\ 1)$ は，それぞれ点 F$(5,\ 0)$，

F′$(-5,\ 0)$ に移る。

F，F′ を焦点とする双曲線の方程式を

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　とする。



焦点からの距離の差が 8 であるから　$2a=8$　よって　$a=4$

焦点の座標について　$\sqrt{a^2+b^2}=5$

両辺を 2 乗すると　$a^2+b^2=25$

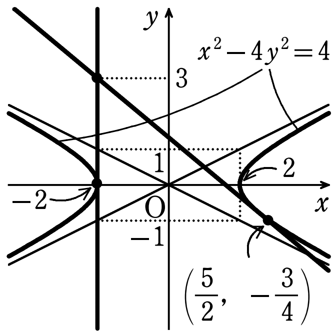
よって　$b^2=25-a^2=25-16=9$

F，F′ を焦点とする双曲線の方程式は　$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

この双曲線を x 軸方向に 1，y 軸方向に 1 だけ平行移動すると，求める双曲線の方程式は　$\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

$\boxed{8}$　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は

$x_1x-4y_1y=4$　……①



直線①が点 $(-2,\ 3)$ を通るから　$-2x_1-4\cdot3y_1=4$

すなわち　$x_1=-6y_1-2$　……②

また　$x_1{}^2-4y_1{}^2=4$

②を代入して整理すると　$4y_1{}^2+3y_1=0$

よって，$y_1(4y_1+3)=0$ から　$y_1=0,\ -\dfrac{3}{4}$

②から　$y_1=0$ のとき　$x_1=-2$

$y_1=-\dfrac{3}{4}$ のとき　$x_1=\dfrac{5}{2}$

ゆえに，①から　$x=-2,\ 5x+6y=8$

別解　双曲線 $x^2-4y^2=4$ の頂点の 1 つは $(-2,\ 0)$ であるから，点 $(-2,\ 3)$ を通り x 軸に垂直な直線 $x=-2$ は接線である。

もう 1 つの接線は，x 軸に垂直でないから，その方程式を $y-3=m(x+2)$ すなわち $y=mx+2m+3$ ……① とおく。①を双曲線の方程式 $x^2-4y^2=4$ ……② に代入すると　$x^2-4(mx+2m+3)^2=4$

整理すると　$(1-4m^2)x^2-8m(2m+3)x-8(2m^2+6m+5)=0$　……③

直線①が双曲線②に接するための条件は $1-4m^2\neq0$ で，このとき 2 次方程式③の判別式を D とすると　$D=0$

ゆえに　$\dfrac{D}{4}=\{-4m(2m+3)\}^2-(1-4m^2)\cdot\{-8(2m^2+6m+5)\}=0$

整理すると　$8(6m+5)=0$　　よって　$m=-\dfrac{5}{6}$

これは $1-4m^2\neq0$ を満たす。　　ゆえに，①から　$5x+6y=8$

以上から　$x=-2,\ 5x+6y=8$

$\boxed{9}$　$y=2x+k$ ……①，$x^2+4y^2=4$ ……② とする。

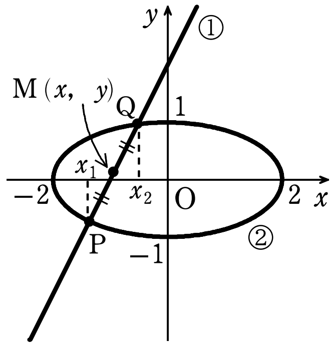
①を②に代入して整理すると　$17x^2+16kx+4(k^2-1)=0$　……③

(1)　x の 2 次方程式③の判別式を D とすると，異なる 2 点で交わるための条件は $D>0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=(8k)^2-4\cdot17(k^2-1)=-4(k^2-17)$　　ゆえに　$-4(k^2-17)>0$

よって　$(k+\sqrt{17})(k-\sqrt{17})<0$　　したがって　$-\sqrt{17}<k<\sqrt{17}$

(2)　2点P，Qの x 座標をそれぞれ x_1，x_2 とすると，x_1，x_2 は2次方程式 ③ の解であるから，解と係数の関係により　　$x_1+x_2=-\dfrac{16k}{17}$



M$(x,\ y)$ とすると　$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{8k}{17}$　…… ④

このとき　$y=2x+k=2\cdot\left(-\dfrac{8k}{17}\right)+k=\dfrac{k}{17}$　…… ⑤

④ から　　$k=-\dfrac{17}{8}x$

これを ⑤ に代入して　　$y=-\dfrac{1}{8}x$

また，(1) から　　$-\sqrt{17}<-\dfrac{17}{8}x<\sqrt{17}$　　　よって　　$-\dfrac{8\sqrt{17}}{17}<x<\dfrac{8\sqrt{17}}{17}$

したがって，求める軌跡は　　直線 $y=-\dfrac{1}{8}x$ の $-\dfrac{8\sqrt{17}}{17}<x<\dfrac{8\sqrt{17}}{17}$ の部分

10 (1)　PF＋PF′ は楕円上の点Pから2つの焦点F，F′ までの距離の和であるから

$$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2\times5=10$$

(2)　P$(x,\ y)$，$x>0$，$y>0$ とする。$\mathrm{OP}^2=x^2+y^2=a^2$ であるから

$$\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF'}^2=(x-4)^2+y^2+(x+4)^2+y^2=2(x^2+y^2)+32=2a^2+32$$

また，$(\mathrm{PF}+\mathrm{PF'})^2=\mathrm{PF}^2+2\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF'}+\mathrm{PF'}^2$ であるから

$$2\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF'}=(\mathrm{PF}+\mathrm{PF'})^2-(\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF'}^2)=10^2-(2a^2+32)=68-2a^2$$

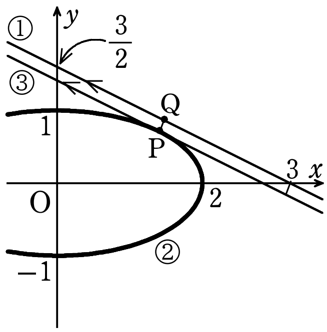
よって　　$\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF'}=34-a^2$

(3)　△PFF′ において，余弦定理から　　$\mathrm{FF'}^2=\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF'}^2-2\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF'}\cos\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに，(2) の結果と FF′＝8 から　　$8^2=2a^2+32-2(34-a^2)\cdot\dfrac{1}{2}$

よって　　$a^2=22$　　　$a>0$ であるから　　$a=\sqrt{22}$

11 求める距離PQの最小値は，直線 $x+2y=3$ …… ① と平行で，楕円 $x^2+4y^2=4$ …… ② に第1象限で接する直線 $x+2y+k=0$ …… ③ と直線 ① との距離に等しい。③ から　　$2y=-x-k$



これを ② に代入して整理すると

$$2x^2+2kx+k^2-4=0$$

判別式を D とすると，直線 ③ が楕円 ② に接するための条件は　　$D=0$

ここで　　$\dfrac{D}{4}=k^2-2(k^2-4)=-k^2+8$

ゆえに，$-k^2+8=0$ から　　$k=\pm2\sqrt{2}$

直線 ③ が楕円 ② に第1象限で接するとき，$k<0$ であるから　　$k=-2\sqrt{2}$

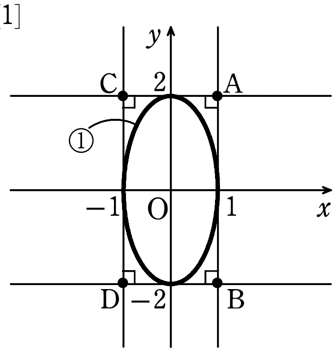
よって，求める最小値は，直線 $x+2y-2\sqrt{2}=0$ と直線 ① 上の点 $(3,\ 0)$ との距離に等

しいから　　$\dfrac{|3+2\cdot 0-2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{5}$

12 $4x^2+y^2=4$ ……① とおく。

[1] $a=\pm 1$ のとき，2 本の接線が直交するのは，点 A$(1,\ 2)$，B$(1,\ -2)$，C$(-1,\ 2)$，D$(-1,\ -2)$ からそれぞれ引いたときである。すなわち，4 点 A，B，C，D は求める軌跡の一部である。

[1]



[2] $a \neq \pm 1$ のとき，点 P を通る直線の方程式を

$$y-b=m(x-a)$$

すなわち　$y=mx+b-ma$ ……② とおく。

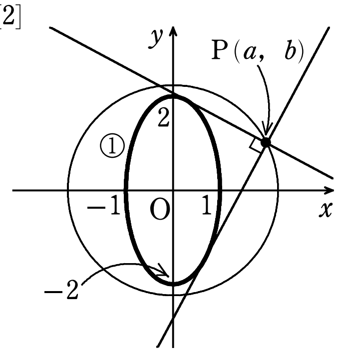
② を ① に代入して整理すると

$$(4+m^2)x^2+2m(b-ma)x+(b-ma)^2-4=0 \quad \cdots\cdots ③$$

直線 ② が楕円 ① に接するとき，x の 2 次方程式 ③ の判別式を D とすると

$$D=0$$

[2]



ゆえに　　$\dfrac{D}{4}=m^2(b-ma)^2-(4+m^2)\cdot\{(b-ma)^2-4\}=0$

よって　　$4\{-(b-ma)^2+4+m^2\}=0$

すなわち　　$(1-a^2)m^2+2abm-b^2+4=0$ ……④

$1-a^2 \neq 0$ であるから，m の 2 次方程式 ④ の 2 つの解を m_1，m_2 とすると，点 P から楕円 ① に引いた 2 本の接線の傾きは m_1，m_2 で与えられる。

2 本の接線が直交するための条件は　　$m_1m_2=-1$

④ において，解と係数の関係から　　$m_1m_2=\dfrac{-b^2+4}{1-a^2}$

よって　　$\dfrac{-b^2+4}{1-a^2}=-1$　　　ゆえに　　$a^2+b^2=5$，$a \neq \pm 1$

ここで，4 点 A，B，C，D は円 $x^2+y^2=5$ に含まれる。

すなわち，点 P は円 $x^2+y^2=5$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点 P$(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　円 $x^2+y^2=5$

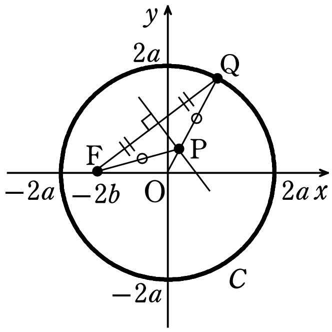
$\boxed{13}$ 点 P は線分 FQ の垂直二等分線上にあるから

$$FP = QP$$

ゆえに　　$FP + PO = QP + PO = QO = 2a$

よって，線分の長さの和 FP＋PO は点 Q の位置には無関係に一定 $(2a)$ である。

したがって，2 点 F，O から点 P までの距離の和が $2a$（一定）であるから，点 P の軌跡は F，O を焦点とする楕円である。この楕円の中心は線分 FO の中点 $(-b, 0)$ で，長軸の長さは 2 焦点からの距離の和 $2a$ に等しい。



さらに，短軸の長さを $2c$ とおくと，焦点間の距離は $2\sqrt{a^2-c^2}$ で，これは $2b$ に等しいから　　$\sqrt{a^2-c^2}=b$　　　よって　　$c^2=a^2-b^2$

以上から，点 P の軌跡の方程式は　　$\dfrac{(x+b)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-b^2}=1$

$\boxed{14}$ $\sqrt{16+9}=5$ であるから　　F$(5,\ 0)$

双曲線上の任意の点を P$(x,\ y)$ とする。

P から直線 $x=k$ に下ろした垂線を PH とすると，次の等式が成り立つ。

$$PF : PH = e : 1$$

よって　　$\sqrt{(x-5)^2+y^2} : |x-k| = e : 1$

したがって　　$\sqrt{(x-5)^2+y^2} = e|x-k|$

両辺を 2 乗すると　　$(x-5)^2+y^2=e^2(x-k)^2$　……①

ここで，P$(x,\ y)$ は双曲線上の点であるから　　$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

よって　　$y^2=9\left(\dfrac{x^2}{16}-1\right)$

これを ① に代入すると　　$(x-5)^2+9\left(\dfrac{x^2}{16}-1\right)=e^2(x-k)^2$

x について整理すると　　$(16e^2-25)x^2-32(e^2k-5)x+16(e^2k^2-16)=0$

この等式は，双曲線上の任意の点 P$(x,\ y)$ について成り立つ，すなわち $x \leqq -4$，$4 \leqq x$ であるすべての実数 x について成り立つから

$$\begin{cases} 16e^2-25=0 & \cdots\cdots ② \\ e^2k-5=0 & \cdots\cdots ③ \\ e^2k^2-16=0 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

② から　　$e^2=\dfrac{25}{16}$　　　$e>0$ から　　$e=\dfrac{5}{4}$

これを ③ に代入して k を求めると　　$k=\dfrac{16}{5}$　　　これらは ④ も満たす。

したがって　　$k=\dfrac{16}{5}$，$e=\dfrac{5}{4}$

確認問題（省略可）

1 (1)　次の極座標の点 A，B の直交座標を求めよ。A$\left(4,\ \frac{5}{4}\pi\right)$，B$\left(3,\ -\frac{\pi}{2}\right)$

(2)　次の直交座標の点 C，D の極座標 $(r,\ \theta)$ $[0 \leqq \theta < 2\pi]$ を求めよ。

$$\mathrm{C}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \mathrm{D}\left(-2,\ -2\sqrt{3}\right)$$

2　次の曲線を極方程式で表せ。

(1)　$x^2+y^2+2x=0$　　(2)　$x^2-y^2=2$

3　次の極方程式を，直交座標に関する方程式で表せ。

(1)　$r\cos\theta=1$　　(2)　$r=2\sin\theta$

(3)　$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2$　　(4)　$r^2\sin 2\theta=2$

BASIC問題

4　次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(1)　$\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t} \\ y=t-\dfrac{1}{t} \end{cases}$　　(2)　$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{6t}{1+t^2} \end{cases}$　　(3)　$\begin{cases} x=\sin\theta \\ y=\cos 2\theta \end{cases}$

5　x，y が $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{4}=1$ を満たす実数のとき，$x^2+6\sqrt{2}xy-6y^2$ の最小値とそのときの x，y の値を求めよ。

6　＊　放物線 $y=\frac{3}{4}x^2$ と楕円 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ の共通接線の方程式を求めよ.

実戦問題

7　O を極とする極座標に関して，3 点 A$\left(6,\ \frac{\pi}{3}\right)$，B$\left(4,\ \frac{2}{3}\pi\right)$，C$\left(2,\ -\frac{3}{4}\pi\right)$が与えられているとき，次のものを求めよ。

(1)　線分 AB の長さ　　(2)　△OAB の面積　　(3)　△ABC の面積

8　＊　$\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi$ のとき，極方程式 $r=2(\cos\theta+\sin\theta)$ の表す曲線を図示し，その長さを求めよ。

9　点 $(0,\ 1)$ を通る傾き t の直線 ℓ が，2 直線 $y=2x-1$，$y=-2x-1$ と交わる点を，それぞれ A，B とし，線分 AB の中点を P とする。

(1)　P の座標を媒介変数 t で表せ。

(2)　t の値が変化するとき，P はどのような曲線を描くか。

$\boxed{1}$ 解答 (1) $A(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$, $B(0,\ -3)$ (2) $C\left(1,\ \dfrac{7}{4}\pi\right)$, $D\left(4,\ \dfrac{4}{3}\pi\right)$

$\boxed{2}$ 解答 (1) $r=-2\cos\theta$ (2) $r^2\cos 2\theta=2$

$\boxed{3}$ 解答 (1) $x=1$ (2) $x^2+y^2=2y$ (3) $y=-\sqrt{3}x+4$ (4) $xy=1$

$\boxed{4}$ 解答 (1) 双曲線 $x^2-y^2=4$ (2) 楕円 $9x^2+y^2=9$ ただし，点 $(-1,\ 0)$ は除く

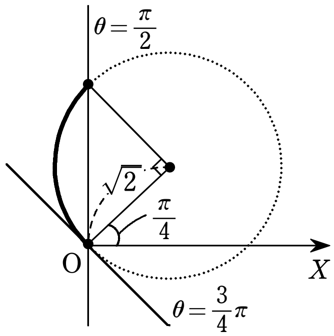
(3) 放物線 $y=1-2x^2$ の $-1\leqq x\leqq 1$ の部分

$\boxed{5}$ 解答 $(x,\ y)=(-\sqrt{6},\ \sqrt{3})$, $(\sqrt{6},\ -\sqrt{3})$ のとき最小値 -48

$\boxed{6}$ 解答 $y=\pm 2\sqrt{3}x-4$

$\boxed{7}$ 解答 (1) $2\sqrt{7}$ (2) $6\sqrt{3}$ (3) $\dfrac{5\sqrt{2}+12\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{8}$ 解答 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$



$\boxed{9}$ 解答 (1) $\left(\dfrac{2t}{4-t^2},\ \dfrac{4+t^2}{4-t^2}\right)$ (2) 双曲線 $4x^2-y^2=-1$ ただし，点 $(0,\ -1)$ を除く

$\boxed{1}$ (1) A：$x=4\cos\dfrac{5}{4}\pi=-2\sqrt{2}$, $y=4\sin\dfrac{5}{4}\pi=-2\sqrt{2}$

よって　$A(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$

B：$x=3\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, $y=3\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-3$

よって　$B(0,\ -3)$

(2) C：$r=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\theta=\dfrac{7}{4}\pi$

したがって　$C\left(1,\ \frac{7}{4}\pi\right)$

D：$r=\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}=4$

よって　$\cos\theta=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\frac{-2\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\theta=\frac{4}{3}\pi$

したがって　$D\left(4,\ \frac{4}{3}\pi\right)$

$\boxed{2}$ (1)　$x^2+y^2+2x=0$

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を方程式に代入すると

$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+2r\cos\theta=0$

$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+2r\cos\theta=0$

$r^2+2r\cos\theta=0$

$r(r+2\cos\theta)=0$

よって，$r=0$ または $r=-2\cos\theta$

$r=-2\cos\theta$ において，$\theta=\frac{\pi}{2}$ とすると　$r=0$

$r=0$ は $r=-2\cos\theta$ に含まれるから，求める極方程式は　$r=-2\cos\theta$

(2)　$x^2-y^2=2$

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を方程式に代入すると

$r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=2$

$r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=2$

$r^2\cos2\theta=2$

$\boxed{3}$ (1)　$r\cos\theta=1$

$x=r\cos\theta$ であるから　$x=1$

(2)　$r=2\sin\theta$

$r\neq0$ のとき，両辺に r をかけると　$r^2=2r\sin\theta$

よって　$x^2+y^2=2y$　……①

$r=0$ のとき，極 O を表すから，① において $x=0$，$y=0$ のときである。

したがって，求める方程式は　$x^2+y^2=2y$

参考　$x^2+(y-1)^2=1$ と変形できるから，この方程式は円を表す。

(3)　$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2$

$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)=2$

$$r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)=2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}r\cos\theta+\frac{1}{2}r\sin\theta=2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=2$$

よって　$y=-\sqrt{3}x+4$

(4)　$r^2\sin 2\theta=2$

$r^2\cdot 2\sin\theta\cos\theta=2$

$r\cos\theta\cdot r\sin\theta=1$

よって　$xy=1$

$\boxed{4}$ (1)　$x=t+\dfrac{1}{t}$　……①　　　$y=t-\dfrac{1}{t}$　……②

①，② を t，$\dfrac{1}{t}$ の連立方程式とみて解くと　　$t=\dfrac{x+y}{2}$，$\dfrac{1}{t}=\dfrac{x-y}{2}$

ゆえに　　$t\cdot\dfrac{1}{t}=\dfrac{x+y}{2}\cdot\dfrac{x-y}{2}$

よって　　双曲線 $x^2-y^2=4$

(2)　$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$y=\dfrac{6t}{1+t^2}$ から　　$(1+x)t^2=1-x$　……①

$yt^2-6t=-y$　……②

$x=-1$ は ① を満たさないから　　$x\neq-1$

①，② を t，t^2 の連立方程式とみて解くと　　$t=\dfrac{y}{3(1+x)}$，$t^2=\dfrac{1-x}{1+x}$

t を消去して　　$\left\{\dfrac{y}{3(1+x)}\right\}^2=\dfrac{1-x}{1+x}$　　　整理すると　　$9x^2+y^2=9$

よって　　楕円 $9x^2+y^2=9$　　　ただし，点 $(-1,\ 0)$ は除く。

(3)　$x=\sin\theta$ から　　$-1\leqq x\leqq 1$

また　　$y=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2x^2$

したがって　　放物線 $y=1-2x^2$ の $-1\leqq x\leqq 1$ の部分

$\boxed{5}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 $(x,\ y)$ は，

$$x=2\sqrt{6}\cos\theta,\quad y=2\sin\theta\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

と表されるから

$$x^2+6\sqrt{2}xy-6y^2=(2\sqrt{6}\cos\theta)^2+6\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}\cos\theta\cdot 2\sin\theta-6(2\sin\theta)^2$$

$=24\cos^2\theta+48\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-24\sin^2\theta$

$=24(\cos^2\theta-\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)$

$=24(\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta)$

$=48\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\dfrac{\pi}{6}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6}<4\pi+\dfrac{\pi}{6}$

よって　$-1\leqq\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq 1$

ゆえに，$x^2+6\sqrt{2}xy-6y^2$ は $\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき最小となり，最小値は -48 である。

$\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$，$\dfrac{\pi}{6}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6}<4\pi+\dfrac{\pi}{6}$ から　$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{7}{2}\pi$

よって　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi$

$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$x=-\sqrt{6}$，$y=\sqrt{3}$

$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$ のとき　$x=\sqrt{6}$，$y=-\sqrt{3}$

ゆえに，最小値は -48 で，そのときの x，y の値は

$(x,\ y)=(-\sqrt{6},\ \sqrt{3})$，$(\sqrt{6},\ -\sqrt{3})$

$\boxed{6}$ $y=\dfrac{3}{4}x^2$ ……①，$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ ……②

とおく．楕円②上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $x_1x+\dfrac{y_1y}{4}=1$ ……③

①と③から y を消去して　$16x_1x+3y_1x^2=16$　ゆえに　$3y_1x^2+16x_1x-16=0$

①と③が接するとき $\dfrac{D}{4}=0$ から　$(8x_1)^2-3y_1\cdot(-16)=0$

よって　$4x_1{}^2+3y_1=0$ …④

一方，点 P は②上の点であるから　$x_1{}^2+\dfrac{y_1{}^2}{4}=1$ ……⑤

④, ⑤から　$4-y_1{}^2+3y_1=0$　ゆえに　$(y_1+1)(y_1-4)=0$

よって　$y_1=-1, 4$ であるが，$-2\leqq y_1\leqq 2$であるから，$y_1=-1$ のみ適する．

このとき，⑤から　$x_1=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，求める共通接線の方程式は　$y=\pm 2\sqrt{3}x-4$

7 (1) △OABにおいて

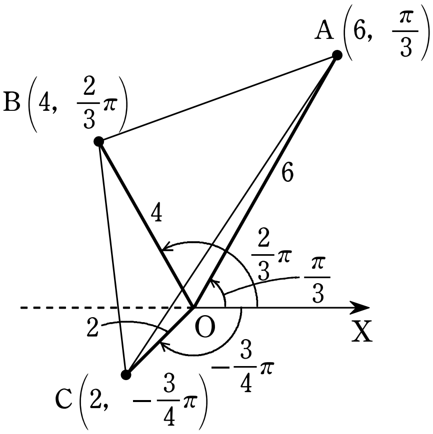
$OA=6$，$OB=4$，

$\angle AOB=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$

よって，余弦定理により

$AB^2=6^2+4^2-2\cdot6\cdot4\cos\dfrac{\pi}{3}=28$

ゆえに　$AB=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$



(2) △OABの面積を S_1 とすると

$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot4\sin\dfrac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$

(3) $\angle BOC=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$，$\angle COA=\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\pi}{4}$ で

あるから，△OBC，△OACの面積をそれぞれ S_2，S_3 とすると

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=4\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

$$S_3=\frac{1}{2}\cdot6\cdot2\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=6\left(\sin\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$$

よって，△ABCの面積を S とすると

$$S=S_1+S_2-S_3=6\sqrt{3}+(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}=\frac{5\sqrt{2}+12\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$$

別解　3点A，B，Cを直交座標で表すと

$A(3,\ 3\sqrt{3})$，$B(-2,\ 2\sqrt{3})$，$C(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$

ゆえに　$\overrightarrow{AB}=(-5,\ -\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{2}-3,\ -\sqrt{2}-3\sqrt{3})$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\left|-5(-\sqrt{2}-3\sqrt{3})-(-\sqrt{3})(-\sqrt{2}-3)\right|=\dfrac{5\sqrt{2}+12\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

8 $r=2(\cos\theta+\sin\theta)$ の両辺を r 倍して

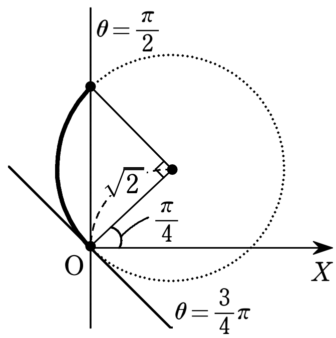
$r^2=2r\cos\theta+2r\sin\theta$

ゆえに　$x^2+y^2=2x+2y$

すなわち　$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ より，曲線は右の図の太い実線部分のよう

になるから，求める曲線の長さは　$\sqrt{2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$



別解　$r=2(\cos\theta+\sin\theta)$ から　$r=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

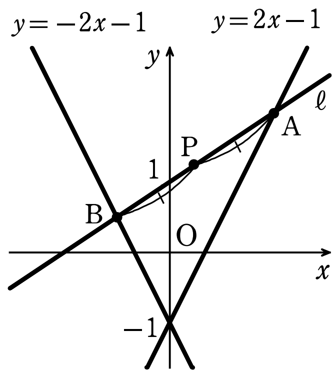
よって，極方程式 $r=2(\cos\theta+\sin\theta)$ は

中心が $\left(\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$，半径 $\sqrt{2}$

の円を表す。

以下同様。

$\boxed{9}$ (1)　直線 ℓ の方程式は　$y=tx+1$ ……①



① を $y=2x-1$ に代入して整理すると

$(2-t)x=2$

$t=2$ はこの等式を満たさないから

$t\neq 2$

よって，A の x 座標は　$x=\dfrac{2}{2-t}$

また，① を $y=-2x-1$ に代入して整理すると

$(2+t)x=-2$

$t=-2$ はこの等式を満たさないから　$t\neq -2$

よって，B の x 座標は　$x=-\dfrac{2}{2+t}$

P は線分 AB の中点であるから，P の x 座標は　$x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{2-t}-\dfrac{2}{2+t}\right)=\dfrac{2t}{4-t^2}$

P は直線 ① 上の点であるから，P の y 座標は　$y=t\cdot\dfrac{2t}{4-t^2}+1=\dfrac{4+t^2}{4-t^2}$

したがって，P の座標を媒介変数 t で表すと　$\left(\dfrac{2t}{4-t^2},\ \dfrac{4+t^2}{4-t^2}\right)$

(2)　$x=\dfrac{2t}{4-t^2}$，$y=\dfrac{4+t^2}{4-t^2}$ から

$xt^2+2t=4x$ ……①

$(y+1)t^2=4y-4$ ……②

また，$y=-1$ は ② を満たさないから　$y\neq -1$

①，② を t，t^2 の連立方程式とみて解くと　$t=\dfrac{4x}{y+1}$，$t^2=\dfrac{4(y-1)}{y+1}$

t を消去して　$\left(\dfrac{4x}{y+1}\right)^2=\dfrac{4(y-1)}{y+1}$

式を整理すると　$4x^2-y^2=-1$

ここで，2 点 A，B が一致するとき，すなわち，直線 ℓ が 2 直線の交点 $(0,\ -1)$ を通るとき，中点 P は存在しない。

よって，求める曲線は　双曲線 $4x^2-y^2=-1$　ただし，点 $(0,\ -1)$ を除く。