数学②　第１回試練　三角関数

BASIC問題

$\boxed{1}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。

(1) $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(2) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3) $\tan\theta = \sqrt{3}$

$\boxed{2}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $2\cos\theta \leqq -\sqrt{2}$　　(2) $-\sqrt{2}\sin\theta + 1 \geqq 0$　　(3) $\sqrt{3}\tan\theta - 1 < 0$

$\boxed{3}$ α，β，γ は鋭角で，$\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 5$，$\tan\gamma = 8$ であるとき，次の値を求めよ。

(1) $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$　　(2) $\alpha+\beta+\gamma$

$\boxed{4}$ $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の式の値を求めよ。

(1) $\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{12} + \cos\dfrac{\pi}{12}$　　(2) $\sin\dfrac{5}{12}\pi - \cos\dfrac{5}{12}\pi$

$\boxed{6}$ $2\sin 4\theta\cos 2\theta$ を和の形，$\cos 5\theta + \cos 3\theta$ を積の形にせよ。

Standard問題

$\boxed{7}$ $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における 関数 $y = 3\sin x + 4\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

また，最大値を与える x に対する $\tan x$ の値を求めよ。

$\boxed{8}$ 関数 $y = \sin x + \cos x + 2\sin x\cos x + 1$ の最大値，最小値を求めよ。

$\boxed{9}$ 次の関数の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$$y = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

$\boxed{10}$ $\theta = 18^\circ$ のとき，$\sin 2\theta = \cos 3\theta$ であることを示せ。また，これを利用して，$\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

$\boxed{11}$ 次の値を求めよ。

(1) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$　　(2) $\sin 20^\circ + \sin 140^\circ + \sin 260^\circ$

実戦問題

12 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$　　(2) $\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) > 1$　　(4) $\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq -\dfrac{1}{2}$

13 a を定数とする。x についての方程式 $\cos^2 x + 2a\sin x - a - 1 = 0$ の $0 \leqq x < 2\pi$ における異なる実数解の個数が2個となるための a の条件を求めよ。

14 地上にいる人が，高さ 200 m の高層ビルの屋上に立っている高さ 50 m の鉄塔を見る。鉄塔の上端を A，この人を B，鉄塔の下端を C とするとき，∠ABC が最大となるのはこの人がビルから何 m 離れたときか。ただし，この人の身長は無視することとし，また，ビルや鉄塔の水平方向の大きさも無視する。

15 以下の問いに答えよ。必要ならば，等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を利用してよい。

(1) $2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ。

(2) $x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$ となる角度 α，β を求めよ。ただし $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ とする。

16 次の関係式が成り立つとき，△ABC はどのような形の三角形か。

$$\cos A + \cos B = \sin C$$

1 解答 (1) $\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ (2) $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$ (3) $\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$

2 解答 (1) $\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$ (2) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

(3) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

3 解答 (1) 1 (2) $\frac{5}{4}\pi$

4 解答 $\sin 2\alpha=-\frac{4\sqrt{2}}{9},\ \cos 2\alpha=\frac{7}{9},\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

5 解答 (1) $\sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6 解答 順に　$\sin 6\theta+\sin 2\theta$，$2\cos 4\theta\cos\theta$

7 解答 最大値 5，最小値 3　（後半） $\tan x=\frac{3}{4}$

8 解答 最大値 $2+\sqrt{2}$，最小値 $-\frac{1}{4}$

9 解答 $x=\frac{\pi}{8}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$，$x=\frac{5}{8}\pi$ で最小値 $2-\sqrt{2}$

10 解答 (前半) 略　(後半) $\sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

11 解答 (1) $\frac{1}{8}$ (2) 0

12 解答 (1) $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi$ (2) $\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(3) $\frac{5}{12}\pi<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{17}{12}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$ (4) $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi$

13 解答 $a<-\frac{1}{3}$，$a=0$，$1<a$ のとき 2 個

14 解答 $100\sqrt{5}$ m

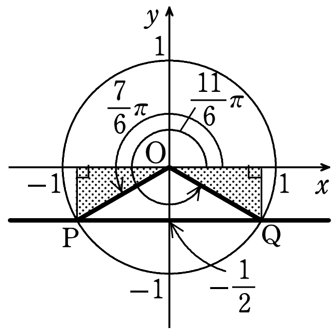
15 解答 (1) 略 (2) $\alpha=40^\circ,\ \beta=160^\circ$

16 解答 $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$ または $\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$ の直角三角形

1 (1) 直線 $y=-\frac{1}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，

求める θ は，動径 OP，OQ の表す角であるから

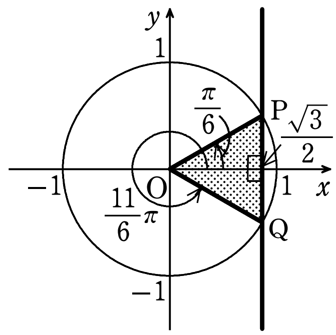
$$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$



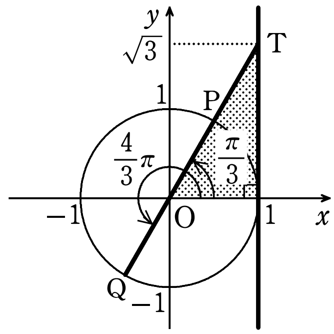
(2) 直線 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，

求める θ は，動径 OP，OQ の表す角であるから

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$$



(3) 点 T$(1,\ \sqrt{3})$ をとり，直線 OT と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角であるから $\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$



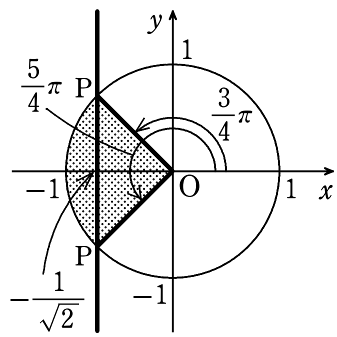
2 (1) 不等式を変形して $\cos\theta\leqq-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値は $\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。

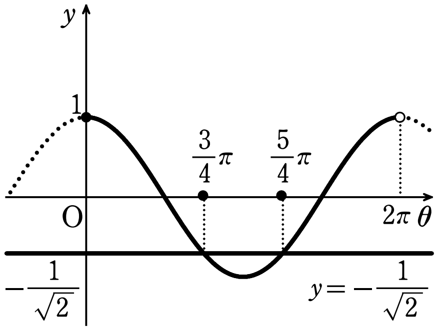
ゆえに，θ の値の範囲は

$$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$$



$\boxed{\text{別解}}$ 求める θ の値の範囲は，関数 $y=\cos\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ のグラフが，直線 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 上またはそれより下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，右の図から $\quad \dfrac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{4}\pi$



(2) 不等式を変形して $\quad \sin\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

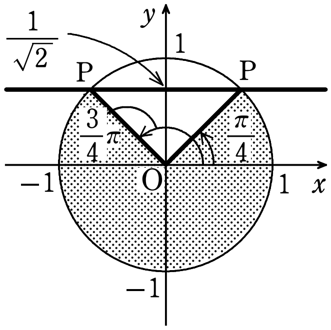
$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$

よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。

ゆえに，θ の値の範囲は

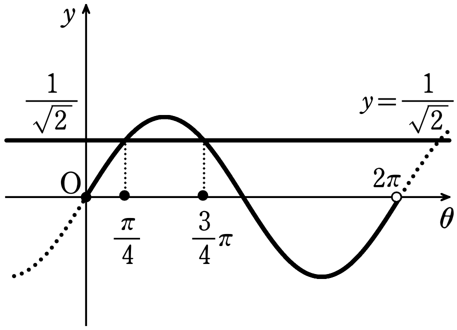
$$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi$$



$\boxed{\text{別解}}$ 求める θ の値の範囲は，関数 $y=\sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ のグラフが，直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 上またはそれより下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，右の図から

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi$$



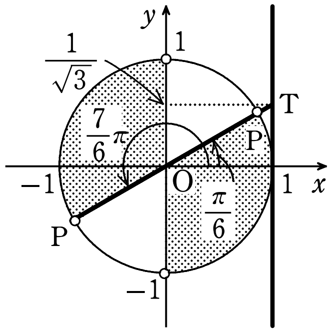
(3) 不等式を変形して $\quad \tan\theta < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$$

よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。

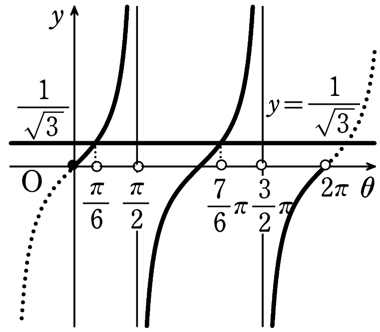
ゆえに，θ の値の範囲は



$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$

別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y=\tan\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ のグラフが，直線 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$ より下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，右の図から



$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$

3　(1)　$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{2+5}{1-2\cdot5} = -\dfrac{7}{9}$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\} = \frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma} = \frac{-\frac{7}{9}+8}{1-\left(-\frac{7}{9}\right)\cdot 8} = 1$$

(2)　α，β，γ は鋭角であるから　　$0 < \alpha+\beta+\gamma < \dfrac{3}{2}\pi$

$\tan(\alpha+\beta) < 0$ であるから，$\alpha+\beta$ は第２象限にある。

さらに，$\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\} > 0$ であるから，$(\alpha+\beta)+\gamma$ は第３象限にある。

よって，$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=1$ より　　$\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{5}{4}\pi$

4　$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ であるから　　$\cos\alpha < 0$

ゆえに　　$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

また　　$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 1-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{7}{9}$

次に　　$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\left\{1+\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right\} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}$

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より，$\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$

したがって　　$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

5　(1)　$\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{12} + \cos\dfrac{\pi}{12} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\sin\dfrac{\pi}{4} = 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

(2)　$\sin\dfrac{5}{12}\pi - \cos\dfrac{5}{12}\pi = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{5}{12}\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{6}$ $2\sin 4\theta\cos 2\theta = 2\cdot\dfrac{1}{2}\{\sin(4\theta+2\theta)+\sin(4\theta-2\theta)\} = \sin 6\theta + \sin 2\theta$

$$\cos 5\theta + \cos 3\theta = 2\cos\frac{5\theta+3\theta}{2}\cos\frac{5\theta-3\theta}{2} = 2\cos 4\theta\cos\theta$$

$\boxed{7}$ （前半）

$y = 3\sin x + 4\cos x = 5\sin(x+\alpha)$　　ただし　$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$

$\alpha \leqq x+\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}+\alpha$ より，$x+\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のとき　最大値　5

$x+\alpha = \dfrac{\pi}{2}+\alpha$　つまり $x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき　最小値　3

（後半）

$$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{3}{4}$$

$\boxed{8}$ $\sin x + \cos x = t$ とおく。

この式の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2$$

よって　　$2\sin x\cos x = t^2 - 1$

したがって

$$y = t + (t^2-1) + 1 = t^2 + t = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

また，$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

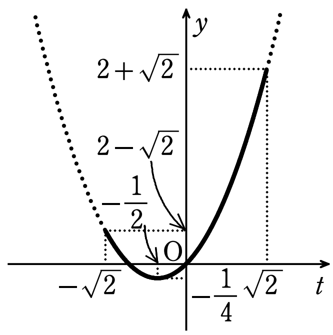
$$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2} \quad \cdots\cdots ①$$

① の範囲で y は

$t = \sqrt{2}$　で最大値　$2+\sqrt{2}$，

$t = -\dfrac{1}{2}$　で最小値　$-\dfrac{1}{4}$

をとる。



$\boxed{9}$ $$y = \frac{1-\cos 2x}{2} + 2\cdot\frac{\sin 2x}{2} + 3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} = \sin 2x + \cos 2x + 2$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + 2$$

$2x+\dfrac{\pi}{4} = t$ とおくと，$0 \leqq x \leqq \pi$ から　　$\dfrac{\pi}{4} \leqq t \leqq \dfrac{9}{4}\pi$　$\cdots\cdots$ ①

① の範囲において，$y = \sqrt{2}\sin t + 2$ は

$t = \dfrac{\pi}{2}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$ をとり，

$t = \dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 $2-\sqrt{2}$ をとる。

$t = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $x = \dfrac{\pi}{8}$，$t = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき $x = \dfrac{5}{8}\pi$ であるから，この関数は

$x=\dfrac{\pi}{8}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$ をとり，

$x=\dfrac{5}{8}\pi$ で最小値 $2-\sqrt{2}$ をとる。

$\boxed{10}$ $\theta=18^\circ$ のとき　$5\theta=90^\circ$　よって，$2\theta+3\theta=90^\circ$ より，$2\theta=90^\circ-3\theta$ であるから

$\sin 2\theta=\sin(90^\circ-3\theta)=\cos 3\theta$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，$\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$ であるから

$$2\sin\theta\cos\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$$

$\cos\theta\neq 0$ であるから　$2\sin\theta=-3+4\cos^2\theta$

よって　$2\sin\theta=-3+4(1-\sin^2\theta)$

整理して　$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$　これを解いて　$\sin\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

参考　3 倍角の公式　$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$，$\cos 3\alpha=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$

[証明]　$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha$$

$$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha$

$$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha$$

$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$$

$$=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$$

$\boxed{11}$ (1)　$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\dfrac{1}{2}(\cos 60^\circ+\cos 20^\circ)\cos 80^\circ$

$$=\frac{1}{4}\cos 80^\circ+\frac{1}{2}\cos 20^\circ\cos 80^\circ$$

$$=\frac{1}{4}\cos 80^\circ+\frac{1}{4}(\cos 100^\circ+\cos 60^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}\cos 80^\circ+\frac{1}{4}\cos(180^\circ-80^\circ)+\frac{1}{8}$$

$$=\frac{1}{4}\cos 80^\circ-\frac{1}{4}\cos 80^\circ+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

(2)　$\sin 20^\circ+\sin 140^\circ+\sin 260^\circ=(\sin 20^\circ+\sin 260^\circ)+\sin 140^\circ$

$$=2\sin 140^\circ\cos 120^\circ+\sin 140^\circ$$

$$=-\sin 140^\circ+\sin 140^\circ=0$$

$\boxed{12}$ (1)　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\sin t=-\dfrac{1}{2}$　…… ①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$-\frac{\pi}{3} \leqq \theta - \frac{\pi}{3} < 2\pi - \frac{\pi}{3}$　すなわち　$-\frac{\pi}{3} \leqq t < \frac{5}{3}\pi$

この範囲で，① を解くと　$t = -\frac{\pi}{6}$，$\frac{7}{6}\pi$　すなわち　$\theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$，$\frac{7}{6}\pi$

よって　$\theta = \frac{\pi}{6}$，$\frac{3}{2}\pi$

(2)　$2\theta + \frac{\pi}{3} = t$ とおくと　$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$　…… ①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$\frac{\pi}{3} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{3} < 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}$　すなわち　$\frac{\pi}{3} \leqq t < \frac{13}{3}\pi$

この範囲で，① を解くと　$t = \frac{11}{6}\pi$，$\frac{13}{6}\pi$，$\frac{23}{6}\pi$，$\frac{25}{6}\pi$

すなわち　$2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{11}{6}\pi$，$\frac{13}{6}\pi$，$\frac{23}{6}\pi$，$\frac{25}{6}\pi$

よって　$\theta = \frac{3}{4}\pi$，$\frac{11}{12}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$，$\frac{23}{12}\pi$

(3)　$\theta - \frac{\pi}{6} = t$ とおくと　$\tan t > 1$　…… ①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$-\frac{\pi}{6} \leqq \theta - \frac{\pi}{6} < 2\pi - \frac{\pi}{6}$

すなわち　$-\frac{\pi}{6} \leqq t < \frac{11}{6}\pi$　…… ①

この範囲で，① を解くと　$\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{4}\pi < t < \frac{3}{2}\pi$

すなわち　$\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{4}\pi < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{3}{2}\pi$

よって　$\frac{5}{12}\pi < \theta < \frac{2}{3}\pi$，$\frac{17}{12}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$

(4)　$2\theta + \frac{\pi}{6} = t$ とおくと　$\sin t \leqq -\frac{1}{2}$　…… ①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} < 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}$

すなわち　$\frac{\pi}{6} \leqq t < \frac{25}{6}\pi$

この範囲で，① を解くと　$\frac{7}{6}\pi \leqq t \leqq \frac{11}{6}\pi$，$\frac{19}{6}\pi \leqq t \leqq \frac{23}{6}\pi$

すなわち　$\frac{7}{6}\pi \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{11}{6}\pi$，$\frac{19}{6}\pi \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{23}{6}\pi$

よって　$\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq \frac{11}{6}\pi$

13　$\sin x = t$ とおくと，方程式は　$(t-a)^2 - a^2 + a = 0$
また，$0 \leqq x < 2\pi$ より　$-1 \leqq t \leqq 1$

よって，$f(t)=(t-a)^2-a^2+a=0$ の $-1\leqq t\leqq 1$ における実数解の個数を調べればよい。ただし，$\sin x=t$ を満たす x は，$t\neq\pm 1$ であれば 2 つあり，$t=\pm 1$ であれば 1 つある。

[1]　$f(1)=-a+1=0$ のとき

$a=1$ であるから　　$f(t)=(t-1)^2$

よって，$f(t)=0$ は重解 $t=1$ をもつ。したがって，x の実数解は 1 個。

[2]　$f(-1)=3a+1=0$ のとき

$a=-\dfrac{1}{3}$ であるから　　$f(t)=\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{4}{9}$

$f(t)=0$ すなわち $t^2+\dfrac{2}{3}t-\dfrac{1}{3}=0$ を解くと　$t=-1$，$\dfrac{1}{3}$

したがって，x の実数解は 3 個。

[3]　$f(t)=0$ が $-1<t<1$ に実数解を 2 つもつとき

$$\begin{cases} -1<a<1 \text{ かつ } -a^2+a<0 \text{（頂点の位置から）} \\ f(1)=-a+1>0 \\ f(-1)=3a+1>0 \end{cases}$$

この連立不等式を解くと　　$-\dfrac{1}{3}<a<0$

このとき，x の実数解は 4 個。

[4]　$f(t)=0$ が $-1<t<1$ に実数解を 1 つもつとき

このときは，次の（ア）か（イ）のどちらかである。

（ア）　$f(t)=0$ が $-1<t<1$ に重解をもつ。

（イ）　$f(1)f(-1)<0$

（ア）のとき，$-a^2+a=0$ を満たすから　　$a=0$，1

$a=0$ のとき $f(t)=t^2$ であるから，確かに重解 $t=0$ を $-1<t<1$ にもつ。

このとき，x の実数解は 2 個。

$a=1$ のとき $f(t)=(t-1)^2$ であるから，$-1<t<1$ には解をもたない。

（イ）のとき　　$(-a+1)(3a+1)<0$

よって　　　$a<-\dfrac{1}{3}$，$1<a$

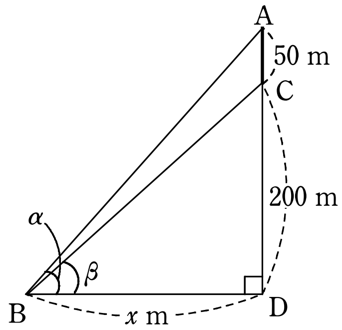
このとき，x の実数解は 2 個。

まとめると　$-\dfrac{1}{3}<a<0$ のとき 4 個，　$a=-\dfrac{1}{3}$ のとき 3 個，

$a<-\dfrac{1}{3}$，$a=0$，$1<a$ のとき 2 個，

$a=1$ のとき 1 個，　$0<a<1$ のとき 0 個

以上より，解が2個となる条件は　$a<-\dfrac{1}{3}$，$a=0$，$1<a$



14　人がビルから x m 離れているとする。
また，ビルの下端を D とし，右の図のように，
$\angle ABD=\alpha$，$\angle CBD=\beta$ とすると

$$\tan\alpha=\frac{250}{x},\quad \tan\beta=\frac{200}{x}$$

したがって

$$\tan\angle ABC=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{250}{x}-\frac{200}{x}}{1+\frac{250}{x}\cdot\frac{200}{x}}=\frac{\frac{50}{x}}{1+\frac{50000}{x^2}}$$

$$=\frac{50}{x+\frac{50000}{x}}$$

$x>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{50000}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{50000}{x}}=200\sqrt{5}$$

等号が成り立つのは，$x=\frac{50000}{x}$ かつ $x>0$，すなわち $x=100\sqrt{5}$ のときである。

$0<\angle ABC<\frac{\pi}{2}$ であるから，$\tan\angle ABC$ が最大のとき，$\angle ABC$ も最大である。

したがって，人がビルから $100\sqrt{5}$ m 離れたとき，$\angle ABC$ は最大となる。

15　参考　$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$

$$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta\cdot\sin\theta$$

$$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

(1)　$(2\cos 80^\circ)^3-3\cdot 2\cos 80^\circ+1$

$$=8\cos^3 80^\circ-6\cos 80^\circ+1=2(4\cos^3 80^\circ-3\cos 80^\circ)+1$$

$$=2\cos(3\times 80^\circ)+1=2\cos 240^\circ+1=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0$$

よって，$2\cos 80^\circ$ は $x^3-3x+1=0$ の解である。

(2)　$(2\cos\theta)^3-3\cdot 2\cos\theta+1=0$

$$\Longleftrightarrow 2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+1=0$$

$$\Longleftrightarrow 2\cos 3\theta+1=0\Longleftrightarrow \cos 3\theta=-\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，① を満たす θ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ を求めると，$0^\circ<3\theta<540^\circ$ であるから

$3\theta=120^\circ,\ 240^\circ,\ 480^\circ$　　　よって　　$\theta=40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ$

ゆえに，$2\cos 40^\circ$，$2\cos 160^\circ$ は $x^3-3x+1=0$ の $2\cos 80^\circ$ 以外の 2 つの解である。

$\alpha<\beta$ であるから　　$\alpha=40^\circ$，$\beta=160^\circ$

16 $A+B+C=\pi$　…… ① であるから　　$A+B=\pi-C$

よって　$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

また　　$\sin C=\sin\left(2\cdot\dfrac{C}{2}\right)=2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

ゆえに，等式 $\cos A+\cos B=\sin C$ から　$2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}=2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$\sin\dfrac{C}{2}\neq 0$ であるから　$\cos\dfrac{A-B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$

この等式を更に変形すると　$\cos\dfrac{A-B}{2}-\cos\dfrac{C}{2}=0$

$$-2\sin\frac{A-B+C}{4}\sin\frac{A-B-C}{4}=0$$

$$\sin\frac{(A+C)-B}{4}\sin\frac{A-(B+C)}{4}=0 \quad \cdots\cdots ②$$

A，B，C は三角形の内角であるから

$0<A+C<\pi$，$0<B<\pi$

したがって，$-\pi<(A+C)-B<\pi$ から

$$-\frac{\pi}{4}<\frac{(A+C)-B}{4}<\frac{\pi}{4}$$

同様に考えて　$-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{A-(B+C)}{4}<\dfrac{\pi}{4}$

よって，② から

$\dfrac{(A+C)-B}{4}=0$　すなわち　$A-B+C=0$　…… ③

$\dfrac{A-(B+C)}{4}=0$　すなわち　$A-B-C=0$　…… ④

① − ③ から　$2B=\pi$　すなわち　$B=\dfrac{\pi}{2}$

① + ④ から　$2A=\pi$　すなわち　$A=\dfrac{\pi}{2}$

したがって，△ABC は，∠A が直角または ∠B が直角の直角三角形である。