BASIC問題

1　2点 A(-3)，B(5) について，次のものを求めよ。

(1)　2点 A，B 間の距離

(2)　線分 AB を $3:1$ に内分，外分する点の座標

(3)　線分 AB の中点

2　次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(6,\ -1)$ を通り，直線 $2x-y+4=0$ に平行な直線，垂直な直線

(2)　点 $(-2,\ 3)$ を通り，直線 $5x+2y-3=0$ に平行な直線，垂直な直線

(3)　点 $(1,\ -1)$ を通り，2点 $(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$ を通る直線に平行な直線，垂直な直線

3　(1)　2点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(2)　3点 $(3,\ 1)$，$(6,\ -8)$，$(-2,\ -4)$ を通る円の方程式を求めよ。

4　k を定数とする。点 $(2,\ 1)$ から直線 $kx+y+1=0$ へ下ろした垂線の長さが $\sqrt{3}$ となるように，k の値を定めよ。

STANDARD問題

5　直線 $3x-4y-1=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点 A$(2,\ 5)$ と対称な点を B，点 A から ℓ に下ろした垂線と ℓ との交点を H とするとき，次のものを求めよ。

(1)　点 B の座標　　(2)　点 H の座標

6　3直線 $x+3y-2=0$ ……①，$x+y=0$ ……②，$ax-2y+4=0$ ……③ が三角形を作らないとき，定数 a の値を求めよ。

7　点 $(-1,\ 2)$ を通り，x 軸，y 軸に接するような円の方程式を求めよ。

8　円 $x^2+y^2-4x-2y=0$ と直線 $ax+y+a=0$ が異なる2点 A，B で交わる。

(1)　$a=-1$ のとき，弦 AB の長さを求めよ。

(2)　弦 AB の長さが最大となるとき，定数 a の値を求めよ。

9　2つの円 $x^2+y^2-6x-4y+12=0$ ……①，$x^2+y^2-2x-2y=0$ ……② について，次の問いに答えよ。

(1)　2つの円①，②は異なる2点で交わることを示せ。

(2)　2つの円①，②の2つの交点と点 $(4,\ 0)$ を通る円の方程式を求めよ。

実戦問題

10 座標平面上に 2 点 A$(-2,\ 3)$，B$(0,\ 1)$ と放物線 $y=x^2-8x+15$ がある。点 P が放物線上の $1 \leqq x \leqq 7$ の範囲を動くとき，△PAB の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。

11 点 P$(7,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=25$ に引いた 2 本の接線の接点を A，B とするとき，直線 AB の方程式を求めよ。

12 円 $x^2+y^2=4$ ……① と円 $(x-5)^2+y^2=1$ ……② の共通接線の方程式を求めよ。

数学②　第３回試練　図形と式１

$\boxed{1}$ 解答 (1) 8　(2) 内分 3，外分 9　(3) 1

$\boxed{2}$ 解答 (1) 平行：$2x-y-13=0$，垂直：$x+2y-4=0$

(2) 平行：$5x+2y+4=0$，垂直：$2x-5y+19=0$

(3) 平行：$x-2y-3=0$，垂直：$2x+y-1=0$

$\boxed{3}$ 解答 (1) $(x-4)^2+(y-1)^2=10$　(2) $x^2+y^2-6x+8y=0$

$\boxed{4}$ 解答 $k=-4\pm\sqrt{15}$

$\boxed{5}$ 解答 (1) $\left(\dfrac{28}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$　(2) $\left(\dfrac{19}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

$\boxed{6}$ 解答 $a=-2,\ -\dfrac{2}{3},\ 2$

$\boxed{7}$ 解答 $(x+1)^2+(y-1)^2=1,\ (x+5)^2+(y-5)^2=25$

$\boxed{8}$ 解答 (1) $2\sqrt{3}$　(2) $a=-\dfrac{1}{3}$

$\boxed{9}$ 解答 (1) 略　(2) $x^2+y^2-10x-6y+24=0$

$\boxed{10}$ 解答 $\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

$\boxed{11}$ 解答 $7x+y=25$

$\boxed{12}$ 解答 $3x\pm4y=10,\ x\pm2\sqrt{6}\,y=10$

数学② 第３回試練 図形と式１

$\boxed{1}$ (1) $\mathrm{AB}=|5-(-3)|=|8|=8$

(2) 3：1 に内分する点の座標は $x=\dfrac{1\cdot(-3)+3\cdot5}{3+1}=\dfrac{12}{4}=3$

3：1 に外分する点の座標は $x=\dfrac{-1\cdot(-3)+3\cdot5}{3-1}=\dfrac{18}{2}=9$

(3) $x=\dfrac{-3+5}{2}=1$

$\boxed{2}$ (1) $2x-y+4=0$ から $y=2x+4$

よって，与えられた直線の傾きは 2

[1] 平行な直線の方程式は

$y-(-1)=2(x-6)$ すなわち $2x-y-13=0$

[2] 垂直な直線の傾きを m とすると

$2m=-1$ よって $m=-\dfrac{1}{2}$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$y-(-1)=-\dfrac{1}{2}(x-6)$ すなわち $x+2y-4=0$

(2) $5x+2y-3=0$ から $y=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}$

よって，与えられた直線の傾きは $-\dfrac{5}{2}$

[1] 平行な直線の方程式は

$y-3=-\dfrac{5}{2}\{x-(-2)\}$ すなわち $5x+2y+4=0$

[2] 垂直な直線の傾きを m とすると

$-\dfrac{5}{2}m=-1$ よって $m=\dfrac{2}{5}$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$y-3=\dfrac{2}{5}\{x-(-2)\}$ すなわち $2x-5y+19=0$

(3) 2 点 $(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{1-(-5)}{8-(-4)}=\dfrac{1}{2}$

[1] 平行な直線の方程式は

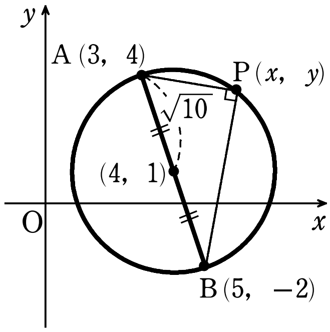
$y-(-1)=\dfrac{1}{2}(x-1)$ すなわち $x-2y-3=0$

[2] 垂直な直線の傾きを m とすると

$\dfrac{1}{2}m=-1$ よって $m=-2$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$y-(-1)=-2(x-1)$ すなわち $2x+y-1=0$



3 (1)　この円の中心は，2 点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を結ぶ線分の中点であるから，その座標は　$(4,\ 1)$

半径 r は中心 $(4,\ 1)$ と円上の点 $(3,\ 4)$ との距離であるから　$r^2=(4-3)^2+(1-4)^2=10$

よって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-1)^2=10$$

(2)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 $(3,\ 1)$ を通るから　$3^2+1^2+3l+m+n=0$

点 $(6,\ -8)$ を通るから　$6^2+(-8)^2+6l-8m+n=0$

点 $(-2,\ -4)$ を通るから　$(-2)^2+(-4)^2-2l-4m+n=0$

整理すると　$3l+m+n+10=0$

$6l-8m+n+100=0$

$2l+4m-n-20=0$

これを解いて　$l=-6$，$m=8$，$n=0$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-6x+8y=0$

4 題意を満たすための条件は　$\dfrac{|k\cdot 2+1+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$

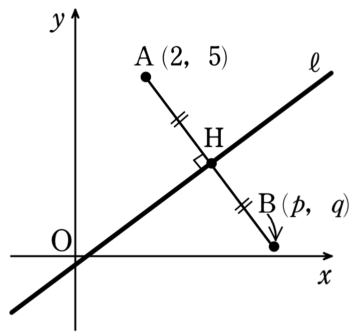
よって　$2|k+1|=\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}$

この両辺は負でないから，2 乗しても同値である。

ゆえに　$4(k+1)^2=3(k^2+1)$

整理して　$k^2+8k+1=0$

したがって　$k=-4\pm\sqrt{15}$



5 (1)　点 B の座標を $(p,\ q)$ とする。

[1]　直線 ℓ の傾きは $\dfrac{3}{4}$，直線 AB の傾きは $\dfrac{q-5}{p-2}$ である。

$\mathrm{AB}\perp\ell$ であるから

$$\frac{q-5}{p-2}\cdot\frac{3}{4}=-1$$

すなわち　　$4p+3q=23$　……①

[2]　線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p+2}{2},\ \dfrac{q+5}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$$3\cdot\frac{p+2}{2}-4\cdot\frac{q+5}{2}-1=0$$

すなわち　　$3p-4q=16$　……②

①，② を連立して解くと　　$p=\dfrac{28}{5}$，$q=\dfrac{1}{5}$

したがって，点 B の座標は　　$\left(\dfrac{28}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

(2)　点 H は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{2+\frac{28}{5}}{2},\ \frac{5+\frac{1}{5}}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\frac{19}{5},\ \frac{13}{5}\right)$$

6 直線 ① の傾きは $-\dfrac{1}{3}$，　直線 ② の傾きは -1，　直線 ③ の傾きは $\dfrac{a}{2}$

3 直線 ①，②，③ が三角形を作らないのは，次の [1]，[2]，[3] の場合である。

[1]　2 直線 ①，③ が平行　　　[2]　2 直線 ②，③ が平行

[3]　3 直線 ①，②，③ が 1 点で交わる。

[1] の場合　　$-\dfrac{1}{3}=\dfrac{a}{2}$　　　よって　$a=-\dfrac{2}{3}$

[2] の場合　　$-1=\dfrac{a}{2}$　　　よって　$a=-2$

[3] の場合　　①，② を連立して解くと　$x=-1$，$y=1$

よって，直線 ①，② の交点の座標は　　$(-1,\ 1)$

点 $(-1,\ 1)$ が直線 ③ 上にあるから　　$a\cdot(-1)-2\cdot1+4=0$

整理して　　$-a+2=0$　　　ゆえに　$a=2$

このとき，直線 ③ は $x-y+2=0$ となり，直線 ①，② とは一致しない。

したがって，求める a の値は　　$a=-2,\ -\dfrac{2}{3},\ 2$

7　円の中心は第２象限にあるので，半径を r とおくと中心の座標は $(-r,\ r)$ と表せる。

よって，求める円の方程式は　$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

この円が点 $(-1,\ 2)$ を通るから　$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$

式を整理して　　$r^2-6r+5=0$

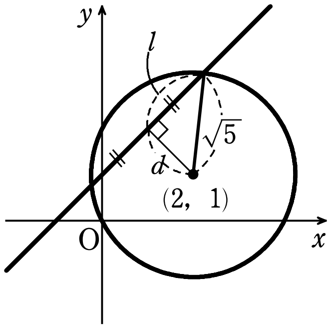
$(r-1)(r-5)=0$ より　　$r=1,\ 5$

したがって，求める円の方程式は

$$(x+1)^2+(y-1)^2=1,\ (x+5)^2+(y-5)^2=25$$

8 (1)　$x^2+y^2-4x-2y=0$ を変形すると

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5 \quad \cdots\cdots ①$$



$a=-1$ のとき，直線の方程式は

$$x-y+1=0 \quad \cdots\cdots ②$$

円 ① の中心 $(2,\ 1)$ と直線 ② の距離 d は

$$d=\frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

円 ① の半径は $\sqrt{5}$ であるから，弦 AB の長さを $2l$ とすると　　$l^2=(\sqrt{5})^2-d^2=5-2=3$

$l>0$ であるから　　$l=\sqrt{3}$　　　よって　　$\mathrm{AB}=2l=2\sqrt{3}$

別解　② から　　$y=x+1$

これを $x^2+y^2-4x-2y=0$ に代入して　　$x^2+(x+1)^2-4x-2(x+1)=0$

よって　　$2x^2-4x-1=0$　$\cdots\cdots$ ③

円と直線の交点 A，B の座標を $(\alpha,\ \alpha+1)$，$(\beta,\ \beta+1)$ とすると，α，β は２次方程式 ③ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{4}{2}=2,\quad \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

よって　　$\mathrm{AB}^2=(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+1)-(\alpha+1)\}^2=2(\beta-\alpha)^2=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$

$$=2\left\{2^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=12$$

$\mathrm{AB}>0$ であるから　　$\mathrm{AB}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(2)　弦 AB の長さが最大になるのは，弦 AB が円の直径になるときである。

このとき，直線 $ax+y+a=0$ は円の中心 $(2,\ 1)$ を通るから

$$2\cdot a+1+a=0 \qquad よって \qquad a=-\frac{1}{3}$$

9 (1)　① を変形すると　$(x-3)^2+(y-2)^2=1$

よって，円 ① の中心は点 $(3,\ 2)$，半径は 1 である。

② を変形すると　$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

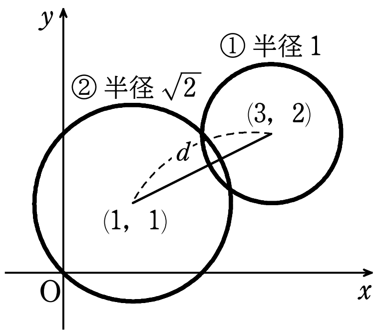
よって，円 ② の中心は点 $(1,\ 1)$，半径は $\sqrt{2}$ である。

2 つの円 ①，② の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$$

ゆえに　$\sqrt{2}-1<d<\sqrt{2}+1$

したがって，2 つの円 ①，② は異なる 2 点で交わる。



(2)　k を定数として，方程式

$$x^2+y^2-6x-4y+12+k(x^2+y^2-2x-2y)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

を考える。

(1) により，2 つの円 ①，② は 2 点で交わり，③ は 2 つの円 ①，② の 2 つの交点を通る図形を表す。

図形 ③ が点 $(4,\ 0)$ を通るとき　$4+8k=0$　　よって　$k=-\dfrac{1}{2}$

これを ③ に代入して整理すると　$x^2+y^2-10x-6y+24=0$

これが求める円の方程式である。

10 (1)　$\mathrm{P}(t,\ t^2-8t+15)$ とする。

直線 AB の方程式は

$$y=\frac{1-3}{0-(-2)}\{x-(-2)\}+3$$

すなわち　$y=-x+1$

点 P と直線 $y=-x+1$ の距離を d とすると

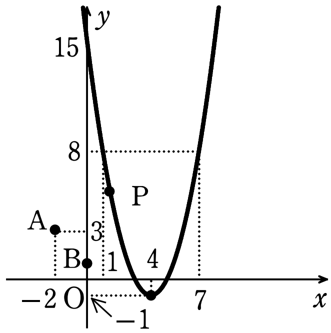
$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times d$$

ゆえに，d が最小となるように P を定めればよい。

$$d=\frac{|t+t^2-8t+15-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|t^2-7t+14|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(t-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right|$$

よって，d は $t=\dfrac{7}{2}$ で最小となる。

したがって　$\mathrm{P}\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$



11 A $(x_1,\ y_1)$，B $(x_2,\ y_2)$ とすると，A，B における接線の方程式は，それぞれ

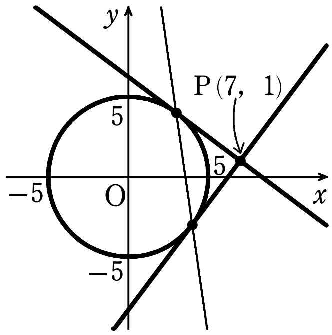
$$x_1x+y_1y=25,\quad x_2x+y_2y=25$$

これらがともに点 P(7，1) を通るから

$$7x_1+y_1=25 \ \cdots\cdots ①,\quad 7x_2+y_2=25 \ \cdots\cdots ②$$

①，② から，2 点 A $(x_1,\ y_1)$，B $(x_2,\ y_2)$ は直線 $7x+y=25$ 上にある。

よって，直線 AB の方程式は　$7x+y=25$



別解　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とする。

点 $(x_1,\ y_1)$ は円 $x^2+y^2=25$ 上にあるから　$x_1{}^2+y_1{}^2=25$　……①

点 $(x_1,\ y_1)$ におけるこの円の接線の方程式は　$x_1x+y_1y=25$

これが点 P(7，1) を通るから　$7x_1+y_1=25$

よって　$y_1=-7x_1+25$　……②

② を ① に代入して　$x_1{}^2+(-7x_1+25)^2=25$

ゆえに　$50(x_1{}^2-7x_1+12)=0$　　これを解いて　$x_1=3,\ 4$

② から　$x_1=3$ のとき　$y_1=4$，　$x_1=4$ のとき　$y_1=-3$

よって，A，B の座標は　(3，4)，(4，−3)

したがって，直線 AB の方程式は

$$y-4=\frac{-3-4}{4-3}(x-3)\quad \text{すなわち}\quad 7x+y-25=0$$

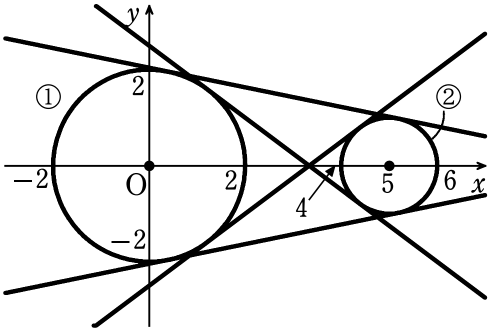
参考　直線 AB を点 P に関する円の 極線 といい，P を 極 という。

12 円 ① 上の接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると

$$x_1{}^2+y_1{}^2=4 \quad \cdots\cdots③$$

接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=4 \quad \cdots\cdots④$$



直線 ④ が円 ② に接するとき，円 ② の中心 (5，0) と直線 ④ の距離は円 ② の半径に等しいから　$\dfrac{|5x_1-4|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}=1$

③ から　$|5x_1-4|=2$

これを解いて　$x_1=\dfrac{6}{5},\ \dfrac{2}{5}$

③ から　$x_1=\dfrac{6}{5}$ のとき $y_1=\pm\dfrac{8}{5}$，$x_1=\dfrac{2}{5}$ のとき $y_1=\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$

よって，求める接線の方程式は　$3x\pm4y=10$，$x\pm2\sqrt{6}\,y=10$